И. С. Зарядов, Л. А. Мейханаджян, Т. А. Милованова, Стационарные характеристики обслуживания в системе GI/MSP/n/∞ с обобщенным обновлением, *Системы и средства информ.*, 2019, том 29, выпуск 4, 50–64

DOI: 10.14357/08696527190405

СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБСЛУЖИВАНИЯ В СИСТЕМЕ GI/MSP/n/∞ С ОБОБЩЕННЫМ ОБНОВЛЕНИЕМ*

***И. С. Зарядов*[1], *Л. А. Мейханаджян*[2], *Т. А. Милованова*[3]**

Аннотация: Рассматривается система обслуживания GI/MSP/n/∞ с рекуррентным входящим потоком, n идентичными приборами, обслуживанием марковского типа, очередью неограниченной емкости и обобщенным обновлением. Обобщенное обновление, являющееся разновидностью механизма активного управления очередью, предполагает, что в момент окончания обслуживания покидающая систему заявка может удалить из очереди некоторое случайное число ожидающих заявок с заданным вероятностным распределением. С помощью метода вложенной цепи Маркова найдены стационарные распределения основных показателей функционирования системы. Полученные соотношения дают возможность написания программ расчета, позволяющих вычислить как стационарные вероятности числа заявок в системе по моментам поступления заявок и по времени, так и стационарное распределение времени ожидания начала обслуживания (при прямом порядке обслуживания и обновления).

Ключевые слова: система массового обслуживания; обобщенное обновление; марковский процесс обслуживания; управление очередью; вложенная цепь Маркова

DOI: 10.14357/08696527190405

1 Введение

В работе рассматривается n-линейная система массового обслуживания (СМО) с одной очередью неограниченной емкости, рекуррентным входящим потоком заявок, специальным обслуживанием марковского типа и механизмом обобщенного обновления согласно [1]. С помощью метода вложенной цепи Маркова найдены стационарные распределения основных характеристик обслуживания. Приведенные здесь результаты обобщают аналогичные результаты статей [1–4], полученные для однолинейной системы G/MSP/1/r и многолинейных систем $G/M/n/r$ с обновлением. Кроме того, предложенная модель

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-07-00739).

[1]Российский университет дружбы народов; Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, zaryadov-is@rudn.ru

[2]Финансовый университет при Правительстве РФ, lamejkhanadzhyan@fa.ru

[3]Российский университет дружбы народов, milovanova-ta@rudn.ru

процесса обслуживания может рассматриваться как обобщение (в случае идентичных приборов) марковского обслуживания (Markovian Service Process), обычно используемого при описании работы приборов в СМО, функционирующих в случайной среде [5–8].

Отметим также, что интерес к моделям, подобным той, что рассматривается в статье, связан с перспективами применения механизма обобщенного обновления в качестве алгоритма активного управления очередями (см. подробнее в [9–13]).

2 Описание системы

Рассматривается n-линейная СМО $G/\mathrm{MSP}/n/\infty$ с очередью бесконечной емкости и обобщенным обновлением. Входящий в систему поток заявок является рекуррентным, причем время между соседними поступлениями заявок имеет произвольную функцию распределения $A(x)$. Будем предполагать, что среднее время $a = \int_0^\infty x\,dA(x)$ между поступлениями заявок конечно и, кроме того, там, где речь пойдет о стационарном распределении по времени, будем считать, что распределение $A(x)$ является нерешетчатым.

Марковский процесс обслуживания заявок определяется следующим образом. Если в системе находится k заявок, то процесс обслуживания может находиться в одном из l_k, $1 \leq l_k < \infty$, состояний (фаз обслуживания). Тогда если фаза обслуживания равна i, $1 \leq i \leq l_k$, то за «малое» время Δ с вероятностью $\lambda_{ij}^{(k)}\Delta + o(\Delta)$ фаза изменится на j-ю, $1 \leq j \leq l_k$, и все заявки будут продолжать обслуживаться, а с вероятностью $n_{ij}^{(k)}\Delta + o(\Delta)$ фаза изменится на j-ю, $1 \leq j \leq l_{k-1}$, но обслуживание одной из заявок закончится и она покинет систему. Матрицы из элементов $\lambda_{ij}^{(k)}$ и $n_{ij}^{(k)}$ будем обозначать через Λ_k и N_k, $k \geq 1$. Кроме того, будем предполагать, что $l_k = l$ при $k \geq n$; тогда матрицы $\Lambda_k = \Lambda$ совпадают при $k \geq n$, а матрицы $N_k = N$ совпадают при $k \geq n+1$. Наконец, будем считать, что на свободном периоде фаза обслуживания не изменяется. Если в момент поступления очередной заявки в системе имеется k, $0 \leq k \leq n-1$, других заявок и фаза обслуживания равна i, $1 \leq i \leq l_k$, то после поступления новой заявки она с вероятностью $\omega_{ij}^{(k)}$ изменится на j, $1 \leq j \leq l_{k+1}$. Матрицу из элементов $\omega_{ij}^{(k)}$ будем обозначать через Ω_k.

