В. Н. Масленникова, М. А. Тимошин, Обобщенные решения с первыми производными из L_p в задаче обтекания для системы Стокса, *Сиб. матем. журн.*, 1994, том 35, номер 1, 135–162

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 1994. Том 35, № 1

УДК 517.95

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ С ПЕРВЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ИЗ L_p В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ СТОКСА*)

В. Н. Масленникова, М. А. Тимошин

В работе строится L_p-теория, $1 < p < \infty$, для задачи обтекания нескольких тел стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости в постановке Стокса.

При нахождении поля скоростей в пространстве $L_p^1(\Omega)$ с соответствующей полунормой естественным образом возникают новые функциональные пространства соленоидальных векторных полей, свойства которых изучаются в работе. Принадлежность этим функциональным пространствам вектора скорости определяет вид потока на бесконечности. Доказываются новые априорные оценки для обобщенных решений поставленной задачи в неограниченной области с компактной границей. Строится в явном виде решение для внешности шара, при этом находится число линейно независимых решений однородной задачи. Размерность ядра соответствующего оператора в различных функциональных пространствах определяется сначала для внешности шара, а затем для произвольной неограниченной области с компактной границей. Доказывается, что как размерность ядра, так и размерность коядра зависят от показателя p, при этом промежутки p для найденных размерностей ядра и коядра различны, т. е. задача имеет ненулевой индекс.

§ 1. Постановка задачи, определение функциональных пространств и обобщенных решений

В работе рассматривается линеаризованная задача обтекания конечного числа ограниченных тел с гладкими поверхностями стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости, т. е. краевая задача для системы Стокса вида

$$-\nu\Delta V + \nabla q = f(x), \quad \operatorname{div} V = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$V|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где $V(x) = (V_1, V_2, V_3)$ — векторное поле скоростей, $q(x)$ — давление, $f(x) = (f_1, f_2, f_3)$ — векторное поле внешних сил, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$,

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \left(\bigcup_{m=1}^{M} \omega_m \right), \tag{3}$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-011-1771).

$\omega_m \subset \mathbb{R}^3$, ω_m — ограниченная область, $\partial\omega_m \in C^2$, $\overline{\omega}_m \cap \overline{\omega}_n = \varnothing$ при $m \neq n = 1, \dots, M$; $0 \in \omega_m$ для некоторого m. В работах [1–3] была исследована задача (1)–(3) в полунормированных пространствах $L_p^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$, $1 < p < \infty$, с нормами, содержащими вторые производные по x, т. е. рассматривались убывающие, ограниченные и линейно растущие решения при $|x| \to \infty$; были получены соответствующие априорные оценки, доказаны теоремы существования, построено явное решение во внешности шара с помощью функций Лежандра и найдена точная размерность ядра оператора, порожденного задачей (1)–(3) в $L_p^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$, которая равна 11. Наиболее близкие к [1–3] результаты получены в [4], где читатель найдет ссылки на другие работы.

Настоящая работа посвящена исследованию задачи (1)–(3) в пространствах типа L_p^1, определенных различными способами, и нахождению точных размерностей ядра и коядра соответствующего оператора. Краткое изложение части результатов статьи содержится в [3].

Для определения обобщенных решений задачи (1), (2) будем использовать обычные обозначения основных и обобщенных функций, а также следующие обозначения:

если $F \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^n)$, то для $F = (f_1, \dots, f_n)$, $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$ полагаем

$$\langle F, \Phi \rangle \equiv \sum_{k=1}^{n} \langle f_k, \varphi_k \rangle;$$

$L_p^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ — пространство Соболева n-мерных векторных полей с полунормой

$$\|f\|_{L_p^1(\Omega;\mathbb{R}^n)} \equiv \left(\int_\Omega \left(\sum_{|\alpha|=1} |\mathcal{D}^\alpha f(x)|^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p};$$

$\overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ — замыкание в $L_p^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ подпространства $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$,

$$\widehat{\overset{\circ}{L}}{}_p^1(\Omega; \mathbb{R}^n) = \left\{ V \in L_p^1(\Omega; \mathbb{R}^n) : V|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$L_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ — пространство, сопряженное к $\overset{\circ}{L}{}_{p'}^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $1/p + 1/p' = 1$; если f — функционал из $L_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^n)$, то его действие на $\varphi \in \overset{\circ}{L}{}_{p'}^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ будем обозначать как $\langle f, \varphi \rangle$.

