Д. В. Иванов, Условные границы средних максимумов случайных величин и их достижимость, *Системы и средства информ.*, 2019, том 29, выпуск 1, 140–163

DOI: 10.14357/08696527190112

СИСТЕМЫ И СРЕДСТВА ИНФОРМАТИКИ, 2019. Т. 29. № 1. С. 140–163

УСЛОВНЫЕ ГРАНИЦЫ СРЕДНИХ МАКСИМУМОВ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ ДОСТИЖИМОСТЬ

Д. В. Иванов[1]

Аннотация: Предметом интереса настоящей статьи являются средние максимумы из некоторого числа n случайных величин. Рассматривается ситуация, когда величины стандартизованы (имеют нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию), независимы и одинаково распределены, а также известно значение среднего максимума из m независимых случайных величин с тем же распределением. Исследуется вопрос достижимости при указанных условиях границ средних максимумов, полученных в работах других авторов. В случаях, когда этот вопрос остается открытым, проведено уточнение границ. Задача может иметь приложения в теории массового обслуживания, страховании, финансах и других областях.

Ключевые слова: средний максимум; достижимость

DOI: 10.14357/08696527190112

1 Введение

В теории вероятностей и ее приложениях используются различные числовые характеристики случайных величин. К ним можно отнести и средние максимумы. Для случайной величины X положим

$$\mu_n(X) = \mathbf{E} \max \{X_1, \ldots, X_n\} ,$$

где $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные копии X (например, статистическая выборка из генеральной совокупности с соответствующим распределением).

Замечание 1. В дальнейшем будем использовать более компактное обозначение μ_n, в котором не отражена зависимость от $X_1, \ldots, X_n$, до тех пор пока такое сокращение допустимо в рамках текущего контекста и не вызывает путаницы.

Словосочетание «средний максимум» не является широко употребительным в российской вероятностно-статистической литературе, однако является вполне традиционным, например, в климатологии [1] при описании изменчивости метеорологических величин. В частности, берут максимумы и минимумы температуры (за день, месяц, год) и затем усредняют (по дням за месяц, по годам за весь период наблюдений). Таким образом получаются средние максимумы и минимумы температур. Хотя, конечно, в этих случаях нельзя сказать, что случайные величины независимы и одинаково распределены, ситуация более сложная. Средние

[1]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, ashtynbamba@gmail.com

максимумы и минимумы наряду с другими показателями характеризуют климат в данной местности, что может быть важно для сельского хозяйства и др.

В англоязычной вероятностной литературе употребляются как словосочетания «expected maximum» [2–4] или «expected maximum value», так и другие синонимы.

Важной областью приложения введенной величины является финансовая математика. Для оценки финансовых рисков существует целый ряд различных мер (VaR (value of risk), CVaR (conditional VaR), WVaR (worst-case VaR) и др.). Особый интерес представляют меры, обладающие свойствами монотонности, субаддитивности, положительной однородности и инвариантности относительно сдвига — *когерентные* меры риска. Пример когерентной меры риска — мера

$$\mathrm{MINVaR}_n(X) = -\mathbf{E}\min\{X_1, \ldots, X_n\},$$

которая изучалась в [5–7]. Понятно, что $\mathrm{MINVaR}_n(X) = \mu_n(-X)$. На практике можно исследовать колебания цен акций подобно температуре, беря, например, максимумы ежедневных падений цен (отрицательных логарифмических приращений) за неделю и усредняя по неделям и т. п.

Средние максимумы можно встретить не только в финансовой, но и в актуарной математике. В последние десятилетия особый интерес вызывает принцип Ванга [8, 9] подсчета страховых премий:

$$H_g(X) = \int\limits_{-\infty}^{0} \left(g\left(S_X(t)\right) - 1\right)\, dt + \int\limits_{0}^{+\infty} g\left(S_X(t)\right)\, dt\,,$$

где $g(u)$ — так называемая функция искажения; $S_X(t) = \mathsf{P}(X > t)$ — функция выживания для страхового риска X. В случае дуально-степенной функции искажения $g(u) = 1 - (1-u)^n$ получаем $H_g(X) = \mu_n(X)$. Практически это означает, что компания ориентируется на худший из n возможных случаев в смысле объема страховых выплат.

Отметим также приложения в задачах надежности [10]. Пусть имеется основной элемент и один или несколько резервных, работающих в одном режиме с основным (нагруженный, или «горячий», резерв). Если система выходит из строя, только когда все элементы выходят из строя, то время ее безотказной работы равно максимальному из времен безотказной работы элементов.

Интересные приложения средних максимумов встречаются и в теории массового обслуживания. Рассмотрим систему из n приборов, в которую поступают заявки. Очередная поступившая на обработку заявка делится на n подзаявок, каждая из которых обслуживается одним из приборов. Существуют две стандартные модели обработки подзаявок: модель fork-join [11] и модель split-merge [12].

В модели fork-join каждая подзаявка Z_i заявки Z отправляется в соответствующую очередь ровно в тот момент, когда Z поступила в систему. При этом некоторые приборы могут все еще обрабатывать подзаявки предыдущих заявок, поэтому отрезок времени, который каждая подзаявка проводит в системе, делится на две части: время ожидания (нахождение в очереди, пока обслуживаются подзаявки от предыдущих заявок) и непосредственно время обслуживания. Этот суммарный отрезок называется *временем пребывания* подзаявки в системе или *временем отклика*. Значит, время пребывания целой заявки в системе — это максимум из времен отклика по каждой из подзаявок. Вообще говоря, времена пребывания T_i подзаявок Z_i в системе не являются независимыми. Однако они являются положительно зависимыми (или ассоциированными), а потому математическое ожидание их максимума оценивается сверху средним максимумом независимых случайных величин с тем же распределением. Поэтому важной характеристикой модели является средний максимум из независимых случайных величин с распределениями времен отклика по каждой из подзаявок.

В модели split-merge обслуживание очередной заявки Z не начнется, пока не будут обработаны все подзаявки предыдущей заявки. Таким образом, время обслуживания целой заявки в системе — это максимум из времен T_i' обслуживания каждой ее подзаявки, причем T_i' независимы между собой. Значит, среднее время обслуживания заявки — это просто средний максимум времен обслуживания ее подзаявок.

Один из ярких примеров применения моделей fork-join и split-merge — облачные технологии. Пусть обработка данных производится на удаленном сервере, причем применяется параллельное программирование и алгоритм работает в нескольких параллельных потоках. Ясно, что в данном случае система может описываться одной из этих моделей. Отметим недавние работы отечественных ученых на эту тему [13–16].

Упомянем здесь технологию виртуализации данных RAID (Redundant Array of Inexpensive Disks, Redundant Array of Independent Disks) [17], которая объединяет несколько жестких дисков в один логический элемент для повышения надежности и производительности. На базовом уровне RAID 1 имеется массив из двух или более дисков, являющихся полными копиями (зеркалами) друг друга. Запись на диски происходит параллельно, однотипным образом. При чтении информацию можно брать по частям с разных дисков параллельно, что ускоряет процесс. Система имеет высокую надежность и работает до тех пор, пока функционирует хотя бы один диск в массиве. Таким образом, здесь имеет место сочетание надежностной схемы с резервированием и системы массового обслуживания с разделением заявок. Аналогичные технологии можно применять и при хранении информации на нескольких серверах, в интернете (зеркальные сайты и базы данных) и др.

Таким образом, становится ясно, что введенный объект (средние максимумы) представляет высокий научный интерес.