Обобщенное обновление определяется следующим образом (см. также [1]). Находящаяся на приборе заявка в момент окончания обслуживания одновременно с уходом из системы либо с вероятностью $q(l)$ удаляет («убивает») из очереди ровно l заявок, если в ней находится более l заявок, либо с вероятностью $Q(l) = \sum_{k=l}^\infty q(k)$ полностью опустошает очередь, если в ней было ровно l заявок. Вероятности $q(l)$ называются вероятностями обновления. Очевидно, что $Q(0) = \sum_{l=0}^\infty q(l) = 1$, а вероятность того, что закончившая обслуживание на приборе заявка покинет систему, не оказывая на нее никакого воздействия, — это $q(0)$.

Предполагается, что матрица $\Lambda + N$ является неразложимой, а матрица N — ненулевой. Более того, будем предполагать, что при исходных параметрах рассматриваемой СМО введенная далее вложенная цепь Маркова будет неприводимой и существует стационарный режим, необходимым и достаточным условием которого является выполнение неравенства[1]:

$$a^{-1} < \pi_s N \vec{1} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) q(i)\,,$$

где в правой части стоит среднее число покидающих систему за единицу времени заявок при условии, что в системе находится бесконечное число заявок (а $\vec{\pi}_s$ — вектор стационарных вероятностей марковского процесса с инфинитезимальной матрицей $\Lambda + N$). Наконец, будем считать, что заявки обслуживаются и «убиваются» в порядке поступления.

3 Стационарные распределения числа заявок в системе

Рассмотрим последовательные моменты τ_n, $n \geq 0$, поступления заявок в систему. Пусть $\xi(t)$ — фаза обслуживания заявок в момент времени t, а $\nu(t)$ — число заявок в системе в этот момент. Определим случайные величины $\xi_n = \xi(\tau_n + 0)$ и $\nu_n = \nu(\tau_n + 0)$, которые задают соответственно фазу обслуживания и число заявок в системе непосредственно после момента поступления n-й заявки. Положим $\zeta_n = (\xi_n, \nu_n)$. Последовательность $\{\zeta_n,\ n \geq 0\}$ образует однородную цепь Маркова, которую будем называть вложенной. Множество состояний $\mathcal{X}$ вложенной цепи Маркова имеет вид:

$$\mathcal{X} = \{(1,1), \ldots, (l_1, 1)\} \cup \{(1,2), \ldots, (l_2, 2)\} \cup \ldots,$$

где первый индекс указывает на фазу обслуживания, а второй — на число заявок в системе непосредственно после момента поступления заявки.

Выпишем матрицу переходных вероятностей вложенной цепи Маркова $\{\zeta_n,\ n \geq 0\}$. Для этого сначала определим следующие матрицы:

– $F_k(x)$, $k \geq 0$, — матрица, элемент $(F_k(x))_{ij}$, $1 \leq i, j \leq l$, которой представляет собой условную вероятность того, что за время x систему покинет ровно k заявок и процесс обслуживания перейдет на фазу j при условии, что в начальный момент в системе (вместе с заявками на приборах) было не менее $k + n$ заявок, процесс обслуживания находился на фазе i и за время x в систему не поступила новая заявка;
– A_k, $k \geq 0$, — матрица, элемент $(A_k)_{ij}$ которой представляет собой условную вероятность того, что за время между последовательными моментами поступления заявок систему покинут k заявок и процесс обслуживания перейдет на

[1] Здесь и далее $\vec{1}$ — вектор из единиц соответствующей размерности.

фазу j, при условии, что в начальный момент в системе было не менее $k+n$ заявок и процесс обслуживания находился на фазе i.

Матричные функции $F_k(x)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$F_0(x) = e^{\Lambda x}\,; \tag{1}$$

$$F_k(x) = \int\limits_0^x \sum_{m=1}^{k} F_{k-m}(y) N q(m-1) F_0(x-y)\,dy, \quad k \ge 1\,, \tag{2}$$

а матрицы A_k рассчитываются по формуле:

$$A_k = \int\limits_0^\infty F_k(x)\,dA(x), \quad k \ge 0. \tag{3}$$

Вывод этих соотношений ничем не отличается от вывода аналогичных соотношений для таких СМО, как, например, MAP/G/1/r или SM/MSP/n/r [6, 14]. Для получения расчетных формул для матриц $F_k(x)$ и A_k можно воспользоваться методом, изложенным в [14, п. 7.3]. Пусть $a = \max_{1 \le i \le l} |\Lambda_{ii}|$ — максимальный по модулю элемент главной диагонали матрицы Λ. Тогда из (1) имеем (см., например, [14, соотношение (28), с. 350]):

$$F_0(x) = e^{-ax} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ax)^i}{i!} \left(I + a^{-1}\Lambda\right)^i.$$