Поскольку в данной работе будем иметь дело лишь с векторными полями размерности 3, пространства соленоидальных векторных полей определим следующим образом:

$\overset{\circ}{I}{}^\infty(\Omega) = \left\{ V \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3) : \operatorname{div} V(x) = 0,\ x \in \Omega \right\}$,

$\overset{\circ}{I}{}_p^1(\Omega)$ — замыкание в $L_p^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ подпространства $\overset{\circ}{I}{}^\infty(\Omega)$,

$\widehat{\overset{\circ}{I}}{}_p^1(\Omega) = \left\{ V \in \overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega; \mathbb{R}^3) : \operatorname{div} V = 0 \text{ п. в. в } \Omega \right\}$,

$\overset{\bullet}{I}{}_p^1(\Omega) = \left\{ V \in \widehat{\overset{\circ}{L}}{}_p^1(\Omega; \mathbb{R}^3) : \operatorname{div} V = 0 \text{ п. в. в } \Omega \right\}$.

Ясно, что $\overset{\circ}{I}{}^\infty(\Omega) \subset \overset{\circ}{I}{}_p^1(\Omega) \subset \widehat{\overset{\circ}{I}}{}_p^1(\Omega) \subset \overset{\bullet}{I}{}_p^1 \subset L_p^1(\Omega)$. В работе [5] было доказано совпадение пространств $\widehat{\overset{\circ}{I}}{}_p^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{I}{}_p^1(\Omega)$ в случае области с компактной границей для $1 < p < \infty$. Поэтому для областей типа (3) пространства

$\hat{\mathring{I}}{}^1_p(\Omega)$ и $\mathring{I}{}^1_p(\Omega)$ совпадают между собой. Этим мы будем пользоваться в дальнейшем без дополнительных оговорок.

Введем два типа обобщенных решений задачи (1), (2): из пространства $\mathring{I}{}^1_p(\Omega)$ и из пространства $\dot{I}{}^1_p(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $1 < p < \infty$. *Обобщенным решением из* $\mathring{I}{}^1_p(\Omega)$ (*из* $\dot{I}{}^1_p(\Omega)$) называется такое векторное поле $V \in \mathring{I}{}^1_p(\Omega)$ (соответственно $V \in \dot{I}{}^1_p(\Omega)$), что

$$\nu \int_\Omega (\nabla V(x), \nabla\Phi(x))\,dx = \langle f, \Phi\rangle \quad \forall \Phi \in \mathring{I}{}^\infty(\Omega), \tag{4}$$

где $(\nabla V(x), \nabla\Phi(x)) = \sum\limits_{i,j=1}^{3} \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}$, $f \in L_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3)$.

Обобщенные решения обоих типов можно определить и в терминах обобщенных функций. Прежде чем дать соответствующее определение, докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Векторное поле V есть обобщенное решение из $\mathring{I}{}^1_p(\Omega)$ (из $\dot{I}{}^1_p(\Omega)$) задачи* (1), (2) *с правой частью $f \in L_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3)$, $1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда $V \in \mathring{I}{}^1_p(\Omega)$ (соответственно $V \in \dot{I}{}^1_p(\Omega)$) и найдется функция $q \in L_p(\Omega)$ такая, что V и q удовлетворяют системе* (1) *в $\mathcal{D}'(\Omega)$, т. е.*

$$\langle -\nu\Delta V + \nabla q, \Phi\rangle = \langle f, \Phi\rangle \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^3). \tag{5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $V \in \mathring{I}{}^1_p(\Omega)$; для решения из $\dot{I}{}^1_p(\Omega)$ лемма 1 доказывается аналогичным образом.

Итак, пусть $V \in \mathring{I}{}^1_p(\Omega)$ — обобщенное решение задачи (1), (2) в смысле определения 1. Заметим, что $L_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3) \subset \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^3)$, так как $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^3) \subset \mathring{L}{}^1_{p'}$. Значит, правую часть f системы (1) можно считать обобщенной функцией из $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Поскольку

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_i} \in L_p(\Omega) \quad \text{для} \quad i, j = 1, 2, 3,$$

то

$$\int_\Omega (\nabla V, \nabla\Phi)\,dx = \langle \nabla V, \nabla\Phi\rangle = -\langle \Delta V, \Phi\rangle \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^3).$$

В результате из (4) следует, что $-\nu\Delta V - f \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^3)$, при этом $\langle -\nu\Delta V - f, \Phi\rangle = 0$ $\forall \Phi \in \mathring{I}{}^\infty(\Omega)$, откуда по известному результату де-Рама найдется такая обобщенная функция $\tilde{q} \in \mathcal{D}'(\Omega)$, что $-\nu\Delta V - f = \nabla\tilde{q}$ в $\mathcal{D}'$. Напомним используемый результат де-Рама: если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $f \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^3)$, то $f = \nabla\mathcal{P}$ для некоторого $\mathcal{P} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $(f, v) = 0$ $\forall v \in \mathring{I}{}^\infty(\Omega)$ [6] (см. также [7]).

