



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Мейханаджян, И. С. Зарядов, Т. А. Милованова, Стационарные характеристики двухузловой марковской системы массового обслуживания с обобщенным обновлением, *Системы и средства информ.*, 2020, том 30, выпуск 3, 14–31

DOI: 10.14357/08696527200302

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.14.247.170

8 января 2025 г., 06:28:03



СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУХУЗЛОВОЙ МАРКОВСКОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОБОБЩЕННЫМ ОБНОВЛЕНИЕМ*

Л. А. Мейханаджян¹, И. С. Зарядов², Т. А. Милованова³

Аннотация: Рассматривается функционирующая в случайной среде двухузловая система массового обслуживания (СМО), в каждом узле которой реализован механизм обобщенного обновления. Каждый узел представляет собой однолинейную систему обслуживания конечной емкости, с пуассоновским входящим потоком и временами обслуживания, имеющими распределение Эрланга с различными для каждого узла параметрами. Только обслуженные на первом узле заявки поступают в очередь второго узла; потерянные на первом, а также обслуженные и потерянные на втором узле заявки покидают систему. Заявка теряется, если очередь в узле, на который она поступает, полностью заполнена. Предложен матрично-аналитический метод расчета совместного стационарного распределения числа заявок в первом и втором узлах и фаз обслуживания. Представлены формулы для вычисления стационарных вероятностей потерь при прямом порядке обслуживания и обновления в каждом узле.

Ключевые слова: система массового обслуживания; цепочка приборов; обобщенное обновление; управление очередью

DOI: 10.14357/08696527200302

1 Введение

Интерес к СМО с различными вариантами механизма обновления связан с потенциальными возможностями применения последнего в качестве алгоритма активного управления очередями (см. подробнее в [1–8]). В отличие от предыдущих работ по данной тематике, в этой статье впервые рассматривается марковская двухузловая СМО конечной емкости, в каждом узле которой реализован механизм обобщенного обновления согласно [9]. Принятое предположение о распределении времени обслуживания позволяет отнести рассматриваемую систему к сетям массового обслуживания (СeМО), функционирующим в случайной среде. В литературе имеются много работ, в которых анализируются подобные

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-07-00739).

¹ Финансовый университет при Правительстве РФ, lamejkhanaadzhyan@fa.ru

² Российский университет дружбы народов; Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, zaryadov-is@rudn.ru

³ Российский университет дружбы народов, milovanova-ta@rudn.ru

СеМО (см., например, [10–12]). Основными результатами этой работы являются рекуррентные формулы, позволяющие рассчитывать основные стационарные характеристики системы. Наличие механизма обновления в узлах СеМО выводит рассматриваемую систему из класса разрешимых в мультипликативной форме. На основе матрично-аналитического метода здесь предложен алгоритм расчета совместного стационарного распределения числа заявок и фазы обслуживания в узлах. Отдельное внимание уделено стационарным показателям, связанным с потерями заявок. Отличительная особенность рассмотренной системы — зависимость вероятностей потерь принятой заявки от новых заявок, которые могут поступить за время ее пребывания в системе. Для нахождения этих характеристик предложен метод, позволяющий, при прямом порядке обслуживания и обновления в каждом узле, проводить подсчет рекуррентным образом.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 дается подробное описание системы и вводятся основные обозначения. В разд. 3 внимание уделено нахождению совместного стационарного распределения. Метод расчета стационарных вероятностей потерь изложен в разд. 4. Результаты этого раздела также позволяют рассчитывать (в терминах преобразований) и стационарные распределения времен ожидания начала обслуживания и пребывания заявки в системе. В заключении кратко обсуждаются перспективы дальнейших исследований.

2 Описание системы

Рассмотрим систему, состоящую из двух расположенных друг за другом однолинейных узлов¹. Узел i , $i = 1, 2$, представляет собой СМО $M/E_{n_i}/1/(N_i - 1)$ конечной емкости, в которую поступает (внешний по отношению к системе) пуассоновский поток интенсивности λ_i , а времена обслуживания заявок имеют распределение Эрланга порядка n_i с параметром μ_i . Заявка теряется, если очередь в узле, на который она поступает, полностью заполнена.

В каждом узле реализован механизм обобщенного обновления, который работает следующим образом [9]. Обслуженная заявка, заставшая очередь в узле пустой, покидает его. Если же в момент окончания обслуживания заявки в узле i в его очереди оказалось n , $1 \leq n \leq N_i - 1$, заявок, то

- с вероятностью $q_0^{(i)} + Q_n^{(i)}$ обслуженная заявка покидает узел i , не оказывая на него никакого воздействия;
- с вероятностью $q_j^{(i)}$, $0 < j < n$, обслуженная заявка удаляет из очереди узла i ровно j заявок, которые покидают систему, не оказывая на нее в дальнейшем никакого воздействия.

Здесь и далее $\{q_n^{(1)}, 0 \leq n \leq N_1 - 1\}$ и $\{q_n^{(2)}, 0 \leq n \leq N_2 - 1\}$ — вероятности обновления в узле 1 и узле 2 соответственно, $Q_n^{(i)} = q_n^{(i)} + q_{n+1}^{(i)} + \dots + q_{N_i-1}^{(i)}$

¹Для определенности будем считать, что заявки, обслуженные в узле 1, направляются в узел 2.

и $Q_0^{(i)} = 1, i = 1, 2$. Далее предполагается, что заявки обслуживаются и удаляются из очереди в порядке поступления.

Далее для сокращения записи будем пользоваться следующими обозначениями:

$\mathbf{1}_{(A)}$ — индикатор множества A ;

\vec{e}_{ij} — вектор размера n_i , у которого все элементы равны нулю, кроме элемента на j -м месте;

$\mathbb{E}_{km}^{(i)}$ — квадратная матрица размера n_i , в которой (k, m) -й элемент равен единице, а остальные равны нулю;

$\vec{1}$ — единичный вектор;

\mathbb{I}_n — единичная квадратная матрица размера n .

3 Совместное стационарное распределение

С учетом вероятностной интерпретации РН-распределения функционирование рассматриваемой системы может быть описано однородным марковским процессом $X(t), t \geq 0$, над пространством состояний

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = \{ & (0, 0) \} \cup \{ (i, n, 0), 1 \leq i \leq N_1, 1 \leq n \leq n_1 \} \cup \\ & \cup \{ (0, j, m), 1 \leq j \leq N_2, 1 \leq m \leq n_2 \} \cup \\ & \cup \{ (i, n, j, m), 1 \leq i \leq N_1, 1 \leq n \leq n_1, 1 \leq j \leq N_2, 1 \leq m \leq n_2 \}. \end{aligned}$$

Здесь для некоторого момента времени t :

$X(t) = (0, 0)$, если оба узла свободны от заявок;

$X(t) = (i, n, 0)$ ($X(t) = (0, j, m)$), если в узле 2 (узле 1) нет заявок, а в узле 1 (узле 2) находится i (j) заявок, причем число фаз до окончания (далее — просто фаза) обслуживания заявки на приборе равно n (m);

$X(t) = (i, n, j, m)$, если в узлах 1 и 2 соответственно i и j заявок, а обслуживаемые заявки проходят фазы n и m .

Обозначим через $p_x = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X(t) = x)$ стационарную вероятность состояния $x \in \mathcal{X}$. Из сделанных в предыдущем разделе предположений, дополненных условием, что μ_1, μ_2, n_1 и n_2 конечны, вытекает сообщаемость всех состояний процесса $X(t)$ и, следовательно, существование стационарных вероятностей.