Здесь и далее I — единичная матрица, порядок которой определяется из контекста. Матричные функции $F_k(x)$, $k \ge 1$, будем искать в виде

$$F_k(x) = \sum_{i=1}^{k} \tilde{F}_i(x) a_{ki}, \tag{4}$$

где функции $\tilde{F}_i(x)$ вычисляются по формулам:

$$\tilde{F}_k(x) = e^{-ax} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(ax)^i}{i!} F_{ki},$$

$$F_{ki} = \sum_{j=0}^{i-k} \left(I + a^{-1}\Lambda\right)^j \left(a^{-1}N\right) F_{k-1,i-j-1}, \quad i \ge k \ge 1\,.$$

Подставляя (4) в левую и правую части (2), получаем рекуррентную процедуру для расчета коэффициентов a_{ki}, $k \geq 1$:

$$a_{k1} = q(k-1)\,, \;\; a_{ki} = \sum_{m=1}^{k+1-i} q(m-1) a_{k-m,i-1}\,, \;\; 2 \leq j \leq k\,.$$

Заметим, что расчет матричных коэффициентов F_{ki} удобно осуществлять рекуррентным образом (см. [14, соотношение (31), с. 350]). Вернемся к матрицам A_k. Подставляя выражение (4) для $F_k(x)$ в (3), получаем, что матрицы A_k можно представить в виде:

$$A_0 = \sum_{j=0}^{\infty} F_{0j}\alpha_j\,; \;\; A_k = \sum_{i=1}^{k} a_{ki} \sum_{j=i}^{\infty} F_{ij}\alpha_j\,, \;\; k \geq 1\,,$$

где $\alpha_i = \int_0^\infty ((ax)^i/i!) e^{-ax}\, dA(x)$ — экспоненциальный момент порядка i функции распределения $A(x)$.

Вернемся к вложенной цепи Маркова. В дальнейшем потребуются следующие матрицы:

- $F_{kw}(x)$, $0 \leq w \leq n-1$, $k \geq w$, — матрица, элемент $(F_{kw}(x))_{ij}$, $1 \leq i \leq l_k$, $1 \leq j \leq l_w$, которой представляет собой условную вероятность того, что за время x систему покинет $k-w$ заявок и процесс обслуживания перейдет на фазу j при условии, что в начальный момент в системе (вместе с заявками на приборах) было k заявок, процесс обслуживания находился на фазе i и за время x в систему не поступила новая заявка;
- A_{kw}, $0 \leq w \leq n-1$, $k \geq w$, — матрица, элемент $(A_{kw})_{ij}$ которой представляет собой условную вероятность того, что за время между поступлениями заявок систему покинет $k-w$ заявок и процесс обслуживания после поступления новой заявки перейдет на фазу j, при условии, что в начальный момент в системе было k заявок и процесс обслуживания находился на фазе i.

Матрицы $F_{kw}(x)$ можно найти из соотношений:

$$F_{00}(x) = I\,;$$

$$F_{kk}(x) = e^{\Lambda_k x}, \;\; 1 \leq k \leq n-1\,; \tag{5}$$

$$F_{kw}(x) = \int_0^x F_{k,w+1}(y) N_{w+1} F_{ww}(x-y)\, dy\,,$$

$$0 \leq w \leq n-2\,, \;\; w+1 \leq k \leq n-1\,; \tag{6}$$

$$F_{k,n-1}(x) = \int\limits_0^x \sum_{m=0}^{k-n} F_m(y) N_n Q(k-n-m) F_{n-1,n-1}(x-y)\,dy\,,\ \ k \geq n\,; \qquad (7)$$

$$F_{kw}(x) = \int\limits_0^x F_{k,w+1}(y) N_{w+1} F_{ww}(x-y)\,dy\,,\ \ 0 \leq w \leq n-2\,,\ \ k \geq n\,, \qquad (8)$$

а матрицы A_{kw} — из соотношения:

$$A_{kw} = \int\limits_0^\infty F_{kw}(x)\Omega_w\,dA(x),\ \ 0 \leq w \leq n-1\,,\ \ k \geq w\,. \qquad (9)$$

Отметим, что для численного расчета матриц $F_{kw}(x)$ и A_{kw} описанный выше метод не всегда пригоден. Это связано с тем, что максимальные (по модулю) диагональные элементы матриц Λ_k, $1 \leq k \leq n-1$, могут быть не равны между собой. В этом случае (некоторым) выходом из положения может стать векторизация соотношений (5)—(9). Например, применяя оператор векторизации vec к левой и правой части (9) и воспользовавшись соотношением[1] $\mathrm{vec}(ABC) = (C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} \otimes I)\mathrm{vec}(A)$ (см. [15]), получим:

$$\mathrm{vec}\,(A_{kw}) = \left(\Omega_w^{\mathrm{T}} \otimes I\right) \int\limits_0^\infty \mathrm{vec}\,(F_{kw}(x))\ dA(x).$$

Вычисление входящих в последнюю формулу векторов $\mathrm{vec}(F_{kw}(x))$ и интегралов может быть эффективно реализовано в программах, специально предназначенных для векторных вычислений.