При решении задачи установления границ для μ_n с конечными средним и дисперсией без ограничения общности можно рассматривать случай нулевого среднего и единичной дисперсии. Действительно, пусть $\mathbf{E}X = a$, $\mathbf{D}X = \sigma^2$. Определим $X^* = (X - a)/\sigma$. Тогда для любого $n \geqslant 1$ верно

$$\mu_n(X) = a + \sigma\mu_n(X^*)$$

и по границам $\mu_n(X^*)$ можно однозначно определить границы $\mu_n(X)$.

Изучение границ средних максимумов имеет давнюю историю. Еще в работах [18, 19] для стандартизованных случайных величин было получено неравенство

$$0 < \mu_n(X) \leqslant \frac{n-1}{\sqrt{2n-1}}\,. \qquad (1)$$

Отметим, что для вычисления и оценок μ_n при больших n можно использовать асимптотический подход, который обсуждается, например, в [11, 20]. Однако при небольших n он не работает.

В [21] были найдены границы при условиях $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{E}|X|^p = 1$, $p > 1$. В обоих случаях верхние границы оказались достижимыми. Дальнейшие результаты были представлены тем же автором в [2].

Можно упомянуть и другие, более современные работы на близкую тематику. В частности, результат [22] о точной верхней границе среднего максимума набора, вообще говоря, разнораспределенных и зависимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ с известными математическими ожиданиями $\mathbf{E}X_i$ и дисперсиями $\mathbf{D}X_i$, работу [3] о границах средних максимумов коррелированных нормальных случайных величин, а также работы [23, 24] о границах средних порядковых статистик при стареющих распределениях.

В работе [25] приведена верхняя граница для μ_n при более сильных ограничениях: кроме условий $\mathbf{E}X = 0$ и $\mathbf{D}X = 1$ предполагается, что известны μ_m и μ_p, где $m, p > 1$. В этом случае справедливо:

$$\mu_n \leqslant (n-1)\sqrt{\frac{1}{2n-1} - \tau}\,,$$

где

$$\tau = \left(\frac{m-1}{m+n-1}\,\mu_p - \frac{p-1}{p+n-1}\,\mu_m\right)^2 \Bigg/ \left(\frac{(m-1)^2}{2m-1}\,\mu_p^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(p-1)^2}{2p-1}\,\mu_m^2 - 2\frac{(m-1)(p-1)}{m+p-1}\,\mu_p\mu_m\right)\,.$$

Заметим, что при $p = 1$ и $\mu_1 = 0$ задача сводится к случаю известного среднего максимума по одной выборке, а не по двум, но приведенная формула в этом случае, к сожалению, неприменима. Границы μ_n при таких ограничениях независимо от [25] были получены в [26]. Примечательно, что в этом случае найдена не только верхняя граница, но и нижняя.

Итак, согласно [26], при $n > m$ имеем:

$$\mu_n \leqslant \frac{n-1}{(m-1)(n+m-1)} \left((2m-1)\mu_m + \right.$$
$$\left. + \frac{n-m}{2n-1} \sqrt{(2n-1)(2m-1)\left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \mu_m^2\right)} \right);$$

$$\mu_n \geqslant \max\left\{ \mu_m, \frac{n-1}{(m-1)(n+m-1)} \left((2m-1)\mu_m - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{n-m}{2n-1} \sqrt{(2n-1)(2m-1)\left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \mu_m^2\right)} \right) \right\}.$$

При $n < m$ имеем:

$$\mu_n \leqslant \min\left\{ \mu_m, \frac{n-1}{(m-1)(n+m-1)} \left((2m-1)\mu_m + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{m-n}{2n-1} \sqrt{(2n-1)(2m-1)\left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \mu_m^2\right)} \right) \right\};$$

$$\mu_n \geqslant \max\left\{ 0, \frac{n-1}{(m-1)(n+m-1)} \left((2m-1)\mu_m - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{m-n}{2n-1} \sqrt{(2n-1)(2m-1)\left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \mu_m^2\right)} \right) \right\}.$$

Более того, в [26] показано, что при $m = 2$ криволинейную границу из верхней оценки μ_n можно частично заменить прямолинейной:

$$\mu_n \leqslant \min\left\{ (n-1)\mu_2, \frac{n-1}{n+1} \left(3\mu_2 + \frac{n-2}{2n-1} \sqrt{3(2n-1)\left(\frac{1}{3} - \mu_2^2\right)} \right) \right\}.$$

Потребность в оценке одних средних максимумов по другим может возникать в различных указанных выше приложениях.

Если речь идет о страховых или финансовых рисках (случайных величинах потерь), которые ранее оценивались по одной системе (средних максимумов с m), а планируется перейти на новую (средних максимумов с n), то возникает вопрос, как сильно от этого изменятся страховые премии или финансовые решения. Можно ли утверждать, что какие-то риски, считавшиеся ранее более высокими, чем какие-то другие, по-прежнему будут считаться большими или их порядок может измениться? Оказывается, может быть по-разному в зависимости от соотношения средних максимумов.

Применительно к надежностным схемам с резервированием оценки средних максимумов могут быть полезны в случае, если имеется статистика по среднему времени работы систем с известным числом резервных элементов, это число собираются изменить и нужно оценить возможный эффект.

Аналогично в моделях с разделением заявок речь может идти об изменении числа подзаявок, на которые разделяется заявка, при сохранении распределения времени обслуживания. Такое возможно, если речь идет о дублировании однотипных операций (например, в технологии RAID).

С одной стороны, оценки средних максимумов могут показаться грубыми, но, с другой стороны, они не требует знания точного распределения случайных величин или даже класса распределения, а опираются лишь на моментные характеристики. В этом смысле их можно сравнить с неравенством Чебышева и его разнообразными аналогами, известными в теории вероятностей.

Стоит, однако, отметить, что авторы работ [25, 26] не касались вопроса достижимости границ и их точности. Настоящая работа призвана по возможности восполнить этот пробел.

Далее будем рассматривать случайные величины X с $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{D}X = 1$ и известным средним максимумом μ_m. Попробуем определить, в каких пределах может изменяться μ_n при различных μ_m. Обозначим точную верхнюю границу μ_n при заданных условиях через $\overline{\mu}_n$, а точную нижнюю — через $\underline{\mu}_n$. Будем также обозначать через $x(F)$ функцию, обратную к функции распределения F случайной величины. Более точно,

$$x(u) = \inf\{t:\ F(t) \geqslant u\}\,.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \mu_k(X) = \int\limits_0^1 x(F)\,dF^k = \int\limits_0^1 kF^{k-1}x(F)\,dF\,;\\ \int\limits_0^1 x(F)\,dF = 0\,; \quad \int\limits_0^1 x^2(F)\,dF = 1\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Настоящая статья продолжает исследование границ средних максимумов при заданных условиях. В частности, приведены и доказаны условия достижимости границ, полученных в [26]. В случае, когда эти условия не выполняются, предложен подход к уточнению границ, а именно: оценка снизу для верхней границы и оценка сверху для нижней границы.

2 Достижимость границ

В силу (2) задача на экстремумы μ_n при известном μ_m, нулевом среднем и единичной дисперсии может рассматриваться как задача вариационного исчисления относительно функции $x(F)$ и решаться методом множителей Лагранжа.