Введем векторы:

$$\begin{aligned} \vec{p}_0 &= (p_{0,0}, p_{0,1,1}, \dots, p_{0,1,n_2}, p_{0,2,1}, \dots, p_{0,2,n_2}, \dots, p_{0,N_2,1}, \dots, p_{0,N_2,n_2}); \\ \vec{p}_{i,n} &= (p_{i,n,0}, p_{i,n,1,1}, \dots, p_{i,n,1,n_2}, p_{i,n,2,1}, \dots \\ &\quad \dots, p_{i,n,2,n_2}, \dots, p_{i,n,N_2,1}, \dots, p_{i,n,N_2,n_2}), \quad 1 \leq i \leq N_1, \quad 1 \leq n \leq n_1; \\ \vec{p}_i &= (\vec{p}_{i,1}, \dots, \vec{p}_{i,n_1}), \quad 1 \leq i \leq N_1; \\ \vec{p} &= (\vec{p}_0, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{N_1}). \end{aligned}$$

Стационарное распределение процесса $X(t)$ является единственным решением системы уравнений равновесия (СУР), для выписывания которой воспользуемся следующим соображением. Следуя терминологии обобщенных процессов рождения и гибели, назовем уровнем процесса $X(t)$ число заявок и фазу обслуживания в узле 1, а фазой процесса $X(t)$ — число заявок и фазу обслуживания в узле 2. Тогда из описания системы следует, что если уровень процесса $X(t)$ есть (i, n) , то возможны переходы либо с текущего уровня на уровень выше с сохранением фазы (матрицу интенсивностей таких переходов обозначим через $\mathbb{L}_{(i,n),(k,l)}$), либо с текущего уровня на один из уровней ниже с сохранением фазы (матрицу интенсивностей таких переходов обозначим через $\mathbb{N}_{(i,n),(k,l)}$), либо внутри текущего уровня со сменой фазы (матрицу интенсивностей таких переходов обозначим через $\mathbb{M}_{(i,n),(i,n)}$). Поскольку на любом уровне процесса число возможных фаз равно $1 + n_2 N_2$, то матрицы $\mathbb{L}_{(i,n),(k,l)}$, $\mathbb{M}_{(i,n),(k,l)}$ и $\mathbb{N}_{(i,n),(i,n)}$ являются квадратными размера $1 + n_2 N_2$. Кроме того, поскольку при поступлении заявки в узел фаза обслуживания не изменяется, а при уходе из узла фаза обслуживания может стать только n_1 (при условии, что в узле остается хотя бы одна заявка), то

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{(i,n),(k,l)} &= 0 \text{ при } k \neq i + 1 \text{ или } l \neq n; \\ \mathbb{M}_{(i,n),(k,l)} &= 0 \text{ при } n \neq 1, \text{ или } l \neq n_1, \text{ или } i \geq k. \end{aligned}$$

Для того чтобы выписать вид оставшихся ненулевых матриц, рассмотрим узел i , функционирующий изолированно от системы. Процесс, описывающий общее число заявок в системе и фазу обслуживания, является марковским; обозначим матрицу интенсивностей переходов этого процесса через $\mathbb{Q}^{(i)}$. С помощью обычных рассуждений можно показать, что $\mathbb{Q}^{(i)}$ представима в виде $\mathbb{Q}^{(i)} = \hat{\mathbb{Q}}^{(i)} + \check{\mathbb{Q}}^{(i)}$, где

$$\hat{\mathbb{Q}}^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbb{N}_0^{(i)} & \mathbb{L}_0^{(i)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{N}_1^{(i)} & \mathbb{L}^{(i)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{N}_2^{(i)} & \mathbb{L}^{(i)} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{N}_3^{(i)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbb{L}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbb{N}_{N_i}^{(i)} \end{pmatrix}; \quad \check{\mathbb{Q}}^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbb{M}_{10}^{(i)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{M}_{21}^{(i)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{M}_{31}^{(i)} & \mathbb{M}_{32}^{(i)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \mathbb{M}_{N_i,1}^{(i)} & \mathbb{M}_{N_i,2}^{(i)} & \mathbb{M}_{N_i,3}^{(i)} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

а матрицы $\mathbb{L}_0^{(i)}$, $\mathbb{N}_0^{(i)}$, $\mathbb{L}^{(i)}$, $\mathbb{M}_{kj}^{(i)}$ и $\mathbb{N}_k^{(i)}$ рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^{(i)} &= \lambda_i \mathbb{I}_{n_i}; \quad \mathbb{L}_0^{(i)} = \lambda_i \vec{e}_{i,n_i}; \quad \mathbb{N}_0^{(i)} = -\mathbb{L}_0^{(i)} \vec{1}; \quad \mathbb{M}_{10}^{(i)} = \mu_i \vec{e}_{i,1}; \\ \mathbb{M}_{kj}^{(i)} &= \begin{cases} \mu_i (q_0^{(i)} + Q_j^{(i)}) \mathbb{E}_{1,n_i}^{(i)}, & \text{если } k = j + 1; \\ \mu_i q_{k-j-1}^{(i)} \mathbb{E}_{1,n_i}^{(i)} & \text{иначе,} \end{cases} \\ & \quad 1 \leq j \leq N_i - 1, \quad j + 1 \leq k \leq N_i; \\ \mathbb{N}_1^{(i)} &= -\mathbb{L}^{(i)} - \mu_i \mathbb{E}_{11}^{(i)} + \mathbb{M}^{(i)}, \quad \mathbb{M}^{(i)} = \mu_i \sum_{k=2}^{n_i} (\mathbb{E}_{k,k-1}^{(i)} - \mathbb{E}_{kk}^{(i)}); \\ \mathbb{N}_k^{(i)} &= -\mathbb{L}^{(i)} - \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{M}_{kj}^{(i)} \mathbb{E}_{n_i,1}^{(i)} + \mathbb{M}^{(i)}, \quad 2 \leq k \leq N_i - 1; \\ \mathbb{N}_{N_i}^{(i)} &= - \sum_{j=1}^{N_i-1} \mathbb{M}_{N_i,j}^{(i)} \mathbb{E}_{n_i,1}^{(i)} + \mathbb{M}^{(i)}. \end{aligned}$$

Теперь все готово для того, чтобы выписать вид ненулевых матриц $\mathbb{L}_{(i,n),(k,l)}$, $\mathbb{M}_{(i,n),(k,l)}$ и $\mathbb{N}_{(i,n),(i,n)}$. Пусть $i = 0$, т. е. узел 1 свободен от заявок. Тогда возможны переходы процесса $X(t)$, связанные со сменой фазы (описываемые матрицей $\mathbb{N}_{0,0}$), и переход, переводящий процесс на один уровень выше (описываемый матрицей $\mathbb{L}_{0,(1,n_1)}$). Так как при поступлении заявки в узел 1 фаза обслуживания становится n_1 , а состояние узла 2 не изменяется, то $\mathbb{L}_{0,(1,n_1)} = \lambda_1 \mathbb{I}_{1+n_2 N_2}$. Так как возможные переходы внутри уровня идентичны переходам в узле 2, работающем изолированно, то $\mathbb{N}_{0,0} = \mathbb{Q}^{(2)} - \lambda_1 \mathbb{I}_{1+n_2 N_2}$. Пусть теперь в узле 1 находится одна заявка и фаза обслуживания равна 1. Тогда возможны переходы с текущего уровня на уровни 0 и 2 (описываемые матрицами $\mathbb{M}_{(1,1),0}$ и $\mathbb{L}_{(1,1),(2,1)}$ соответственно), а также внутри уровня (1, 1) (описываемые матрицей $\mathbb{N}_{(1,1),(1,1)}$). Поскольку при переходе на уровень 0 число заявок в узле 2 увеличивается на единицу, только если в его очереди имеется хотя бы одно свободное место, то квадратная матрица $\mathbb{M}_{(1,1),0}$ размера $1 + n_2 N_2$ имеет вид:

$$\mathbb{M}_{(1,1),0} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 \vec{e}_{2,n_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 \mathbb{I}_{n_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mu_1 \mathbb{I}_{n_2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_1 \mathbb{I}_{n_2} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Так как в узле 1 по предположению находится одна заявка, то при поступлении новой заявки фаза обслуживания в узле 1 и состояние узла 2 не изменятся. Поэтому $\mathbb{L}_{(1,1),(2,1)} = \lambda_1 \mathbb{I}_{1+n_2 N_2}$. Возможные переходы внутри уровня идентичны

переходам в узле 2, работающем изолированно, и поэтому $\mathbb{N}_{(1,1),(1,1)} = \mathbb{Q}^{(2)} - (\lambda_1 + \mu_1)\mathbb{I}_{1+n_2N_2}$. Аналогичным образом находятся и все остальные матрицы; в общем случае формулы для их расчета имеют вид¹:

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_{0,0} &= \mathbb{Q}^{(2)} - \lambda_1\mathbb{I}_{1+n_2N_2}, \quad \mathbb{L}_{0,(1,n_1)} = \mathbb{L}_{(i,n),(i+1,n)} = \lambda_1\mathbb{I}_{1+n_2N_2}; \\ \mathbb{M}_{(i,1),(j,n_1)} &= \begin{cases} (q_0^{(1)} + Q_j^{(1)})\mathbb{M}_{(1,1),0}, & \text{если } i = j + 1; \\ q_{i-j-1}^{(1)}\mathbb{M}_{(1,1),0} & \text{иначе,} \end{cases} \\ & \qquad \qquad \qquad 1 \leq j \leq N_1 - 1, j + 1 \leq i \leq N_1; \\ \mathbb{N}_{(1,n),(1,n)} &= \mathbb{Q}^{(2)} - (\lambda_1 + \mu_1)\mathbb{I}_{1+n_2N_2}, \quad 1 \leq n \leq n_1; \\ \mathbb{N}_{(i,n+1),(i,n)} &= \mu_1\mathbb{I}_{1+n_2N_2}, \quad 1 \leq n \leq n_1 - 1, 1 \leq i \leq N_1; \\ \mathbb{N}_{(i,n),(i,n)} &= \mathbb{Q}^{(2)} - \lambda_1\mathbb{I}_{1+n_2N_2} - \sum_{j=1}^{i-1} \text{diag} \left(\mathbb{M}_{(i,n),(j,n_1)} \vec{1} \right), \\ & \qquad \qquad \qquad 1 \leq n \leq n_1, 2 \leq i \leq N_1. \end{aligned}$$

Не выписывая матрицу \mathbb{Q} интенсивностей переходов процесса $X(t)$, сразу запишем СУР²:

$$\vec{p}_0\mathbb{N}_{0,0} + \vec{p}_{1,1}\mathbb{M}_{(1,1),0} = \vec{0}; \quad (2)$$

$$\vec{p}_{1,n}\mathbb{N}_{(1,n),(1,n)} + \vec{p}_{1,n+1}\mathbb{N}_{(1,n+1),(1,n)} = \vec{0}, \quad 1 \leq n \leq n_1 - 1; \quad (3)$$

$$\vec{p}_0\mathbb{L}_{0,(1,n_1)} + \vec{p}_{1,n_1}\mathbb{N}_{(1,n_1),(1,n_1)} + \sum_{i=2}^{N_1} \vec{p}_{i,1}\mathbb{M}_{(i,1),(1,n_1)} = \vec{0}; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_{i-1,n}\mathbb{L}_{(i-1,n),(i,n)} + \vec{p}_{i,n}\mathbb{N}_{(i,n),(i,n)} + \vec{p}_{i,n+1}\mathbb{N}_{(i,n+1),(i,n)} &= \vec{0}, \\ 2 \leq i \leq N_1, 1 \leq n \leq n_1 - 1; & \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_{i-1,n_1}\mathbb{L}_{(i-1,n_1),(i,n_1)} + \vec{p}_{i,n_1}\mathbb{N}_{(i,n_1),(i,n_1)} + \sum_{j=i+1}^{N_1} \vec{p}_{j,1}\mathbb{M}_{(j,1),(i,n_1)} &= \vec{0}, \\ 2 \leq i \leq N_1 - 1; & \quad (6) \end{aligned}$$

$$\vec{p}_{N_1-1,n_1}\mathbb{L}_{(N_1-1,n_1),(N_1,n_1)} + \vec{p}_{N_1,n_1}\mathbb{N}_{(N_1,n_1),(N_1,n_1)} = \vec{0} \quad (7)$$

¹Здесь, как обычно, $\text{diag}(\vec{x})$ обозначает диагональную матрицу, составленную из элементов вектора \vec{x} .

²Для сокращения записи здесь и далее используется соглашение $\sum_{i=0}^{-1} = 0$.

с условием нормировки

$$\vec{p}_0 \vec{1} + \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{n=1}^{n_1} \vec{p}_{i,n} \vec{1} = 1.$$

Структура матрицы \mathbb{Q} позволяет использовать для решения СУР один из множества известных методов расчета стационарного распределения очередей в СМО конечной емкости с распределениями фазового типа и матрицей интенсивностей типа $G/M/1$ (см., например, [12, 13]). Однако матрица $\mathbb{N}_{0,0}$ и матрицы $\mathbb{N}_{(i,n),(i,n)}$ при всех i и n обладают свойством строгого диагонального преобладания и поэтому являются невырожденными¹. Это обстоятельство позволяет упростить решаемую систему уравнений (2)–(7), понизив ее порядок с $(N_1(n_1 - 1) + 1)(1 + n_2 N_2)$ до $N_1(1 + n_2 N_2)$. Вводя обозначение $\mathbb{H}_{i,n} = \mathbb{N}_{(i,n+1),(i,n)} [\mathbb{N}_{(i,n),(i,n)}]^{-1}$, из (2), (7) и (3) находим:

$$\vec{p}_0 = -\vec{p}_{1,1} \mathbb{M}_{(1,1),0} [\mathbb{N}_{0,0}]^{-1}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_{1,n} &= -\vec{p}_{1,n+1} \mathbb{N}_{(1,n+1),(1,n)} [\mathbb{N}_{(1,n),(1,n)}]^{-1} = (-1)^{n_1-n} \vec{p}_{1,n_1} \mathbb{H}_{1,n_1-1} \dots \mathbb{H}_{1,n} = \\ &= \vec{p}_{1,n_1} \prod_{j=n_1-1}^n \mathbb{H}_{1,j} (-1)^{n_1-n}, \quad 1 \leq n \leq n_1 - 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Вводя еще одно обозначение $\mathbb{K}_{i,n} = \mathbb{L}_{(i-1,n),(i,n)} [\mathbb{N}_{(i,n),(i,n)}]^{-1}$, из (5) получаем путем последовательных итераций соотношение:

$$\begin{aligned} \vec{p}_{i,n} &= -\vec{p}_{i-1,n} \mathbb{K}_{i,n} - \vec{p}_{i,n+1} \mathbb{H}_{i,n} = \vec{p}_{i,n_1} \prod_{j=n_1-1}^n \mathbb{H}_{i,j} (-1)^{n_1-n} - \vec{p}_{i-1,n} \mathbb{K}_{i,n} - \\ &- \sum_{j=n+1}^{n_1-1} \vec{p}_{i-1,j} \mathbb{K}_{i,j} \prod_{m=j-1}^n \mathbb{H}_{i,m} (-1)^{n_1-j}, \quad 1 \leq n \leq n_1 - 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, вместо исходной системы уравнений (2)–(7) достаточно рассмотреть систему уравнений (4), (6) и (7), в которой вместо векторов вероятностей \vec{p}_0 и $\vec{p}_{i,1}$ подставлены их представления из (8)–(10). Для решения системы (4), (6) и (7) удобно использовать метод исключения состояний (см.,