Таким образом, матрица P переходных вероятностей вложенной цепи Маркова в указанных обозначениях имеет следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} A_{10} & A_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ A_{n-1,0} & A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \cdots & A_{n-1,n-1} & 0 & 0 & \cdots \\ A_{n0} & A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{n,n-1} & A_0 & 0 & \cdots \\ A_{n+1,0} & A_{n+1,1} & A_{n+1,2} & \cdots & A_{n+1,n-1} & A_1 & A_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Обозначим через π_{ik} стационарную по вложенной цепи Маркова вероятность того, что в системе имеется k заявок и фаза обслуживания равна i, и положим

[1] Напомним, что здесь $\otimes$ — символ Кронекера, а I — единичная квадратная матрица, размер которой равен числу строк матрицы A.

$\vec{\pi} = (\vec{\pi}_1, \vec{\pi}_2, \ldots)$, $\vec{\pi}_k = (\pi_{1k}, \ldots, \pi_{l_k,k})$. Для $\vec{\pi}$ справедлива система уравнений равновесия (СУР) $\vec{\pi} = \vec{\pi}P$. Структура матрицы P позволяет использовать для решения СУР один из множества известных методов расчета стационарного распределения очереди в СМО типа $G/M/1$ (см., например, [16, 17]) и, в частности, методы, предложенные в [6, разд. 3] и [2, разд. 2]. Вкратце остановимся на общем алгоритме расчета векторов $\vec{\pi}_k$. На первом шаге находится решение уравнения $G = \sum_{k=0}^{\infty} G^k A_k$ в классе матриц, все собственные значения которых по модулю меньше единицы. Согласно [16] при выполнении условия существования стационарного режима такое решение существует и единственно. На следующем шаге решается система линейных уравнений[1]

$$\vec{\pi}_1 = \sum_{w=1}^{n-1} \vec{\pi}_w A_{w0} + \vec{\pi}_n A_0^*\,; \tag{10}$$

$$\vec{\pi}_k = \sum_{w=k-1}^{n-1} \vec{\pi}_w A_{w,k-1} + \vec{\pi}_n A_{k-1}^*, \;\; 2 \leq k \leq n\,, \tag{11}$$

где

$$A_k^* = \sum_{w=n}^{\infty} G^{w-n} A_{wk}, \;\; 0 \leq k \leq n-1\,,$$

с точностью до константы, которая находится из условия нормировки

$$\sum_{k=1}^{n-1} \vec{\pi}_k \vec{1} + \vec{\pi}_n (I-G)^{-1} \vec{1} = 1\,.$$

Для решения (10)–(11) удобно, например, воспользоваться методом исключения состояний (см., например, [2, разд. 2] или [18]). Наконец, на третьем шаге рассчитываются вероятности $\vec{\pi}_k = \vec{\pi}_n G^{k-n}$, $k \geq n+1$.

Зная стационарное распределение вложенной цепи Маркова, уже можно определить ряд других стационарных характеристик очереди. Например, вводя обозначение $\vec{\pi}_k^- = (\pi_{1k}^-, \ldots, \pi_{l_{k+1},k}^-)$, $k \geq 0$, где π_{ik}^- — стационарная вероятность того, что поступающая в систему заявка застанет в ней k других заявок и марковский процесс обслуживания после ее поступления окажется на фазе i, немедленно можем записать $\vec{\pi}_k^- = \vec{\pi}_{k+1}$.

---

[1] Известно (см., например, [6, с. 92]), что для того, чтобы эта система уравнений имела решение, достаточно, чтобы $\sum_{k=0}^{n-1} A_k^* \vec{1} = \vec{1}$. В справедливости последнего равенства можно убедиться непосредственной проверкой. Действительно, интегрируя (9) по частям, получаем $\sum_{k=0}^{n-1} A_k^* \vec{1} = \sum_{j=0}^{\infty} q(j) \sum_{i=0}^{j} G^i U N_n \vec{1}$, где $U = \sum_{k=0}^{\infty} G^k T_k$. Учитывая, что $G\vec{1} = \sum_{k=0}^{\infty} G^k A_k \vec{1} = \vec{1} - UN\vec{1} + \sum_{i=0}^{\infty} G^{i+1} U N q(i) \vec{1}$, матрица G невырождена и $N_n \vec{1} = N\vec{1}$, простым переупорядочением слагаемых приходим к искомому равенству.