Согласно результату [26] экстремали для μ_n имеют вид:

$$x(F) = a\left(1 - nF^{n-1}\right) + b\left(1 - mF^{m-1}\right)\,, \tag{3}$$

где либо

$$a = -\frac{n+m-1}{(n-1)(m-1)}\sqrt{\frac{(2n-1)(2m-1)}{(n-m)^2}\left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \mu_m^2\right)}\,; \tag{4}$$

$$b = \frac{2m-1}{(m-1)^2}\left(-\mu_m + \sqrt{\frac{(2n-1)(2m-1)}{(n-m)^2}\left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \mu_m^2\right)}\right)\,, \tag{5}$$

либо

$$a = \frac{n+m-1}{(n-1)(m-1)}\sqrt{\frac{(2n-1)(2m-1)}{(n-m)^2}\left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \mu_m^2\right)}\,; \tag{6}$$

$$b = \frac{2m-1}{(m-1)^2}\left(-\mu_m - \sqrt{\frac{(2n-1)(2m-1)}{(n-m)^2}\left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \mu_m^2\right)}\right)\,. \tag{7}$$

Соответствующие верхнее и нижнее значения μ_n записываются следующим образом:

$$\mu_n = -a\frac{(n-1)^2}{2n-1} - b\frac{(n-1)(m-1)}{n+m-1} = \frac{n-1}{(m-1)(n+m-1)}\left((2m-1)\mu_m \pm \right.$$
$$\left. \pm |n-m|\sqrt{\frac{2m-1}{2n-1}\left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \mu_m^2\right)}\right)\,. \tag{8}$$

Важно отметить, что полученное выражение (8) — действительно верхняя (нижняя) грань для среднего максимума из n величин, т. е. глобальный экстремум. Это также было показано в [26] с помощью неравенства Коши–Буняковского. Однако метод Лагранжа применяется без учета вероятностного смысла, так что выражение (3) необязательно задает вероятностное распределение: для этого необходимо, чтобы функция $x(F)$ не убывала по F. Выясним, когда это так.

Если подставить выражения для a и b в (8), то станет понятно, что верхняя грань получается, когда a и b задаются формулами (4) и (5), а нижняя — когда они задаются формулами (6) и (7). Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $m < n$. Тогда если*

$$\mu_m \in \left[\frac{(m-1)\sqrt{2n-1}}{(n+m-1)}, \frac{m-1}{\sqrt{2m-1}}\right],$$

то

$$\overline{\mu}_n = \frac{n-1}{(m-1)(n+m-1)}\Bigg((2m-1)\mu_m + \\ + \frac{n-m}{2n-1}\sqrt{(2n-1)(2m-1)\left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \mu_m^2\right)}\Bigg).$$

Если же

$$\mu_m \in \left[\frac{(m-1)(n+2m-1)\sqrt{2n-1}}{\sqrt{(2m-1)(n+m-1)(1+2m^2-3m-3n+6mn+2n^2)}}, \frac{m-1}{\sqrt{2m-1}}\right],$$

то

$$\underline{\mu}_n = \frac{n-1}{(m-1)(n+m-1)}\Bigg((2m-1)\mu_m - \\ - \frac{n-m}{2n-1}\sqrt{(2n-1)(2m-1)\left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \mu_m^2\right)}\Bigg).$$

Доказательство. Коль скоро $x(F)$ — многочлен, эта функция является всюду дифференцируемой. Выпишем условие неотрицательности ее производной:

$$x'(F) = -an(n-1)F^{n-2} - bm(m-1)F^{m-2} = \\ = -F^{m-2}\left(an(n-1)F^{n-m} + bm(m-1)\right) \geqslant 0.$$

Функция $an(n-1)F^{n-m} + bm(m-1)$ монотонна по F при $F \in [0,1]$. Поэтому для того, чтобы $x'(F) \geqslant 0$ на $[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} an(n-1) + bm(m-1) &\leqslant 0\,;\\ bm(m-1) &\leqslant 0\,. \end{aligned}$$

Как уже было отмечено, величине $\overline{\mu}_n$ соответствуют a и b, задаваемые формулами (4) и (5). Подставив выражения (4) и (5), получим систему неравенств на μ_m:

$$\frac{m\mu_m(1-2m) - (n+2m-1)\sqrt{(2n-1)\left(1+m^2+\mu_m^2 - 2m\left(1+\mu_m^2\right)\right)}}{m-1} \leqslant 0;$$

$$\frac{m(2m-1)}{m-1}\left(-\mu_m + \sqrt{\frac{(2n-1)(2m-1)}{(n-m)^2}\left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \mu_m^2\right)}\right) \leqslant 0.$$

Заметим, что в силу того, что $n > m > 1$ и $\mu_m \geqslant 0$, первое неравенство верно всегда. Второе же неравенство эквивалентно

$$\mu_m \geqslant \sqrt{\frac{(2n-1)(2m-1)}{(n-m)^2}\left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \mu_m^2\right)}.$$

Разрешив его, получим искомый диапазон для μ_m, соответствующий верхней границе.

Что касается нижней границы $\underline{\mu}_n$, то ей соответствуют a и b, задаваемые формулами (6) и (7). Подставим выражения (6) и (7) в систему и получим новую систему неравенств на μ_m:

$$\frac{m\mu_m(1-2m) + (n+2m-1)\sqrt{(2n-1)\left(1+m^2+\mu_m^2 - 2m(1+\mu_m^2)\right)}}{m-1} \leqslant 0\,;$$

$$\frac{m(2m-1)}{m-1}\left(-\mu_m - \sqrt{\frac{(2n-1)(2m-1)}{(n-m)^2}\left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \mu_m^2\right)}\right) \leqslant 0\,.$$

Заметим, что в силу того, что $n > m > 1$ и $\mu_m \geqslant 0$, второе неравенство верно всегда. Первое же неравенство эквивалентно

$$\frac{m(2m-1)}{n+2m-1}\mu_m \geqslant \sqrt{(2n-1)\left(1+m^2+\mu_m^2 - 2m(1+\mu_m^2)\right)}\,.$$

Разрешив его, получим искомый диапазон для μ_m, соответствующий нижней границе. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Если* $m > n$ *и*

$$\mu_m \in \left[\frac{(m-1)(n+2m-1)\sqrt{2n-1}}{\sqrt{(2m-1)(n+m-1)(1+2m^2-3m-3n+6mn+2n^2)}}, \frac{m-1}{\sqrt{2m-1}} \right],$$

то

$$\overline{\mu}_n = \frac{n-1}{(m-1)(n+m-1)} \Bigg((2m-1)\mu_m + \\ + \frac{m-n}{2n-1}\sqrt{(2n-1)(2m-1)\left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \mu_m^2\right)} \Bigg) .$$

Нижняя же граница

$$\underline{\mu}_n = \frac{n-1}{(m-1)(n+m-1)} \Bigg((2m-1)\mu_m - \\ - \frac{m-n}{2n-1}\sqrt{(2n-1)(2m-1)\left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \mu_m^2\right)} \Bigg)$$

достигается лишь для максимального значения

$$\mu_m = \frac{m-1}{\sqrt{2m-1}} .$$

Доказательство. Коль скоро $x(F)$ — многочлен, эта функция является всюду дифференцируемой. Выпишем условие неотрицательности ее производной:

$$x'(F) = -an(n-1)F^{n-2} - bm(m-1)F^{m-2} = \\ = -F^{n-2}\left(an(n-1) + bm(m-1)F^{m-n}\right) .$$

Функция $an(n-1) + bm(m-1)F^{m-n}$ монотонна по F при $F \in [0,1]$. Поэтому для того, чтобы $x'(F) \geqslant 0$ на $[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$an(n-1) + bm(m-1) \leqslant 0\,; \\ an(n-1) \leqslant 0\,.$$