¹Невырожденность указанных матриц можно обосновать и по-другому (см., например, [14]). Матрица $\mathbb{Q}^{(2)}$ является матрицей интенсивностей переходов однородного марковского процесса и, следовательно, полуустойчива. Собственные числа матрицы $\mathbb{N}_{(i,n),(i,n)}$ являются суммой собственных чисел полуустойчивой матрицы $\mathbb{Q}^{(2)}$ и устойчивой матрицы $-\lambda_1 \mathbb{I}_{1+n_2 N_2} - \sum_{j=1}^{i-1} \text{diag}(\mathbb{M}_{(i,n),(j,n_1)} \vec{1})$. Поэтому матрица $\mathbb{N}_{(i,n),(i,n)}$ устойчива и, в частности, невырождена. Эти же рассуждения применимы и для матрицы $\mathbb{N}_{0,0}$.

например, [15, разд. 2] и [13, 16]). После получения решения необходимо посчитать оставшиеся неизвестными вероятности по формулам (8)–(10) и осуществить перенормировку.

Зная совместное стационарное распределение, можно уже определить некоторые стационарные вероятностные характеристики, связанные с числом заявок в узлах системы. В частности, средние числа $N^{(1)}$ и $N^{(2)}$ заявок соответственно в узле 1 и узле 2 равны:

$$N^{(1)} = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{n=1}^{n_1} i \vec{p}_{i,n} \vec{1}; \quad N^{(2)} = \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{m=1}^{n_2} j p_{0,j,m} + \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{n=1}^{n_1} \sum_{m=1}^{n_2} j p_{i,n,j,m}.$$

Сложнее обстоит дело со стационарными характеристиками, связанными с потерями заявок, нахождению которых посвящен следующий раздел.

4 Стационарные вероятности потерь

Обозначим через $\pi^{(i)}$ стационарную вероятность того, что принятая в узел i заявка i -го потока будет потеряна. Нахождение $\pi^{(i)}$ связано с определенными трудностями, которые вызваны двумя обстоятельствами. Первое — из-за использования в узлах механизма обновления принятые в узел заявки могут покидать очереди необслуженными. Второе — на вероятность потери выделенной заявки влияет не только число заявок в узлах, которые она застала при поступлении, но также и возможные последующие поступления до момента, когда выделенная заявка заняла прибор узла 2.

Заметим, что принятая в узел 1 заявка может быть потеряна либо во время ожидания начала обслуживания в узле 1, либо при переходе в узел 2, либо пребывая в очереди узла 2. Поэтому вместо $\pi^{(1)}$ удобнее искать дополнительную к ней вероятность того, что принятая в узел 1 заявка будет обслужена в узле 1 и в узле 2.

Всюду в дальнейшем для сокращения записи будем говорить, что если в узле i находится n заявок и фаза обслуживания равна m и $l = (n - 1)n_i + m$, то он находится в состоянии l . Очевидно, что $1 \leq l \leq 1 + n_i N_i$. Определим следующие матрицы: $\mathbb{P}_n(j, i, m)$, $j \geq 0$, $i \geq 1$, $0 \leq i + j \leq N_1$, $1 \leq m \leq n_1$, $0 \leq n \leq N_1 - 1$, — матрица, элемент $[\mathbb{P}_n(j, i, m)]_{kl}$, $1 \leq k, l \leq 1 + n_2 N_2$, которой представляет собой условную вероятность того, что выделенная заявка будет обслужена в узле 1, попадет в очередь узла 2 и в момент перехода в узел 2 она окажется в состоянии l , в узле 1 останется n других заявок, при условии, что перед¹ выделенной заявкой находится $i - 1$ других заявок, фаза обслуживания заявки на приборе равна m , за выделенной заявкой в очереди находится j заявок, а узел 2 находится в состоянии k .

¹Случай $i = 1$ означает, что выделенная заявка находится на приборе.

Матрицы $\mathbb{P}_n(j, i, m)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям, для выписывания которых необходимо предварительно найти матрицу вероятностей переходов процесса $X(t)$. Для этого воспользуемся вложенной цепью Маркова, порожденной моментами изменений состояний узла 1 или узла 2. Предположим, что процесс $X(t)$ находится на уровне (i, n) , т. е. в узле 1 находятся i , $1 \leq i \leq N_1$, заявок и фаза обслуживания равна n . Матрица $\mathbb{N}_{(i,n),(i,n)}^*$ переходных вероятностей вложенной цепи Маркова, связанных с поступлением новой заявки и окончанием обслуживания в узле 2, состоит из элементов:

$$[\mathbb{N}_{(i,n),(i,n)}^*]_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{если } k = l; \\ \frac{[\mathbb{N}_{(i,n),(i,n)}]_{kl}}{-[\mathbb{N}_{(i,n),(i,n)}]_{kk}} & \text{иначе,} \end{cases} \quad 1 \leq k, l \leq 1 + n_2 N_2.$$

Элементы матриц $\mathbb{N}_{(i,n),(i,n-1)}^*$ и $\mathbb{L}_{(i+1,n),(i,n)}^*$ вероятностей переходов вложенной цепи Маркова, связанных с изменением фазы обслуживания и поступлением новой заявки в узел 1, рассчитываются по формулам:

$$[\mathbb{N}_{(i,n),(i,n-1)}^*]_{kl} = \frac{[\mathbb{N}_{(i,n),(i,n-1)}]_{kl}}{-[\mathbb{N}_{(i,n),(i,n-1)}]_{kk}}; \quad [\mathbb{L}_{(i+1,n),(i,n)}^*]_{kl} = \frac{[\mathbb{L}_{(i+1,n),(i,n)}]_{kl}}{-[\mathbb{N}_{(i,n),(i,n)}]_{kk}},$$

$$1 \leq k, l \leq 1 + n_2 N_2.$$

Наконец, при $n = 1$ необходимо дополнительно рассчитать матрицы $\mathbb{M}_{(i,1),(j,n_1)}^*$, $1 \leq j \leq i - 1$, переходных вероятностей вложенной цепи Маркова, связанные с окончанием обслуживания заявки в узле 1. Их элементы имеют вид:

$$[\mathbb{M}_{(i,1),(j,n_1)}^*]_{kl} = \frac{[\mathbb{M}_{(i,1),(j,n_1)}]_{kl}}{-[\mathbb{N}_{(i,1),(i,1)}]_{kk}}, \quad 1 \leq j \leq i - 1, \quad 1 \leq k, l \leq 1 + n_2 N_2. \quad (11)$$

Аналогичным образом определяются и переходные матрицы $\mathbb{N}_{(0,0)}^*$, $\mathbb{L}_{0,(1,n_1)}^*$ и $\mathbb{M}_{(1,1),0}^*$.