Для нахождения стационарных вероятностей состояний по времени введем матрицы T_k, $k \geq 0$, и T_{kw}, $0 \leq w \leq n-1$, $k \geq w$. Элемент $(T_k)_{ij}$, $1 \leq i, j \leq l$, матрицы T_k представляет собой среднее время, проведенное на интервале между соседними моментами поступления заявок системой в состоянии $(j, M-k)$ при условии, что после поступления первой заявки в системе оказалось M, $M > k$, заявок и фаза обслуживания была i. Элемент $(T_{kw})_{ij}$, $1 \leq i \leq l_w$, $0 \leq j \leq l_w$, матрицы T_{kw} есть среднее время, проведенное на интервале между соседними моментами поступления заявок системой в состоянии (j, w) при условии, что после поступления первой заявки в системе оказалось k, $k \geq w$, заявок и фаза обслуживания была i. Матрицы T_k и T_{kw} определяются соотношениями:

$$T_k = \int\limits_0^\infty (1 - A(x)) F_k(x)\, dx\,; \;\; T_{kw} = \int\limits_0^\infty (1 - A(x)) F_{kw}(x)\, dx\,.$$

Убедиться в этом можно, применяя рассуждения, аналогичные тем, что приведены в [19, с. 285]. Используя результаты теории полумарковских процессов, получаем для векторов $\vec{p}_k$, $k \geq 0$, стационарных вероятностей состояний по времени формулы:

$$\vec{p}_0 = \frac{1}{a} \sum_{w=1}^{\infty} \vec{\pi}_w T_{w0}\,; \tag{12}$$

$$\vec{p}_k = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \displaystyle\sum_{w=k}^{\infty} \vec{\pi}_w T_{wk}\,, & 1 \leq k \leq n-1\,; \\ \dfrac{1}{a} \displaystyle\sum_{w=k}^{\infty} \vec{\pi}_w T_{w-k}\,, & k \geq n\,. \end{cases} \tag{13}$$

Заметим, что формулы (12) и (13) можно получить и из результатов теории процессов восстановления (см., например, [14, с. 328]).

4 Стационарные распределения времен ожидания и пребывания обслуженной заявки в системе

Выпишем в терминах преобразования Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) некоторые стационарные характеристики, связанные с временем ожидания начала обслуживания и временем пребывания заявки в системе.

Обозначим через $U_k(x)$, $k \geq 1$, матрицу, элемент $(U_k(x))_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq l$, которой есть вероятность того, что поступившая в систему заявка перейдет из очереди на обслуживание за время x и процесс обслуживания перейдет на фазу j, при условии, что она в момент поступления застала в системе $n+k-1$ других заявок и фаза обслуживания была i, а через $\tilde{U}_k(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dU_k(x)$ — ПЛС матрицы $U_k(x)$. Тогда

$$\tilde{U}_k(s) = \sum_{i=1}^{k} (sI - \Lambda)^{-1} N q(i-1) \tilde{U}_{k-i}(s)\,, \ \ k \geq 1\,,$$

где для сокращения записи используется соглашение $\tilde{U}_0(s) \equiv I$. Тогда ПЛС $\tilde{W}_{\mathrm{serv}}(s)$ стационарного распределения $W_{\mathrm{serv}}(x)$ пребывания в очереди попавшей на обслуживание заявки примет вид:

$$\tilde{W}_{\mathrm{serv}}(s) = \frac{1}{1 - p_{\mathrm{loss}}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \vec{\pi}_k^{\,-} \vec{1} + \sum_{k=n}^{\infty} \vec{\pi}_k^{\,-} \tilde{U}_{k-n+1}(s) \vec{1} \right), \tag{14}$$

где p_{loss} — стационарная вероятность того, что поступившая в систему заявка не попадет на обслуживание (т. е. будет потеряна), которая равна

$$p_{\mathrm{loss}} = \sum_{k=n}^{\infty} \gamma(k-n+1) \vec{\pi}_k^{\,-} \vec{1}\,,$$

а $\gamma(k)$, $k \geq 1$, — стационарная вероятность того, что заявка, находящаяся в очереди на k-м месте, будет «убита» (какой-либо) обслуженной заявкой. Для рассматриваемой системы она вычисляется по формуле

$$\gamma(k) = \sum_{m=1}^{k} \gamma_m(k)\,,$$

где

$$\gamma_1(k) = Q(k),\ k \geq 1; \quad \gamma_m(k) = \sum_{i=0}^{k-m} q(i) \gamma_{m-1}(k-1-i),\ 2 \leq m \leq k,\ k \geq 2,$$

и совпадет с вероятностью $\gamma(k)$ в [1, с. 136].