Таблица 1 Пороговые значения для верхних границ ($\overline{\mu}_n$)

m	n		
	3	4	5
2	$\dfrac{\sqrt{5}}{4} \approx 0{,}559$	$\dfrac{\sqrt{7}}{5} \approx 0{,}529$	$0,5$
3	—	$\dfrac{\sqrt{7}}{3} \approx 0{,}882$	$\dfrac{6}{7} \approx 0{,}857$

Таблица 2 Пороговые значения для нижних границ ($\underline{\mu}_n$)

m	n		
	3	4	5
2	$\dfrac{\sqrt{5}}{4} \approx 0{,}559$	$7\sqrt{\dfrac{7}{1065}} \approx 0{,}568$	$\dfrac{4}{7} \approx 0,571$
3	—	$3\sqrt{\dfrac{7}{85}} \approx 0{,}861$	$\dfrac{4}{\sqrt{21}} \approx 0{,}873$

Дальнейшее доказательство повторяет шаги доказательства теоремы 1, а именно: для получения диапазона μ_m для достижимости верхней границы разрешим систему, подставив выражения (4) и (5) для a и b. Для получения диапазона μ_m для достижимости нижней границы разрешим систему, подставив выражения (6) и (7) для a и b. Теорема доказана. $\square$

Отметим, что правые концы промежутков μ_m, на которых достигаются границы, совпадают с верхней оценкой μ_m, полученной в [18, 19]. Таким образом, при всяком m существуют пороговые значения $\hat{\mu}_m$ (для верхней границы) и $\check{\mu}_m$ (для нижней границы) такие, что для всех μ_m, превосходящих или равных $\hat{\mu}_m$ ($\check{\mu}_m$), можно говорить о достижимости верхней (нижней) границы, полученной в [26].

В табл. 1 и 2 представлены пороговые значения для достижимости верхней и нижней границ при $m \in \{2, 3\}$, $n \in \{3, 4, 5\}$. В частности, при $m = 2$ и $n = 3$ пороговые значения для верхней и нижней границ совпадают и равны $\sqrt{5}/4$, однако в общем случае это не так.

3 Уточнение границ

Открытым остается вопрос о том, что происходит, если условия теорем не выполняются. Оптимальное решение $x(F)$, полученное методом вариационного исчисления, имеет вид многочлена (3) на отрезке $[0, 1]$, который, к сожалению, может как возрастать, так и убывать, тогда как вероятностный смысл имеет только возрастающая ветвь. В связи с этим для получения дальнейших оценок предлагается заменить убывающую часть константой.

Назовем базовой случайную величину X^0, принимающую значения от 0 до 1. Тогда для ее обратной функции распределения справедливо

$$x^0(0) = 0\,; \quad x^0(1) = 1\,.$$

Определим

$$X = \frac{X^0 - \mathbf{E}X^0}{\sqrt{\mathbf{D}X^0}}\,, \tag{9}$$

тогда случайная величина X принимает значения на некотором конечном отрезке и $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{D}X = 1$. Но верно и обратное: любая случайная величина X, принимающая значения на некотором конечном отрезке и такая, что $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{D}X = 1$, представима в виде (9) с некоторой базовой случайной величиной X^0, при этом

$$\mu_n(X) = \frac{\mu_n(X^0) - \mathbf{E}X^0}{\sqrt{\mathbf{D}X^0}}\,. \tag{10}$$

Поэтому удобно исследовать базовые случайные величины, а потом пересчитывать для них средние максимумы по формуле (10).

Далее будем рассматривать случай $m < n$. Докажем следующее утверждение.

Теорема 3. I. *Пусть*

$$\alpha(a,m,n) = -a^{2(m+n)}(m-1)(n-1)(n-m)^2 - 2a^{m+2n}n(n-1)(n-m) + {}$$
$$+ 2a^{2m+n}m(m-1)(n-m) - \frac{2a^{m+n}mn(m-1)(n-1)}{m+n-1} + {}$$
$$+ \frac{a^{2n}n^2(m-1)(n-1)}{2m-1} + \frac{a^{2m}m^2(m-1)(n-1)}{2n-1} + {}$$
$$+ \frac{2a^{2(m+n)-1}m^2n^2(n-m)^2(2m+2n-3)}{(2m-1)(2n-1)(m+n-1)}\,;$$

$$\beta(a,m,n) =$$
$$= \sqrt{\frac{(m-1)(n-1)}{\alpha(a,m,n)}}\,\mathrm{sgn}\left\{a^{m+1}(m-1) - a^{n+1}(n-1) + a^{m+n}(n-m)\right\},$$

где функция $\mathrm{sgn}(\cdot)$ *обозначает знак. Кроме того, пусть*

$$\hat{\mu}(a,m,n,k) = \frac{\beta(a,m,n)}{(k+m-1)(k+n-1)}\big(a^m m(k-1)(k+m-1) - \\ - a^n n(k-1)(k+n-1) + a^{m+n}(n-m)(k+m-1)(k+n-1) - \\ - a^{k+m+n-1}mn(n-m)\big)\,.$$

Тогда при $\mu_m = \hat{\mu}(a,m,n,m)$ *справедливо*

$$\overline{\mu}_n \geqslant \hat{\mu}(a,m,n,n)\,.$$

II. *Пусть*

$$\delta(a,m,n) = 1 - a - \left(\frac{a(m-1)(n-1)}{mn} - 1\right)^2 + \\ + \frac{a\left(5 + m(2m-7) - 7n + 6mn + 2n^2\right)}{(2m-1)(2n-1)(m+n-1)}\,;$$

$$\check{\mu}(a,m,n,k) = \frac{(m-1)(n-1)}{\sqrt{\delta(a,m,n)}}\left(\frac{a}{mn} - \frac{a^k}{(k+m-1)(k+n-1)}\right).$$

Тогда при $\mu_m = \check{\mu}(a,m,n,m)$ *справедливо*

$$\underline{\mu}_n \leqslant \check{\mu}(a,m,n,n)\,.$$

Доказательство. Согласно (3) экстремали задачи Лагранжа имеют вид многочленов:

$$\varphi(F) = c_0 + c_1 F^{m-1} + c_2 F^{n-1},$$

которые, вообще говоря, необязательно не убывают на отрезке $[0,1]$. Посмотрим на эти многочлены поближе. Будем считать, что $c_2 \neq 0$.

Имеем:

$$\varphi'(F) = c_1(m-1)F^{m-2} + c_2(n-1)F^{n-2} = \\ = F^{m-2}\left(c_1(m-1) + c_2(n-1)F^{n-m}\right)\,; \quad (11)$$

$$\varphi''(F) = c_1(m-1)(m-2)F^{m-3} + c_2(n-1)(n-2)F^{n-3} = \\ = F^{m-3}\left(c_1(m-1)(m-2) + c_2(n-1)(n-2)F^{n-m}\right)\,. \quad (12)$$

Из (11) следует, что у функции $\varphi(F)$ может быть лишь одна точка локального экстремума $F_0 > 0$: либо максимум, либо минимум. Равенство (12), в свою очередь, означает, что у функции $\varphi(F)$ на положительной полуоси есть лишь одна точка перегиба, причем она не совпадает с локальным экстремумом.

Рассмотрим два класса вспомогательных базовых функций.