Заметим, что выделенная заявка в момент окончания обслуживания в узле 1 может застать очередь в узле 2 полностью заполненной и, значит, будет потеряна. Учитывая (1), вероятности таких переходов задаются элементами $[\mathbb{M}_{(i,1),(j,n_1)}^*]_{kl}$ и $[\mathbb{M}_{(1,1),0}^*]_{kl}$ при $N_2(n_2 - 1) + 1 \leq k, l \leq 1 + n_2 N_2$, и, значит, при расчете вероятности $1 - \pi^{(1)}$ необходимо положить для $1 \leq j \leq N_1 - 1$, $j + 1 \leq i \leq N_1$:

$$[\mathbb{M}_{(1,1),0}^*]_{kl} = [\mathbb{M}_{(i,1),(j,n_1)}^*]_{kl} = 0; \quad N_2(n_2 - 1) + 1 \leq k, l \leq 1 + n_2 N_2. \quad (12)$$

При расчете же стационарной вероятности того, что принятая в узел 1 заявка не будет потеряна при ожидании в узле 1, но будет потеряна при поступлении в узел 2, необходимо положить для $1 \leq j \leq N_1 - 1$, $j + 1 \leq i \leq N_1$:

$$\left[\mathbb{M}_{(1,1),0}^* \right]_{kl} = \left[\mathbb{M}_{(i,1),(j,n_1)}^* \right]_{kl} = 0, \quad 1 \leq k, l \leq N_2 (n_2 - 1).$$

Воспользовавшись теперь формулой полной вероятности, получаем следующие рекуррентные соотношения для расчета матриц $\mathbb{P}_n(j, i, m)$:

$$\mathbb{P}_n(j, i, m) = \mathbb{N}_{(i+j,m),(i+j,m-1)}^* \mathbb{P}_n(j, i, m - 1) + \mathbb{N}_{(i+j,m),(i+j,m)}^* \mathbb{P}_n(j, i, m) + \\ + \mathbf{1}_{(j < n)} \mathbb{L}_{(i+j,m),(i+j+1,m)}^* \mathbb{P}_n(j + 1, i, m), \quad 1 \leq i \leq N_1, \quad 0 \leq j \leq n, \quad 2 \leq m \leq n_1;$$

$$\mathbb{P}_n(j, i, 1) = \\ = \sum_{k=j+1}^{i+j-1} \mathbb{M}_{(i+j,1),(k,n_1)}^* \mathbb{P}_n(j, i - (i + j - k), n_1) + \mathbb{N}_{(i+j,1),(i+j,1)}^* \mathbb{P}_n(j, i, 1) + \\ + \mathbf{1}_{(j < n)} \mathbb{L}_{(i+j,1),(i+j+1,1)}^* \mathbb{P}_n(j + 1, i, 1), \quad 2 \leq i \leq N_1, \quad 0 \leq j \leq n;$$

$$\mathbb{P}_n(j, 1, 1) = \begin{cases} \mathbf{1}_{(j=n)} \mathbb{M}_{(j+1,1),(j,n_1)}^* + \mathbb{N}_{(j+1,1),(j+1,1)}^* \mathbb{P}_n(j, 1, 1) + \\ + \mathbf{1}_{(j < n)} \mathbb{L}_{(i+j,1),(i+j+1,1)}^* \mathbb{P}_n(j + 1, 1, 1), & \text{если } 0 \leq j \leq n, n > 0; \\ \mathbb{M}_{(1,1),0}^* + \mathbb{N}_{(1,1),(1,1)}^* \mathbb{P}_0(0, 1, 1), & \text{если } j = n = 0; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Напомним, что $\mathbf{1}_{(A)}$ обозначает индикатор множества A . Заметим, что матрицы $\mathbb{I} - \mathbb{N}_{(i,m),(i,m)}^*$ при любых i и m обладают свойством строгого диагонального преобладания и поэтому являются невырожденными. Таким образом, матрицы $\mathbb{P}_0(0, i, m)$ рассчитываются последовательно, начиная с $\mathbb{P}_0(0, 1, 1)$, по формулам:

$$\mathbb{P}_0(0, i, m) = \left(\mathbb{I}_{1+n_2N_2} - \mathbb{N}_{(i,m),(i,m)}^* \right)^{-1} \mathbb{N}_{(i,m),(i,m-1)}^* \mathbb{P}_0(0, i, m - 1), \\ 1 \leq i \leq N_1, \quad 2 \leq m \leq n_1; \quad (13)$$

$$\mathbb{P}_0(0, i, 1) = \left(\mathbb{I}_{1+n_2N_2} - \mathbb{N}_{(i,1),(i,1)}^* \right)^{-1} \sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{M}_{(i,1),(k,n_1)}^* \mathbb{P}_0(0, k, n_1), \\ 2 \leq i \leq N_1; \quad (14)$$

$$\mathbb{P}_0(0, 1, 1) = \left(\mathbb{I}_{1+n_2N_2} - \mathbb{N}_{(1,1),(1,1)}^* \right)^{-1} \mathbb{M}_{(1,1),0}^*. \quad (15)$$

Аналогичным образом могут быть преобразованы соотношения для расчета матриц $\mathbb{P}_n(j, i, m)$ при $1 \leq n \leq N_1 - 1$. Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n(j, i, m) &= \\ &= \left(\mathbb{I}_{1+n_2N_2} - \mathbb{N}_{(i+j,m),(i+j,m)}^* \right)^{-1} \left(\mathbb{N}_{(i+j,m),(i+j,m-1)}^* \mathbb{P}_n(j, i, m-1) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{1}_{(j < n)} \mathbb{L}_{(i+j,m),(i+j+1,m)}^* \mathbb{P}_n(j+1, i, m) \right), \\ &\quad 1 \leq i \leq N_1, 0 \leq j \leq n, 2 \leq m \leq n_1; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n(j, i, 1) &= \\ &= \left(\mathbb{I}_{1+n_2N_2} - \mathbb{N}_{(i+j,1),(i+j,1)}^* \right)^{-1} \left(\sum_{k=j+1}^{i+j-1} \mathbb{M}_{(i+j,1),(k,n_1)}^* \mathbb{P}_n(j, k-j, n_1) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{1}_{(j < n)} \mathbb{L}_{(i+j,1),(i+j+1,1)}^* \mathbb{P}_n(j+1, i, 1) \right), \quad 2 \leq i \leq N_1, 0 \leq j \leq n, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n(j, 1, 1) &= \left(\mathbb{I}_{1+n_2N_2} - \mathbb{N}_{(j+1,1),(j+1,1)}^* \right)^{-1} \left(\mathbf{1}_{(j=n)} \mathbb{M}_{(j+1,1),(j,n_1)}^* + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{1}_{(j < n)} \mathbb{L}_{(i+j,1),(i+j+1,1)}^* \mathbb{P}_n(j+1, i, 1) \right), \quad 0 \leq j \leq n. \end{aligned} \quad (18)$$