Перейдем к нахождению стационарного распределения времени пребывания в системе обслуженной заявки. Введем матрицы $\tilde{V}_k(s,y)$, $k \geq 1$, $y \geq 0$. Элемент $(\tilde{V}_k(s,y))_{ij}$ матрицы $\tilde{V}_k(s,y)$ есть ПЛС времени пребывания заявки на обслуживании и вероятность того, что в момент ее ухода из системы фаза обслуживания равна j при условии, что сразу после ее поступления на обслуживание занятыми оказались $\min(k,n)$ приборов, в очереди было $\max(0,k-n)$ заявок, время до прихода следующей заявки было равно y и фаза обслуживания была равна i. Учитывая, что все приборы предполагаются одинаковыми и, таким образом, при окончании обслуживания равновероятно может освободиться любой из (занятых) приборов, по свойствам ПЛС имеем:

$$\tilde V_k(s,y) = \\ = \begin{cases} e^{-(sI-\Lambda_k)y}\tilde V_{k+1}(s) + \\ \quad + \int\limits_0^y e^{-(sI-\Lambda_k)u} N_k\left(\frac{1}{k} + \frac{k-1}{k}\tilde V_{k-1}(s,y-u)\right) du, \quad 1\le k\le n-1\,; \\ \int\limits_0^y e^{-(sI-\Lambda)u} N_n\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\tilde V_{n-1}(s,y-u)\right) du + e^{-(sI-\Lambda)y}\tilde V_{n+1}(s)\,, \\ \hfill k=n\,; \\ e^{-(sI-\Lambda)y}\tilde V_{k+1}(s) + \int\limits_0^y e^{-(sI-\Lambda)u} N\left(\frac{1}{n} + \right. \\ \quad \left. + \frac{n-1}{n}\left(\sum\limits_{j=0}^{k-n-1} q(j)\tilde V_{k-1-j}(s,y-u) + Q(k-n)\tilde V_{n-1}(s,y-u)\right)\right) du\,, \\ \hfill k\ge n+1\,, \end{cases}$$

где

$$\tilde V_k(s) = \int\limits_0^\infty \tilde V_k(s,y)\,dA(y)\,.$$

Тогда заявка, поступающая в систему, когда занято k, $0\le k\le n-1$, приборов немедленно становится на обслуживания и ПЛС времени ее пребывания в системе (с учетом смен фаз обслуживания) равно $\tilde V_{k+1}(s)$. Заявка, застающая при поступлении k, $k\ge n$, заявок в системе, ожидает некоторое время в очереди, которое (с учетом смен фаз обслуживания) с вероятностью $dU_{k-n+1}(x)$ равно x. При этом в момент поступления заявки на обслуживание в системе окажется m заявок в очереди и время до прихода следующей заявки будет равно y с плотностью вероятности $a_m(x,y)$:

$$a_0(x,y) = A^{*1}(x+y)\,;\quad a_m(x,y) = \int\limits_0^x A^{*m}(u)A^{*1}(x-u+y)\,du,\;\; m\ge 1\,,$$

где $A^{*1}(x)$ определяются рекуррентно по формулам

$$A^{*1}(x) = A'(x);\;\; A^{*m}(x) = \int\limits_0^x A^{*(m-1)}(x-u)A^{*1}(u)\,du\,.$$

Таким образом, ПЛС $\tilde{V}_{\mathrm{serv}}(s)$ стационарного распределения $V_{\mathrm{serv}}(x)$ времени пребывания в системе попавшей на обслуживание заявки имеет вид:

$$\tilde{V}_{\mathrm{serv}}(s) = \frac{1}{1 - p_{\mathrm{loss}}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \vec{\pi}_k^- \tilde{V}_{k+1}(s)\vec{1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n}^{\infty} \vec{\pi}_k^- \int\limits_0^{\infty} e^{-sx}\, dU_{k-n+1}(x) \int\limits_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x,y)\tilde{V}_{n+m}(s,y)\vec{1}\, dy \right). \quad (15)$$

5 Заключение

При некоторых дополнительных ограничениях[1] на $A(x)$ большую часть выражений для матриц можно упростить и получить в явном виде.

Дифференцируя выражения (14) и (15) необходимое число раз, можно получить моменты любых порядков времени ожидания начала обслуживания и времени пребывания в системе (обслуженной) заявки. Для нахождения средних значений наиболее подходит формула Литтла. Для других моментов (14) еще годится для практических расчетов, а (15) уже становится едва ли пригодной. В связи с этим представляется интересным исследовать специальные случаи входного потока (и процесса обслуживания), когда (15) приобретает более простой вид.

В заключение также отметим, что полученные в работе результаты достаточны для нахождения специальных показателей качества управления очередью (например, распределение числа последовательных потерь) и, таким образом, обеспечивают возможность сравнения механизма обновления с другими известными механизмами активного управления очередями.

Литература

1. *Зарядов И. С.* Система массового обслуживания $\mathrm{GI}/M/n/\infty$ с обобщенным обновлением // Автоматика и телемеханика, 2010. Вып. 4. С. 130–139.
2. *Бочаров П. П., Д'Апиче Ч., Печинкин А. В., Салерно С.* Стационарные характеристики системы массового обслуживания $G/\mathrm{MSP}/1/r$ // Автоматика и телемеханика, 2003. № 2. С. 127–143.
3. *Бочаров П. П., Зарядов И. С.* Стационарное распределение вероятностей в системах массового обслуживания с обновлением // Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика, 2007. № 1-2. С. 15–25.
4. *Зарядов И. С.* Стационарные характеристики обслуживания в системе $G/M/n/r$ с обобщенным обновлением // Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика, 2008. № 2. С. 3–9.