Первый класс охватывает те ситуации, когда у базовой функции $\varphi(F)$ локальный минимум в точке $F = a \in (0,1)$:

$$(A): \quad \begin{cases} \varphi_1(a) = 0\,; \\ \varphi_1'(a) = 0\,; \\ \varphi_1(1) = 1\,. \end{cases}$$

Второй класс соответствует базовым функциям $\varphi(F)$ с локальным максимумом в точке $F = a \in (0,1)$:

$$(B): \quad \begin{cases} \varphi_2(0) = 0\,; \\ \varphi_2(a) = 1\,; \\ \varphi_2'(a) = 0\,. \end{cases}$$

В обеих ситуациях из системы условий можно вывести формулы для коэффициентов c_0, c_1 и c_{n-1}. Так, в случае (A) получаем, что

$$\varphi_1(a,m,n,F) = \frac{a^{m+n}(n-m) - (n-1)a^{n+1}F^{m-1} + (m-1)a^{m+1}F^{n-1}}{(m-1)a^{m+1} - (n-1)a^{n+1} + a^{m+n}(n-m)}\,,$$

а в случае (B) —

$$\varphi_2(a,m,n,F) = \frac{(n-1)F^{m-1}}{(n-m)a^{m-1}} - \frac{(m-1)F^{n-1}}{(n-m)a^{n-1}}\,.$$

Изложенные рассуждения побуждают рассмотреть два класса вероятностных распределений, задаваемых обратными функциями распределения.

Верхняя граница. Для первого класса случайных величин, уточняющего верхнюю границу μ_n, имеем

$$(A): \quad x_1^0(a,m,n,F) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant F \leqslant a\,; \\ \varphi_1(a,m,n,F), & a \leqslant F \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Для наглядности представим графики (рис. 1) обратной функции распределения случайной величины X_1 для $(m,n,a) = (2,3,0{,}5)$ и $(m,n,a) = (2,4,0{,}5)$. Пунктиром отмечено продолжение функции $\varphi_1(a,m,n,F)$ там, где она заменена нулем.

Для случайной величины с этим вероятностным распределением справедливо

$$\mathbf{E}X_1^0(a,m,n) = \int\limits_0^1 x_1^0(a,m,n,F)\,dF = \int\limits_a^1 \varphi_1(a,m,n,F)\,dF =$$
$$= \frac{mn(n-m)(1-a)a^{m+n} - n(n-1)a^{n+1}(1-a^m) + m(m-1)a^{m+1}(1-a^n)}{mn((m-1)a^{m+1} - (n-1)a^{n+1} + a^{m+n}(n-m))};$$

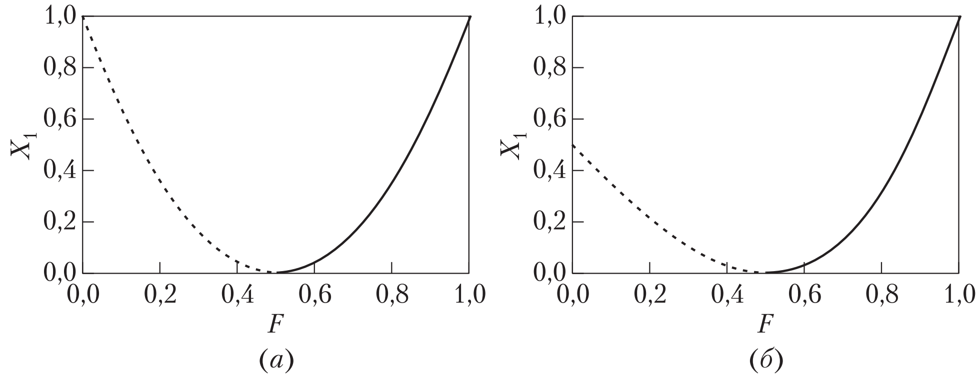


Рис. 1 Графики обратной функции распределения случайной величины X_1 для $(m, n, a) = (2, 3, 0{,}5)$ (*а*) и $(m, n, a) = (2, 4, 0{,}5)$ (*б*)

$$\mathbf{D}X_1^0(a,m,n) = \int\limits_0^1 \left(x_1^0(a,m,n,F)\right)^2 dF - \left(\mathbf{E}X_1^0(a,m,n)\right)^2 =$$

$$= \int\limits_a^1 (\varphi_1(a,m,n,F))^2 \, dF - \left(\mathbf{E}X_1^0(a,m,n)\right)^2 =$$

$$= \frac{(m-1)(n-1)\alpha(a,m,n)}{\left(mn(a^m(m-1) + a^n(1-n+a^{m-1}(n-m)))\right)^2};$$

$$\mu_k\left(X_1^0(a,m,n)\right) = \int\limits_0^1 kF^{k-1}x_1^0(a,m,n,F)\,dF = \int\limits_a^1 kF^{k-1}\varphi_1(a,m,n,F)\,dF =$$

$$= k\left(-\frac{a^{n+1}(n-1)}{k+m-1} + \frac{a^{m+1}(m-1)}{k+n-1} - \frac{a^{k+m+n}(m-1)(n-1)(n-m)}{k(k+m-1)(k+n-1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{a^{m+n}(n-m)}{k}\right) \Bigg/ \left((m-1)a^{m+1} - (n-1)a^{n+1} + a^{m+n}(n-m)\right).$$

Но пока рассмотрена лишь базовая случайная величина X_1^0. Никаких ограничений на математическое ожидание и дисперсию не накладывается, в то время как исходная задача сформулирована для стандартизованных величин. Рассмотрим случайную величину $X_1 = (X_1^0 - \mathbf{E}X_1^0)/\sqrt{\mathbf{D}X_1^0}$. Она стандартизована, а средние максимумы для нее получаются из средних максимумов для X_1^0 тем же линейным преобразованием, что и сама X_1 получается из X_1^0:

$$\mu_k\left(X_1(a,m,n)\right) = \frac{\mu_k\left(X_1^0(a,m,n)\right) - \mathbf{E}X_1^0(a,m,n)}{\sqrt{\mathbf{D}X_1^0(a,m,n)}}\,.$$

Вычислив значение этого выражения, получим в точности оценку для верхней границы из условия теоремы, а именно:

$$\mu_m\left(X_1(a,m,n)\right) = \hat{\mu}(a,m,n,m)\,;$$
$$\mu_n\left(X_1(a,m,n)\right) = \hat{\mu}(a,m,n,n)\,.$$

Таким образом, предъявлена случайная величина X_1 с $\mu_m(X_1)$ из условия теоремы, для которой значение $\mu_n(X_1)$ совпадает с оценкой для верхней границы $\mu_n(X_1)$. Последнее доказывает часть I теоремы.

Нижняя граница. Для случайных величин из второго класса в свою очередь справедливо

$$(B):\quad x_2^0(a,m,n,F) = \begin{cases} \varphi_2(a,m,n,F), & 0 \leqslant F \leqslant a\,;\\ 1, & a \leqslant F \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Для наглядности представим графики (рис. 2) обратной функции распределения случайной величины X_2 для $(m,n,a) = (2,3,0{,}5)$ и $(m,n,a) = (2,4,0{,}5)$. Пунктиром отмечено продолжение функции $\varphi_2(a,m,n,F)$ там, где она заменена единицей.