Псевдокод общего алгоритма расчета матриц $\mathbb{P}_n(j, i, m)$:

```

for  $1 \leq i \leq N_1$ 
    Рассчитать  $\mathbb{P}_0(0, i, 1)$  по (14) и (15)
    for  $2 \leq m \leq n_1$ 
        Рассчитать  $\mathbb{P}_0(0, i, m)$  по (13)
    end for
end for
for  $1 \leq n \leq N_1 - 1$ 
    for  $1 \leq i \leq N_1$ 
         $j = n$ 
        while  $j \geq 0$ 
            Рассчитать  $\mathbb{P}_n(j, i, 1)$  по (17) и (18)
            for  $2 \leq m \leq n_1$ 
                Рассчитать  $\mathbb{P}_n(j, i, m)$  по (16)
            end for
             $j = j - 1$ 
        end while
    end for
end for

```

Рассчитав $\mathbb{P}_n(j, i, m)$ при условии (11), можно найти вероятность того, что заявка первого потока не будет потеряна в узле 1 (ни при поступлении, ни при ожидании обслуживания) и попадет в очередь узла 2:

$$\sum_{n=0}^{N_1-1} \vec{p}_0 \mathbb{P}_n(0, 1, n_1) \vec{1} + \sum_{m=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{n=0}^{N_1-1} \vec{p}_{mj} \mathbb{P}_n(0, m, j) \vec{1}. \quad (19)$$

По этой же формуле, но с учетом замены условия (11) на (12), рассчитывается и вероятность того, что заявка первого потока не будет потеряна в узле 1, но будет потеряна на входе в узел 2. В сумме эти две вероятности дают вероятность $1 - \pi_1^{(1)}$ того, что заявка первого потока не будет потеряна в узле 1.

Введем векторы $\vec{p}_{i,n}^*$, $1 \leq i \leq N_1 - 1$, $1 \leq n \leq n_1$, и \vec{p}_0^* . Элемент $[\vec{p}_{i,n}^*]_l$, $1 \leq l \leq 1 + n_2 N_2$, есть безусловная вероятность того, что не потерянная в узле 1 заявка поступит в очередь узла 2 и в момент ее перехода в узел 2 его состояние будет l , а в узле 1 будет находиться i других заявок и фаза обслуживания n (при $i \geq 1$); аналогично определяется и элемент $[\vec{p}_0^*]_l$. Имеем:

$$\begin{aligned} \vec{p}_0^* &= \vec{p}_0 \mathbb{P}_0(0, 1, n_1) + \sum_{m=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{n_1} \vec{p}_{ij} \mathbb{P}_0(0, m + 1, j); \\ \vec{p}_{i,n}^* &= \begin{cases} \vec{p}_0 \mathbb{P}_i(0, 1, n_1) + \sum_{m=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{n_1} \vec{p}_{mj} \mathbb{P}_i(0, m + 1, j), & n = n_1; \\ \vec{0}, & 1 \leq n \leq n_1 - 1, \\ & 1 \leq i \leq N_1 - 1; \end{cases} \\ \vec{p}_{N_1,n}^* &= \vec{0}, \quad 1 \leq n \leq n_1. \end{aligned}$$

Заявка первого потока, обслуживание которой только что закончилось в узле 1, поступает в узел 2 и может застать в нем не более N_2 заявок, и при этом каждому состоянию узла 2 соответствует одно из $1 + n_1 N_1$ состояний узла 1. Введем векторы $\vec{p}_{j,m}^+$, $1 \leq j \leq N_2$, $1 \leq m \leq n_2$, и \vec{p}_0^+ . Элемент $[\vec{p}_{j,m}^+]_l$, $1 \leq l \leq 1 + n_2 N_2$, есть безусловная вероятность того, что не потерянная в узле 1 заявка поступит в очередь узла 2 и в момент ее перехода в узел 2 будет j других заявок и фаза обслуживания m (при $j \geq 1$), а узел 1 будет находиться в состоянии l , $1 \leq l \leq 1 + n_1 N_1$; аналогично определяется и элемент $[\vec{p}_0^+]_l$. Искомые векторы могут быть составлены из элементов векторов $\vec{p}_{i,n}^*$, найденных выше, и имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{p}_0^+ &= ([\vec{p}_0^*]_1, [\vec{p}_{1,1}^*]_1, \dots, [\vec{p}_{1,n_1}^*]_1, \dots, [\vec{p}_{N_1-1,1}^*]_1, \dots \\ &\quad \dots, [\vec{p}_{N_1-1,n_1}^*]_1, [\vec{p}_{N_1,1}^*]_1, \dots, [\vec{p}_{N_1,n_1}^*]_1); \end{aligned}$$

$$\vec{p}_{j,m}^+ = ([\vec{p}_0^*]_{1+m+(j-1)n_2}, [\vec{p}_{1,1}^*]_{1+m+(j-1)n_2}, \dots, [\vec{p}_{1,n_1}^*]_{1+m+(j-1)n_2}, \dots, [\vec{p}_{N_1-1,1}^*]_{1+m+(j-1)n_2}, \dots, [\vec{p}_{N_1-1,n_1}^*]_{1+m+(j-1)n_2}, [\vec{p}_{N_1,1}^*]_{1+m+(j-1)n_2}, \dots, [\vec{p}_{N_1,n_1}^*]_{1+m+(j-1)n_2}).$$

Для нахождения вероятности того, что принятая в узел 2 заявка не будет потеряна, необходимо действовать таким же образом, как и при нахождении вероятности потери принятой заявки в узле 1 (см. (19)). Другими словами, необходимо найти матрицы $\tilde{\mathbb{P}}_n(j, i, m)$, $j \geq 0, i \geq 1, 0 \leq i + j \leq N_2, 1 \leq m \leq n_2, 0 \leq n \leq N_2 - 1$, элемент $[\tilde{\mathbb{P}}_n(j, i, m)]_{kl}, 1 \leq k, l \leq 1 + n_1 N_1$, которых представляет собой условную вероятность того, что принятая в узел 2 заявка будет обслужена и в момент окончания обслуживания узел 1 окажется в состоянии l , в узле 2 останется n других заявок, при условии что перед выделенной заявкой в узле 2 находится $i - 1$ других заявок, фаза обслуживания заявки на приборе равна m , за выделенной заявкой в очереди находится j заявок, а узел 1 находится в состоянии k .