[1]Это, например, случай, когда $A(x)$ имеет дробно-рациональное ПЛС.

5. *Бочаров П. П.* Стационарное распределение конечной очереди с рекуррентным потоком и марковским обслуживанием // Автоматика и телемеханика, 1996. № 9. С. 66–78.
6. *Печинкин А. В., Чаплыгин В. В.* Стационарные характеристики системы массового обслуживания G/MSP/n/r // Вестник РУДН. Сер. Прикладная математика и информатика, 2003. № 1. С. 119–143.
7. *Печинкин А. В., Чаплыгин В. В.* Стационарные характеристики системы массового обслуживания SM/MSP/n/r // Автоматика и телемеханика, 2004. № 9. С. 85–100.
8. *Чаплыгин В. В.* Система массового обслуживания G/MSP/n/r с потоком отрицательных заявок // Информационные процессы, 2005. Т. 5. № 1. С. 1–19.
9. *Chydzinski A., Chrost L.* Analysis of AQM queues with queue size based packet dropping // Int. J. Appl. Math. Comp., 2011. Vol. 21. Iss. 3. P. 567–577. doi: 10.2478/v10006-011-0045-7.
10. *Zaryadov I. S., Razumchik R. V., Milovanova T. A.* Stationary waiting time distribution in $G/M/n/r$ with random renovation policy // Comm. Comp. Inf. Sc., 2016. Vol. 678. P. 418–429. doi: 10.1007/978-3-319-51917-331.
11. *Chydzinski A., Mrozowski P.* Queues with dropping functions and general arrival processes // PLoS ONE, 2016. Vol. 11. Iss. 3. Art. ID: e0150702. doi: 10.1371/journal.pone.0150702.
12. *Konovalov M., Razumchik R.* Comparison of two active queue management schemes through the $M/D/1/N$ queue // Информатика и её применения, 2018. Т. 12. Вып. 4. С. 9–15. doi: 10.14357/19922264180402.
13. *Zaryadov I., Bogdanova E., Milovanova T., Matushenko S., Pyatkina D.* Stationary characteristics of the $GI/M/1$ queue with general renovation and feedback // 10th Congress (International) on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops, 2018. P. 1–6. doi: 10.1109/icumt.2018.8631244.
14. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания. — М.: РУДН, 1995. 529 с.
15. *Steeb W. H., Hardy Y.* Matrix calculus and Kronecker product: A practical approach to linear and multilinear algebra. — River Edge, NJ, USA: World Scientific, 2011. 324 p.
16. *Neuts M. F.* Matrix-geometric solutions in stochastic models. An algorithmic approach. — Baltimore–London: The Johns Hopkins University Press, 1981. 332 p.
17. *Latouche G., Ramaswami V.* Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling. — ASA-SIAM ser. on statistics and applied probability. — Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2000. 348 p.
18. *Печинкин А. В., Разумчик Р. В.* Системы массового обслуживания в дискретном времени. — М.: Физматлит, 2018. 432 с.
19. *Bocharov P. P., D'Apice C., Pechinkin A. V., Salerno S.* Queueing theory. — Utrecht, Boston: VSP, 2004. 446 p.

Поступила в редакцию 01.09.19

STATIONARY CHARACTERISTICS OF THE GI/MSP/n/∞ QUEUE WITH GENERAL RENOVATION

***I. S. Zaryadov*[1,2], *L. A. Meykhanadzhyan*[3], *and T. A. Milovanova*[1]**

[1]Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation

[2]Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Sciences and Control" of the Russian Academy of Sciences; 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation

[3]Financial University under the Government of the Russian Federation, 49 Leningradsky Prosp., Moscow 125993, Russian Federation

Abstract: Consideration is given to the GI/MSP/n/∞ queue with general input flow of customers, n identical servers, service process of markovian type, queue of infinite capacity, and general renovation. General renovation being the variant of an active queue management mechanism, implies that upon a service completion, a customer may remove a random number of customers from the queue (if any is available), with a given probability distribution. Using embedded Markov chain technique, one derives stationary distributions of the main system's performance characteristics. The obtained results are ready for numerical implementation and allow one to compute stationary distributions of the system size, stationary loss probability, and waiting time distribution (under FIFO (first in, first out) service and head-of-the-queue renovation).

Keywords: queueing system; general renovation; markovian service process; queue management; embedded Markov chain

DOI: 10.14357/08696527190405

Acknowledgments

The study was funded by the Russian Foundation for Basic Research, project No. 19-07-00739.