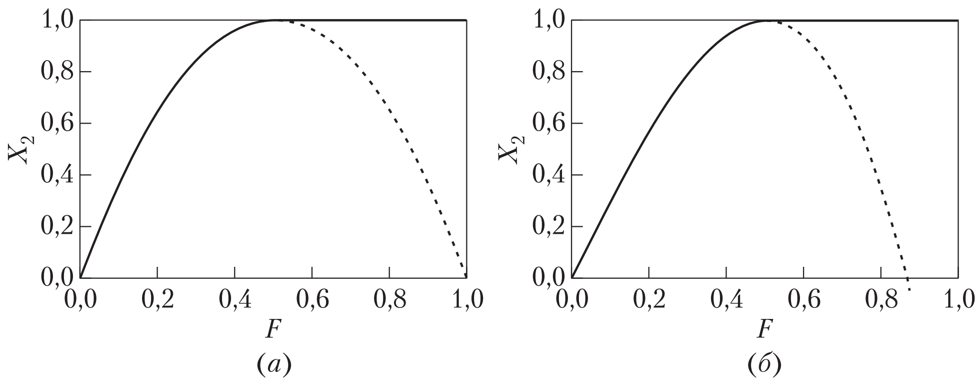


Рис. 2 Графики обратной функции распределения случайной величины X_2 для $(m,n,a) = (2,3,0{,}5)$ (*а*) и $(m,n,a) = (2,4,0{,}5)$ (*б*)

Для случайной величины с этим вероятностным распределением справедливо:

$$\mathbf{E}X_2^0(a,m,n) = \int\limits_0^1 x_2^0(a,m,n,F)\,dF =$$
$$= \int\limits_0^a \varphi_2(a,m,n,F)\,dF + 1 - a = 1 + \frac{a(m+n-mn-1)}{mn}\,;$$

$$\mathbf{D}X_2^0(a,m,n) = \int\limits_0^1 \left(x_2^0(a,m,n,F)\right)^2\,dF - \left(\mathbf{E}X_2^0(a,m,n)\right)^2 =$$
$$= 1 - a + \int\limits_0^a \left(\varphi_2^0(a,m,n,F)\right)^2\,dF - \left(\mathbf{E}X_2^0(a,m,n)\right)^2 = \delta(a,m,n)\,;$$

$$\mu_k\left(X_2^0(a,m,n)\right) = \int\limits_0^1 kF^{k-1}x_2^0(a,m,n)\,dF =$$
$$= \int\limits_0^a kF^{k-1}\varphi_2(a,m,n) + 1 - a^k = 1 - \frac{a^k(m-1)(n-1)}{(k+m-1)(k+n-1)}\,.$$

Рассмотрим теперь случайную величину $X_2 = (X_2^0 - \mathbf{E}X_2^0)/\sqrt{\mathbf{D}X_2^0}$. Она стандартизована, а средние максимумы для нее получаются из средних максимумов для X_2^0 тем же линейным преобразованием, что и сама X_2 получается из X_2^0:

$$\mu_k\left(X_2(a,m,n)\right) = \frac{\mu_k\left(X_2^0(a,m,n)\right) - \mathbf{E}X_2^0(a,m,n)}{\sqrt{\mathbf{D}X_2^0(a,m,n)}} =$$
$$= \frac{(m-1)(n-1)}{\sqrt{\delta(a,m,n)}}\left(\frac{a}{mn} - \frac{a^k}{(k+m-1)(k+n-1)}\right) = \check{\mu}(a,m,n,k)\,.$$

Таким образом, как и в случае верхней границы, предъявлена случайная величина X_2 с $\mu_m(X_2)$ из условия теоремы, для которой значение $\mu_n(X_2)$ совпадает с оценкой для нижней границы $\mu_n(X_2)$. Теорема доказана. $\square$

В [26] было помимо всего прочего приведено уточнение границ μ_n для случая $m = 2$. Так, в дополнение к ограничению сверху оказывается, что

$$\mu_n \leqslant (n-1)\mu_2\,.$$

Таблица 3 Значения средних максимумов

Распределения	n			
	2	3	4	5
Равномерное	$\dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{5} \approx 1{,}039$	$\dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}155$
Показательное	0,5	$\dfrac{5}{6} \approx 0,833$	$\dfrac{13}{12} \approx 1,083$	$\dfrac{77}{60} \approx 1,283$
Гауссовское	0,564	0,846	1,029	1,163
Граница (1)	$\dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$	$\dfrac{2}{\sqrt{5}} \approx 0{,}894$	$\dfrac{3}{\sqrt{7}} \approx 1{,}134$	$\dfrac{4}{3} \approx 1{,}333$

Кроме того, очевидно, что при $n \geqslant m$ справедливо

$$\mu_n \geqslant \mu_m\,. \tag{13}$$

Обобщение линейных оценок μ_n через μ_m для любых $2 \leqslant m < n$ следует из неравенства (11), полученного в [27]:

$$\mu_n \leqslant \frac{n-1}{m-1}\,\mu_m\,. \tag{14}$$

В табл. 3 представлены значения средних максимумов для стандартизованных случайных величин, имеющих классические распределения вероятности: равномерное, показательное и нормальное. Автором были получены общие формулы (для стандартизованных случайных величин) для равномерного распределения:

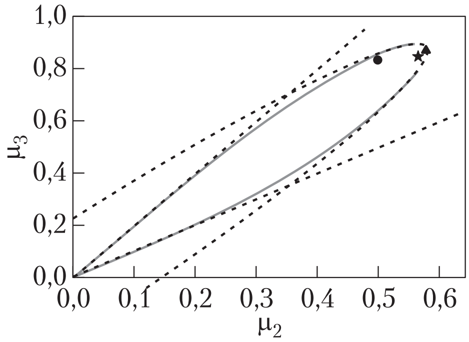
$$\mu_n(\xi) = \sqrt{3}\frac{n-1}{n+1}$$

и для показательного распределения:

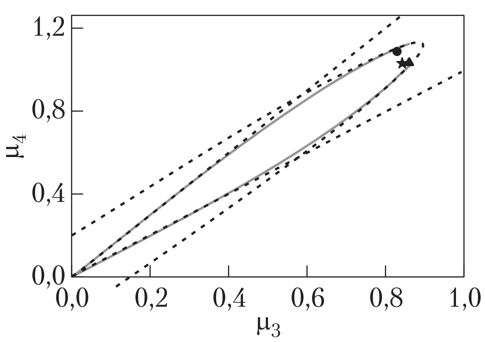
$$\mu_n(\eta) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\,.$$

Для стандартного нормального распределения значения средних максимумов были взяты из существующей таблицы [28, с. 169].

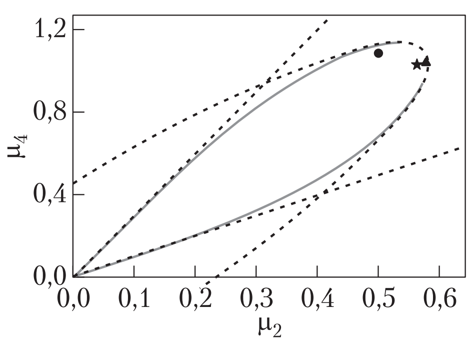
Построим совместные графики границ μ_n из [26] и кривых, уточняющих эти границы, полученных в настоящей статье. На рис. 3–5 пунктирной линией отмечены границы (8), (14), (13), а жирной — множество пар (μ_m, μ_n) для распределений X_1 и X_2 (т. е. верхняя кривая ограничивает $\overline{\mu}_n$ снизу, а нижняя ограничивает $\underline{\mu}_n$ сверху).