Поскольку обслуженные заявки в узле 1 поступают в узел 2, то для расчета матриц $\tilde{\mathbb{P}}_n(j, i, m)$ необходимо предварительно изменить матрицы интенсивностей переходов. Новые матрицы интенсивностей (снабженные сверху символом тильда) имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{N}}_{0,0} &= \hat{\mathbb{Q}}^{(1)} - \lambda_2 \mathbb{I}_{n_1 N_1 + 1} - \text{diag} \left(\check{\mathbb{Q}}^{(1)} \vec{\mathbb{I}} \right); \\ \tilde{\mathbb{L}}_{(i,n),(j,m)} &= \lambda_2 \mathbb{I}_{n_1 N_1 + 1} + \check{\mathbb{Q}}^{(1)}; \\ \tilde{\mathbb{M}}_{(1,1),0} &= \mu_2 \mathbb{I}_{n_1 N_1 + 1}; \\ \tilde{\mathbb{M}}_{(i,1),(j,n_1)} &= \begin{cases} (q_0^{(2)} + Q_j^{(2)}) \tilde{\mathbb{M}}_{(1,1),0}, & \text{если } i = j + 1; \\ q_{i-j-1}^{(2)} \tilde{\mathbb{M}}_{(1,1),0} & \text{иначе,} \end{cases} \\ & \qquad \qquad \qquad 1 \leq j \leq N_2 - 1, j + 1 \leq i \leq N_2; \\ \tilde{\mathbb{N}}_{(1,n),(1,n)} &= \hat{\mathbb{Q}}^{(1)} - (\lambda_2 + \mu_2) \mathbb{I}_{n_1 N_1 + 1} - \text{diag} \left(\check{\mathbb{Q}}^{(1)} \vec{\mathbb{I}} \right), \quad 1 \leq n \leq n_2; \\ \tilde{\mathbb{N}}_{(i,n+1),(i,n)} &= \mu_2 \mathbb{I}_{n_1 N_1 + 1}, \quad 1 \leq n \leq n_2 - 1, 1 \leq i \leq N_2; \\ \tilde{\mathbb{N}}_{(i,1),(i,1)} &= \hat{\mathbb{Q}}^{(1)} - \lambda_2 \mathbb{I}_{n_1 N_1 + 1} - \text{diag} \left(\check{\mathbb{Q}}^{(1)} \vec{\mathbb{I}} \right) - \sum_{j=1}^{i-1} \text{diag} \left(\tilde{\mathbb{M}}_{(i,1),(j,n_1)} \vec{\mathbb{I}} \right), \\ & \qquad \qquad \qquad 2 \leq i \leq N_2. \end{aligned}$$

Переходя от этих новых матриц интенсивностей к матрицам вероятностей по аналогии с тем, как это было сделано выше, и воспользовавшись псевдокодом алгоритма (см. с. 24), заменяя в нем n_1 и N_1 соответственно на n_2 и N_2 ,

рассчитываются матрицы $\tilde{\mathbb{P}}_n(j, i, m)$. Замечая, что заявка первого потока, поступившая в узел 2 и заставшая его свободным от заявок (что происходит с вероятностью $\vec{p}_0^+ \vec{1}$) не будет потеряна, получаем по формуле полной вероятности окончательное выражение для вероятности потери заявки первого потока:

$$1 - \pi^{(1)} = \vec{p}_0^+ \vec{1} + \sum_{j=1}^{N_2-1} \sum_{m=1}^{n_2} \sum_{n=0}^{N_2-1} \vec{p}_{j,m}^+ \tilde{\mathbb{P}}_n(0, j+1, m) \vec{1}. \quad (20)$$

Эта же формула может быть использована для нахождения вероятности потери заявки второго потока. Однако в этом случае векторы \vec{p}_0^+ и $\vec{p}_{j,m}^+$ необходимо изменить, поскольку заявка второго потока поступает и обслуживается только в узле 2. Так как по свойству PASTA (Poisson Arrival See Time Average) пуассоновского потока в стационарном режиме поступающая заявка застает систему в состоянии $x \in \mathcal{X}$ с вероятностью p_x , то при использовании (20) для расчета $\pi^{(2)}$ векторы \vec{p}_0^+ и $\vec{p}_{j,m}^+$ необходимо задать следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{p}_0^+ &= (p_{0,0}, p_{1,1,0}, \dots, p_{1,n_1,0}, p_{2,1,0}, \dots, p_{2,n_1,0}, \dots, p_{N_1,1,0}, \dots, p_{N_1,n_1,0}); \\ \vec{p}_{j,m}^+ &= (p_{0,j,m}, p_{1,j,m}, \dots, p_{1,n_1,j,m}, p_{2,1,j,m}, \dots, p_{2,n_1,j,m}, \dots \\ &\quad \dots, p_{N_1,1,j,m}, \dots, p_{N_1,n_1,j,m}), \quad 1 \leq j \leq N_2, \quad 1 \leq m \leq n_2. \end{aligned}$$

5 Заключение

Заметим, что предложенные рассуждения для составления СУР, оказавшиеся удобными для двухузловой системы, обобщаются естественным образом и на n -узловые системы. Но с добавлением каждого узла проблема размерности встает все острее. По-видимому, для n -узловых систем ($n \geq 3$) такое прямое обобщение не может привести к пригодным для расчетов результатам. Дальнейшие исследования могут быть направлены на поиск и разработку более эффективных методов расчета стационарных показателей качества СМО с обобщенным обновлением, что может потребовать введения дополнительных условий на режим функционирования узлов (например, режим высокой загрузки).

Скажем несколько слов о расчете временных характеристик поступающих в систему заявок. В связи с наличием в узлах механизма обновления для расчета распределения времени пребывания заявки в системе стандартные методы расчета времени до поглощения в цепи Маркова с конечным числом состояний малоприспособлены. В принципе, воспользовавшись результатами разд. 4, эти распределения могут быть найдены в терминах преобразования Лапласа–Стилтьеса, так как времена между переходами вложенной цепи Маркова имеют экспоненциальное распределение (хоть и с разными параметрами). Справедливости ради необходимо отметить, что из (13)–(18) видно, что даже для двухузловой системы

этот подход представляет собой скорее теоретический интерес. Но некоторым выходом из положения служит формула Литтла. Наконец, отметим, что для более подробного сравнения механизма обновления с другими известными механизмами активного управления очередями необходимо уметь вычислять и ряд других, специальных показателей качества, как, например, моменты числа последовательных потерь. Эта задача, требующая отдельного исследования, также представляет несомненный интерес.

Литература

1. Chydzinski A., Chrost L. Analysis of AQM queues with queue size based packet dropping // Int. J. Appl. Math. Comp., 2011. Vol. 21. Iss. 3. P. 567–577. doi: 10.2478/v10006-011-0045-7.
2. Zaryadov I. S., Razumchik R. V., Milovanova T. A. Stationary waiting time distribution in $G/M/n/r$ with random renovation policy // Comm. Com. Inf. Sc., 2016. Vol. 678. P. 418–429. doi: 10.1007/978-3-319-51917-3_31.
3. Chydzinski A., Mrozowski P. Queues with dropping functions and general arrival processes // PLoS ONE, 2016. Vol. 11. Iss. 3. Art. ID: e0150702. doi: 10.1371/journal.pone.0150702.
4. Kononov M., Razumchik R. Comparison of two active queue management schemes through the $M/D/1/N$ queue // Информатика и её применения, 2018. Т. 12. Вып. 4. С. 9–15. doi: 10.14357/19922264180402.
5. Zaryadov I., Bogdanova E., Milovanova T., Matushenko S., Pyatkina D. Stationary characteristics of the $GI/M/1$ queue with general renovation and feedback // 10th Congress (International) on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops. — IEEE, 2018. P. 1–6. doi: 10.1109/icumt.2018.8631244.
6. Kononov M. G., Razumchik R. V. Numerical analysis of improved access restriction algorithms in a $GI/G/1/N$ system // J. Commun. Technol. El., 2018. Vol. 63. Iss. 6. P. 616–625. doi: 10.1134/S1064226918060141.
7. Зарядов И. С., Мейханаджян Л. А., Милованова Т. А. Стационарные характеристики обслуживания в системе $GI/MSP/n/\infty$ с обобщенным обновлением // Системы и средства информатики, 2019. Т. 29. № 4. С. 50–64. doi: 10.14357/08696527190405.
8. Hilquias V. C. C., Zaryadov I. S., Tsurlukov V. V., Milovanova T. A., Bogdanova E. V., Korolkova A. V., Kulyabov D. S. The general renovation as the active queue management mechanism. Some aspects and results // Comm. Com. Inf. Sc., 2019. Vol. 1141. P. 488–502. doi: 10.1007/978-3-030-36625-4_39.
9. Зарядов И. С. Система массового обслуживания $GI/M/n/\infty$ с обобщенным обновлением // Автоматика и телемеханика, 2010. № 4. С. 130–139.
10. Zhu Y. Markovian queueing networks in a random environment // Oper. Res. Lett., 1994. Vol. 15. Iss. 1. P. 11–17. doi: 10.1016/0167-6377(94)90009-4.
11. Economou A. Generalized product-form stationary distributions for Markov chains in random environment with queueing application // Adv. Appl. Probab., 2005. Vol. 37. Iss. 1. P. 185–211. doi: 10.1239/aap/1113402405.