References

1. Zaryadov, I. S. 2010. The GI/$M/n/\infty$ queuing system with generalized renovation. *Automat. Rem. Contr.* 71(4):663–671.
2. Bocharov, P. P., C. D'Apice, A. V. Pechinkin, and S. Salerno. 2003. The stationary characteristics of the G/MSP/$1/r$ queueing system. *Automat. Rem. Contr.* 64(2):288–301.
3. Bocharov, P. P., and I. S. Zaryadov. 2007. Statsionarnoe raspredelenie veroyatnostey v sistemakh massovogo obsluzhivaniya s obnovleniem [Stationary probability distribution of the queueing system with renovation]. *Vestnik RUDN. Ser. Matematika. Informatika. Fizika* [Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Ser. Mathematics. Information Sciences. Physics] 1-2:15–25.

4. Zaryadov, I. S. 2008. Statsionarnye kharakteristiki obsluzhivaniya v sisteme $G/M/n/r$ s obobshchennym obnovleniem [Queueing system $G/M/n/r$ with general renovation. Stationary characteristics]. *Vestnik RUDN. Ser. Matematika. Informatika. Fizika* [RUDN J. Mathematics Information Sciences Physics] 2:3–9.
5. Bocharov, P. P. 1996. Stationary distribution of a finite queue with recursive input flow and Markovian service discipline. *Automat. Rem. Contr.* 57(9):1274–1283.
6. Pechinkin, A. V., and V. V. Chaplygin. 2003. Statsionarnye kharakteristiki sistemy massovogo obsluzhivaniya G/MSP/n/r [The stationary characteristics of the G/MSP/n/r queueing system]. *Vestnik RUDN. Ser. Prikladnaya matematika i informatika* [Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Ser. Applied Mathematics and Information Sciences] 1:119–143.
7. Pechinkin, A. V., and V. V. Chaplygin. 2004. Stationary characteristics of the SM/MSP/n/r queuing system. *Automat. Rem. Contr.* 65(9):1429–1443.
8. Chaplygin, V. V. 2005. Sistema massovogo obsluzhivaniya G/MSP/n/r s potokom otritsatel'nykh zayavok [A queueing system G/MSP/n/r with flow of negative claims]. *Informatsionnye protsessy* [Information Processes] 5(1):1–19.
9. Chydzinski, A., and L. Chrost. 2011. Analysis of AQM queues with queue size based packet dropping. *Int. J. Appl. Math. Comp.* 21(3):567–577. doi: 10.2478/v10006-011-0045-7.
10. Zaryadov, I. S., R. V. Razumchik, and T. A. Milovanova. 2016. Stationary waiting time distribution in $G/M/n/r$ with random renovation policy. *Comm. Comp. Inf. Sc.* 678:418–429. doi: 10.1007/978-3-319-51917-3 31.
11. Chydzinski, A., and P. Mrozowski. 2016. Queues with dropping functions and general arrival processes. *PLoS ONE* 11(3):e0150702. doi: 10.1371/journal.pone.0150702.
12. Konovalov, M., and R. Razumchik. 2018. Comparison of two active queue management schemes through the $M/D/1/N$ queue. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 12(4):9–15. doi: 10.14357/19922264180402.
13. Zaryadov, I., E. Bogdanova, T. Milovanova, S. Matushenko, and D. Pyatkina. 2018. Stationary characteristics of the GI/M/1 queue with general renovation and feedback. *10th Congress (International) on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops*. 1–6. doi: 10.1109/icumt.2018.8631244.
14. Bocharov, P. P., and A. V. Pechinkin. 1995. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing theory]. Moscow: RUDN. 529 p.
15. Steeb, W. H., and Y. Hardy 2011. *Matrix calculus and Kronecker product: A practical approach to linear and multilinear algebra.* River Edge, NJ: World Scientific. 324 p.
16. Neuts, M. F. 1981. *Matrix-geometric solutions in stochastic models. An algorithmic approach*. Baltimore–London: The Johns Hopkins University Press. 332 p.
17. Latouche, G., and V. Ramaswami. 2000. *Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling*. ASA-SIAM ser. on statistics and applied probability. Philadelphia, PA: SIAM. 348 p.
18. Pechinkin, A. V., and R. V. Razumchik. 2018. *Sistemy massovogo obsluzhivaniya v diskretnom vremeni* [Discrete time queuing systems]. Moscow: Fizmatlit. 432 p.
19. Bocharov, P. P., C. D'Apice, A. V. Pechinkin, and S. Salerno. 2004. *Queueing theory*. Utrecht, Boston: VSP. 446 p.

Received September 1, 2019

Contributors

Zaryadov Ivan S. (b. 1981) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Applied Informatics and Probability Theory, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences; izaryadov@sci.pfu.edu.ru

Meykhanadzhyan Lusine A. (b. 1990) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Data Analysis, Decision-Making and Financial Technology, Financial University under the Government of the Russian Federation, 49 Leningradsky Prosp., Moscow 125993, Russian Federation; lamejkhanadzhyan@fa.ru

Milovanova Tatiana A. (b. 1977) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, senior lecturer, Department of Applied Informatics and Probability Theory, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; tmilovanova77@mail.ru