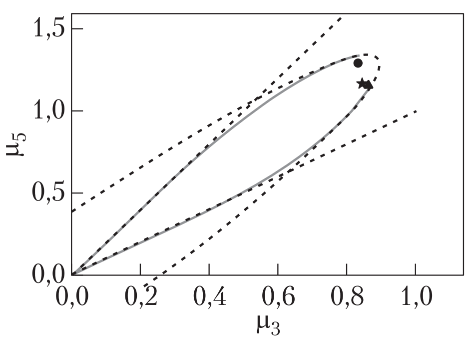
(а)



(а)

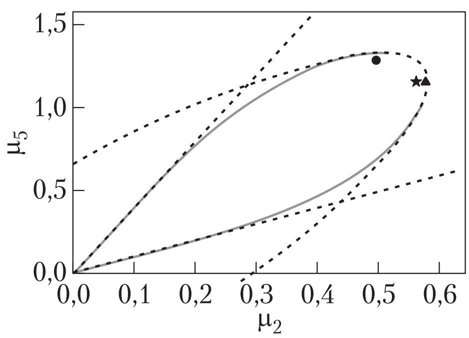


(б)



(б)

Рис. 4 Зависимости μ_4 (*а*) и μ_5 (*б*) от μ_3



(в)

Рис. 3 Зависимости μ_3 (*а*), μ_4 (*б*) и μ_5 (*в*) от μ_2

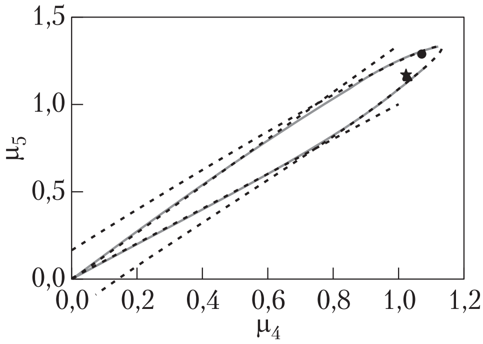


Рис. 5 Зависимость μ_5 от μ_4

Так, если на рисунке отражена зависимость $\mu_n = \mu_n(\mu_m)$, то верхняя жирная линия строится как параметрический график $(\hat{\mu}(a, m, n, m), \hat{\mu}(a, m, n, n))$, а нижняя — как параметрический график $(\check{\mu}(a, m, n, m), \check{\mu}(a, m, n, m))$.

Кроме того, внутри области на каждом рисунке отмечены три точки. Точка, обозначенная треугольником, соответствует равномерному распределению, кругом — показательному, а звездой — стандартному нормальному. Помимо всего прочего графики показывают, что рассмотренные классические распределения либо располагаются достаточно глубоко в области, в пределах которой меняются средние максимумы, и не дают новой информации о границах, либо имеют большое μ_m, как, например, равномерное распределение, и лежат в области достижимости границы, полученной в [26].

4 Заключение

Данная статья продолжает исследование границ средних максимумов из n стандартизованных независимых одинаково распределенных случайных величин при известном среднем максимуме из некоторого числа независимых случайных величин m того же распределения. Автором было показано, что при больших μ_m известные верхняя и нижняя границы, полученные методом вариационного исчисления [26], точны. Кроме того, предложена эвристика для эффективного расширения области достижимых значений среднего максимума μ_n. Для любых $m < n$ получены параметрические формулы, оценивающие верхнюю границу μ_n снизу, а нижнюю — сверху.

Автор выражает огромную благодарность А. В. Лебедеву за идеи, замечания и предложения.

Литература

1. *Волкова М. А., Кужевская И. В.* Климатология. Теоретические и прикладные аспекты. — Томск: ТГУ, 2011. Электронное издание.
2. *Arnold B. C.* Bounds on the expected maximum // Commun. Stat. Theor. M., 1988. Vol. 17. Iss. 7. P. 2135–2150.
3. *Ross A. M.* Computing bounds on the expected maximum of correlated normal variables // Methodol. Comput. Appl., 2010. Vol. 12. Iss. 1. P. 111–138.
4. *Borovkov K., Mishura Yu., Novikov A., Zhitlukhin M.* Bounds for expected maxima of Gaussian processes and their discrete approximations // Stochastics, 2017. Vol. 89. Iss. 1. P. 21–37.
5. *Cherny A. S., Madan D. B.* Coherent measurement of factor risks // arXiv.org, 2006. arXiv:math/0605062v1 [math.PR].
6. *Орлов Д. В.* О двух оценках одной меры риска // Теория вероятн. и ее примен., 2008. Т. 53. № 1. С. 168–172.
7. *Cherny A., Orlov D.* On two approaches to coherent risk contribution // Math. Financ., 2011. Vol. 21. Iss. 3. P. 557–571.

8. *Wang S. S.* Premium calculation by transforming the layer premium density // Astin Bull., 1996. Vol. 26. Iss. 1. P. 71–92.
9. *Ирхина Н. А.* Принцип Ванга в математической теории страхования: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2010. 137 с.
10. *Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.* Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. 524 с.
11. *Thomasian A.* Analysis of fork/join and related queueing systems // ACM Comput. Surv., 2014. Vol. 47. 17 p.
12. *Fiorini P. M., Lipsky L.* Exact analysis of some split-merge queues // Perf. E. R., 2015. Vol. 43. Iss. 2. P. 51–53.
13. *Горбунова А. В., Зарядов И. С., Матюшенко С. И., Самуйлов К. Е., Шоргин С. Я.* Аппроксимация времени отклика системы облачных вычислений // Информатика и её применения, 2015. Т. 9. Вып. 3. С. 32–38.
14. *Zaryadov I., Kradenyh A., Gorbunova A.* The analysis of cloud computing system as a queueing system with several servers and a single buffer // Analytical and computational methods in probability theory / Eds. D. B. Gnedenko, S. S. Demidov, A. M. Zubkov, V. A. Kashtanov. — Lecture notes in computer science ser. — Springer, 2017. Vol. 10684. P. 11–22.
15. *Meykhanadzhyan L., Matyushenko S., Pyatkina D., Razumchik R.* Revisiting joint stationary distribution in two finite capacity queues operating in parallel // Информатика и её применения, 2017. Т. 11. Вып. 3. С. 106–112.
16. *Осипов О. А., Тананко И. Е.* Сети массового обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований: случай бесконечноприборных систем обслуживания // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика, 2017. Вып. 4. С. 43–58.
17. *Patterson D. A., Gibson G., Katz R. H.* A case of redundant arrays of inexpensive disks. — Berkley, CA, USA: University of California, 1987. Technical Report CSD-87-391. 26 p.
18. *Gumbel E. J.* The maxima of the mean largest value and of the range // Ann. Math. Stat., 1954. Vol. 25. Iss. 1. P. 76–84.
19. *Hartley H. O., David H. A.* Universal bounds for mean range and extreme observation // Ann. Math. Stat., 1954. Vol. 25. Iss. 1. P. 85–99.
20. *Crow C. S., Goldberg D., Whitt W.* Two-moment approximations for maxima // Oper. Res., 2007. Vol. 55. Iss. 3. P. 532–548.
21. *Arnold B. C.* p-Norm bounds on the expectation of the maximum of possibly dependent sample // J. Multivariate Anal., 1985. Vol. 17. Iss. 3. P. 316–332.
22. *Bertsimas D.* Tight bounds on expected order statistics // Probab. Eng. Inform. Sc., 2006. Vol. 20. Iss. 4. P. 667–686.
23. *Rychlik T.* Maximal expectations of extreme order statistics from increasing density and failure rate populations // Commun. Stat. Theor. M., 2014. Vol. 43. Iss. 10–12. P. 2199–2213.
24. *Goroncy A., Rychlik T.* Evaluations of expectations of order statistics and spacings based on IFR distributions // Metrika, 2016. Vol. 79. Iss. 6. P. 635–657.
25. *Balakrishnan N.* Improving the Hartley–David–Gumbel bound for the mean of extreme order statistics // Stat. Probabil. Lett., 1990. Vol. 9. Iss. 4. P. 291–294.