12. Вишнеvский В. М., Дудин А. Н., Клименок В. И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. — М.: Техносфера, 2018. 564 с.
13. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория массового обслуживания. — М.: РУДН, 1995. 529 с.
14. Бочаров П. П. О системе массового обслуживания ограниченной емкости с распределениями фазового типа, зависящими от состояния очереди // Автоматика и телемеханика, 1985. № 10. С. 31–38.
15. Бочаров П. П., Д’Аниче Ч., Печинкин А. В., Салерно С. Стационарные характеристики системы массового обслуживания $G/MSP/1/r$ // Автоматика и телемеханика, 2003. № 2. С. 127–142. doi: 10.1023/A:1022219232282.
16. Печинкин А. В., Разумчик Р. В. Системы массового обслуживания в дискретном времени. — М.: Физматлит, 2018. 432 с.

Поступила в редакцию 11.08.20

STATIONARY CHARACTERISTICS OF THE TWO-NODE MARKOVIAN TANDEM QUEUEING SYSTEM WITH GENERAL RENOVATION

L. A. Meykhanadzhyan¹, I. S. Zaryadov^{2,3}, and T. A. Milovanova²

¹Department of Data Analysis and Machine Learning, Financial University under the Government of the Russian Federation, 49 Leningradsky Prosp., Moscow 125993, Russian Federation

²Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation

³Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation

Abstract: Consideration is given to the Markovian tandem queueing system with two finite-capacity heterogeneous nodes, say node 1 and node 2. The output of node 1 is the input into node 2. Each node is a single-server queue with a Poisson incoming flow of customers and service times having Erlang distribution. The service discipline is FIFO (first in, first out). General renovation is implemented in each node which implies that upon a service completion, a customer may remove a random number of customers from the queue (if any is available), with a given probability distribution; removed customers leave the system. Using the matrix-geometric technique, one derives the joint stationary distribution of the nodes’ states. A recursive algorithm for computation of the stationary loss probabilities under the head-of-the-queue renovation is also proposed.

Keywords: queueing system; tandem; general renovation; queue management

DOI: 10.14357/08696527200302

Acknowledgments

The reported study was funded by RFBR, project number 19-07-00739.

References

1. Chydzinski, A., and L. Chrost. 2011. Analysis of AQM queues with queue size based packet dropping. *Int. J. Appl. Math. Comp.* 21(3):567–577. doi: 10.2478/v10006-011-0045-7.
2. Zaryadov, I. S., R. V. Razumchik, and T. A. Milovanova. 2016. Stationary waiting time distribution in $G/M/n/r$ with random renovation policy. *Comm. Com. Inf. Sc.* 678:418–429. doi: 10.1007/978-3-319-51917-3_31.
3. Chydzinski, A., and P. Mrozowski. 2016. Queues with dropping functions and general arrival processes. *PLoS ONE* 11(3):e0150702. doi: 10.1371/journal.pone.0150702.
4. Konovalov, M., and R. Razumchik. 2018. Comparison of two active queue management schemes through the $M/D/1/N$ queue. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 12(4): 9–15. doi: 10.14357/19922264180402.
5. Zaryadov, I., E. Bogdanova, T. Milovanova, S. Matushenko, and D. Pyatkina. 2018. Stationary characteristics of the $GI/M/1$ queue with general renovation and feedback. *10th Congress (International) on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops.* IEEE. 1–6. doi: 10.1109/icumt.2018.8631244.
6. Konovalov, M. G., and R. V. Razumchik. 2018. Numerical analysis of improved access restriction algorithms in a $GI/G/1/N$ system. *J. Commun. Technol. El.* 63(6):616–625. doi: 10.1134/S1064226918060141.
7. Zaryadov, I. S., L. A. Meykhanadzhyan, and T. A. Milovanova. 2019. Stacionarnye kharakteristiki obsluzhivaniya v sisteme $GI/MSP/n/\infty$ s obobshchennym obnoveniem [Stationary characteristics of the $GI/MSP/n/\infty$ queue with general renovation]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 29(4):50–64. doi: 10.14357/08696527190405.
8. Hilquias, V. C. C., I. S. Zaryadov, V. V. Tsurlukov, T. A. Milovanova, E. V. Bogdanova, A. V. Korolkova, and D. S. Kulyabov. 2019. The general renovation as the active queue management mechanism. Some aspects and results. *Comm. Com. Inf. Sc.* 1141:488–502. doi: 10.1007/978-3-030-36625-4_39.
9. Zaryadov, I. S. 2010. The $GI/M/n/\infty$ queuing system with generalized renovation. *Automat. Rem. Contr.* 71(4):663–671. doi: 10.1134/S0005117910040077.
10. Zhu, Y. 1994. Markovian queueing networks in a random environment. *Oper. Res. Lett.* 15(1):11–17. doi: 10.1016/0167-6377(94)90009-4.
11. Economou, A. 2005. Generalized product-form stationary distributions for Markov chains in random environment with queueing application. *Adv. Appl. Probab.* 37(1):185–211. doi: 10.1239/aap/1113402405.
12. Vishnevskii, V. M., A. N. Dudin, and V. I. Klimenok. 2018. *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami. Teoriya i primeneniye v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic systems with correlated streams. Theory and applications in telecommunication networks]. Moscow: Tekhnosfera. 564 p.
13. Bocharov, P. P., and A. V. Pechinkin. 1995. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing theory]. Moscow: RUDN. 529 p.

14. Bocharov, P. P. 1985. A queueing system of limited capacity with distributions of phase type depending on the queue state. *Automat. Rem. Contr.* 46:1229–1236.
15. Bocharov, P. P., C. D'Apice, A. V. Pechinkin, and S. Salerno. 2003. The stationary characteristics of the $G/MSP/1/r$ queueing system. *Automat. Rem. Contr.* 64(2):288–301. doi: 10.1023/A:1022219232282.
16. Pechinkin, A. V., and R. V. Razumchik. 2018. *Sistemy massovogo obsluzhivaniya v diskretnom vremeni* [Discrete time queueing systems]. Moscow: Fizmatlit. 432 p.

Received August 11, 2020

Contributors

Meykhanadzhyan Lusine A. (b. 1990) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Data Analysis and Machine Learning, Financial University under the Government of the Russian Federation, 49 Leningradsky Prosp., Moscow 125993, Russian Federation; lamejkhanadzhyan@fa.ru

Zaryadov Ivan S. (b. 1981) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Applied Informatics and Probability Theory, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; izaryadov@sci.pfu.edu.ru

Milovanova Tatiana A. (b. 1977) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, senior lecturer, Department of Applied Informatics and Probability Theory, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; tmilovanova77@mail.ru