26. *Григорьева М. А.* Условные границы мер риска в финансовой математике // Современные проблемы математики и механики. — М.: МГУ, 2015. Т. 10. № 3. С. 63–81.
27. *Huang J. S.* Sequence of expectations of maximum-order statistics // Stat. Probabil. Lett., 1998. Vol. 38. Iss. 2. P. 117–123.
28. *Рубин Г.* Моменты порядковых статистик и размаха в выборках из совокупности с нормальным распределением // Введение в теорию порядковых статистик / Пер. с англ.; под ред. А. Я. Боярского. — М.: Статистика, 1970. Гл. 12. С. 152–172. (*Ruben H.* The moments of the order statistics and of the range in samples from normal populations // Contributions to order statistics / Eds. A. E. Sarhan, B. G. Greenberg. — New York, NY, USA: Wiley, 1962. Ch. 10A.)

Поступила в редакцию 12.02.19

CONDITIONAL BOUNDS OF EXPECTED MAXIMA OF RANDOM VARIABLES AND THEIR REACHABILITY

D. V. Ivanov

Faculty of Mechanics and Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Main Building, 1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russian Federation

Abstract: The subject of this article is the expected maxima of an arbitrary number n of independent and identically distrubuted random variables. Probability distributions with zero mean and variance of 1 and with given value of the expected maximum of m independent random variables of this distribution are taken into consideration. The question of reachability of the boundaries obtained by other authors is investigated. In the cases of failure to derive the answer to this question, the obtained boundaries are specified. The problem might have various applications in queuing theory, insurance, finance, and other fields.

Keywords: expected maximum; reachability

DOI: 10.14357/08696527190112

References

1. Volkova, M. A., and I. V. Kuzhevskaya. 2011. *Klimatologia. Teoreticheskie i prikladnye aspecty* [Climatology. Theoretical and applied aspects]. Tomsk: Tomsk State University. Electronic edition.
2. Arnold, B. C. 1988. Bounds on the expected maximum. *Commun. Stat. Theor. M.* 17(7):2135–2150.
3. Ross, A. M. 2010. Computing bounds on the expected maximum of correlated normal variables. *Methodol. Comput. Appl.* 12(1):111–138.

4. Borovkov, K., Yu. Mishura, A. Novikov, and M. Zhitlukhin. 2017. Bounds for expected maxima of Gaussian processes and their discrete approximations. *Stochastics.* 89(1):21–37.
5. Cherny, A. S., and D. B. Madan. 2006. Coherent measurement of factor risks. Available at: http://arxiv.org/abs/math/0605062v1 (accessed April 5, 2019).
6. Orlov, D. 2009. On two estimates of a risk measure. *Theor. Probab Appl.* 53(1):169–173.
7. Cherny, A., and D. Orlov. 2011. On two approaches to coherent risk contribution. *Math. Financ.* 21(3):557–571.
8. Wang, S. S. 1996. Premium calculation by transforming the layer premium density. *Astin Bull.* 26(1):71–92.
9. Irkhina, N. 2010. Printsyp Wanga v matematicheskoy teorii strakhovaniya [Wang's principle in mathematical insurance theory]. Moscow: MSU. PhD Diss. 137 p.
10. Gnedenko, B. V., Yu. K. Belyayev, and A. D. Solovyev. 1969. *Mathematical methods of reliability theory.* 1st ed. New York, NY: Academic Press. 518 p.
11. Thomasian, A. 2014. Analysis of fork/join and related queueing systems. *ACM Comput. Surv.* 47. 17 p.
12. Fiorini, P. M., and L. Lipsky. 2015. Exact analysis of some split-merge queues. *Perf. E. R.* 43(2):51–53.
13. Gorbunova, A., I. Zaryadov, S. Matyushenko, K. Samouylov, and S. Shorgin. 2015. Approksimatsiya vremeni otklika sistemy oblachnykh vychisleniy [The approximation of response time of a cloud computing system]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 9(3):32–38.
14. *Zaryadov, I., A. Kradenyh, and A. Gorbunova.* 2017. The analysis of cloud computing system as a queueing system with several servers and a single buffer. *Analytical and computational methods in probability theory*. Eds. D. B. Gnedenko, S. S. Demidov, A. M. Zubkov, and V. A. Kashtanov. Lecture notes in computer science ser. Springer. 10684:11–22.
15. *Meykhanadzhyan, L., S. Matyushenko, D. Pyatkina, and R. Razumchik.* 2017. Revisiting joint stationary distribution in two finite capacity queues operating in parallel. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 11(3):106–112.
16. Osipov, O. A., and I. E. Tananko. 2017. Seti massovogo obsluzhivaniya proizvol'noy topologii s deleniem i sliyaniem trebovaniy: sluchay beskonechnopribornykh sistem obsluzhivaniya [Fork-join queueing networks with an arbitrary topology: The infinite server case]. *Herald of Tver State University. Ser. Appl. Math.* 4:43–58.
17. Patterson, D. A., G. Gibson, and R. H. Katz. 1987. A case of redundant arrays of inexpensive disks. Berkley, CA: University of California. Technical Report CSD-87-391. 26 p.
18. Gumbel, E. J. 1954. The maxima of the mean largest value and of the range. *Ann. Math. Stat.* 25(1):76–84.
19. Hartley, H. O., and H. A. David. 1954. Universal bounds for mean range and extreme observation. *Ann. Math. Stat.* 25(1):85–99.
20. Crow, C. S., D. Goldberg, and W. Whitt. 2007. Two-moment approximations for maxima. *Oper. Res.* 55(3):532–548.
21. Arnold, B. C. 1985. p-Norm bounds on the expectation of the maximum of possibly dependent sample. *J. Multivariate Anal.* 17(3):316–332.

22. Bertsimas, D. 2006. Tight bounds on expected order statistics. *Probab. Eng. Inform. Sc.* 20(4):667–686.
23. Rychlik, T. 2014. Maximal expectations of extreme order statistics from increasing density and failure rate populations. *Commun. Stat. Theor. M.* 43(10–12):2199–2213.
24. Goroncy, A., and T. Rychlik. 2016. Evaluations of expectations of order statistics and spacings based on IFR distributions. *Metrika* 79(6):635–657.
25. Balakrishnan, N. 1990. Improving the Hartley–David–Gumbel bound for the mean of extreme order statistics. *Stat. Probabil. Lett.* 9(4): 291–294.
26. Grigoryeva, M. 2015. Uslovnye granitsy mer riska v finansovoy matematike [Conditional boundaries of risk measure in financial mathematics]. *Sovremennye problemy matematiki i mekhaniki* [Modern Problems of Mathematics and Mechanics]. Moscow: MSU. 10(3):63–81.
27. Huang, J. S. 1998. Sequence of expectations of maximum-order statistics. *Stat. Probabil. Lett.* 38(2):117–123.
28. Ruben, H. 1962. The moments of the order statistics and of the range in samples from normal populations. *Contributions to order statistics.* Eds. A. E. Sarhan and B. G. Greenberg. New York, NY: Wiley. Ch. 10A.

Received February 12, 2019

Contributor

Ivanov Daniil V. (b. 1993) — PhD student, Department of Probability Theory, Faculty of Mechanics and Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Main Building, 1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russian Federation; ashtynbamba@gmail.com