Теперь, поскольку $\Delta V \in L_p^{-1}(\Omega)$ для всякого векторного поля $V \in \mathring{I}{}^1_p(\Omega)$, то $-\nu\Delta V - f \in L_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Значит, $\nabla\tilde{q} \in L_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3) \subset W_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3)$, где $W_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ — пространство, сопряженное к пространству Соболева векторных полей $\overset{\circ}{W}{}^1_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^3)$. В этом случае в силу следствия 7 из [8] найдется такая постоянная $c > 0$, что $q = \tilde{q} - C \in L_p(\Omega)$.

Итак, если V — обобщенное решение из $\overset{\circ}{I}{}^1_p(\Omega)$ задачи (1), (2), то найдется функция $q \in L_p(\Omega)$, такая что

$$\mathcal{L}\{V, q\} \equiv -\nu\Delta V + \nabla q = f \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{R}^3). \tag{6}$$

Докажем обратное утверждение. Пусть $V \in \overset{\circ}{I}{}^1_p(\Omega)$ и $q \in L_p(\Omega)$ таковы, что имеет место равенство (6) с некоторой правой частью $f \in L_p^{-1}(\Omega)$. Тогда для $\Phi \in \overset{\circ}{I}{}^\infty(\Omega) \subset \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{R}^3)$

$$\langle -\nu\Delta V + \nabla q, \Phi\rangle = -\nu\langle \Delta V, \Phi\rangle = \nu\langle \nabla V, \nabla\Phi\rangle = \nu\int\limits_\Omega (\nabla V, \nabla\Phi)\,dx = \langle f, \Phi\rangle,$$

так как $\langle \nabla q, \Phi\rangle = -\langle q, \operatorname{div}\Phi\rangle = 0$, откуда следует, что V удовлетворяет тождеству (4). Лемма доказана.

Доказанная лемма позволяет дать второе определение обобщенного решения задачи (1), (2), эквивалентное определению 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Обобщенным решением из* $\overset{\circ}{I}{}^1_p(\Omega)$ (*из* $\overset{\bullet}{I}{}^1_p(\Omega)$) *задачи* (1), (2) с правой частью $f \in L_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ называется такая пара $\{V, q\}$, что $V \in \overset{\circ}{I}{}^1_p(\Omega)$ (соответственно $V \in \overset{\bullet}{I}{}^1_p(\Omega)$ для обобщенного решения из $\overset{\bullet}{I}{}^1_p(\Omega)$), $q \in L_p(\Omega)$ и имеет место (5).

Докажем необходимый в дальнейшем результат о представлении функционалов из $L_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)$.

Лемма 2. *Пусть* $f \in L_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)$, $1 < p < \infty$. *Тогда найдутся такие функция-матрица* $\mathcal{F} = \begin{bmatrix}\varphi^1\\ \varphi^2\\ \varphi^3\end{bmatrix}$ *со строками* $\varphi^i \equiv (\varphi^i_j(x))_{j=1}^3$, $\varphi^i_j(x) \in L_p(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$, *и постоянная* $C > 0$, *что* $f_i = \operatorname{div}\varphi^i$, $i = 1, 2, 3$, *в* $\mathcal{D}'(\Omega)$, *т. е. разрешимо уравнение* $\operatorname{div}\mathcal{F} = f$ *и при этом*

$$\|\mathcal{F}\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)}, \tag{7}$$

где

$$\|\mathcal{F}\|_{L_p(\Omega)} \equiv \left(\int\limits_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^3 |\varphi^j_i(x)|^2\right)^{p/2} dx\right)^{1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\operatorname{grad} : \overset{\circ}{L}{}^1_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^3) \to \mathbb{L}_{p'}(\Omega)$, где $\mathbb{L}_p(\Omega)$ — пространство матриц $\mathcal{F}$ вида $\mathcal{F} = (\varphi^i_j)_{i,j=1}^3$, $\varphi^i_j(x) \in L_p(\Omega)$, с определенной выше нормой, $1/p + 1/p' = 1$. Тогда сопряженный к нему оператор div будет действовать в сопряженных пространствах, а именно, $\operatorname{div} : (\mathbb{L}_{p'}(\Omega))^* \to \left(\overset{\circ}{\mathbb{L}}{}^1_{p'}(\Omega)\right)^*$, и по теореме Рисса об общем виде линейного функционала над L_p и по определению $L_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ имеем $\operatorname{div} : \mathbb{L}_p(\Omega) \to L_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)$. При этом область значений оператора дивергенции $R(\operatorname{div})$ замкнута в $L_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)$, так как замкнута область значений $R(\operatorname{grad})$. Поскольку $\overset{\circ}{L}{}^1_{p'}$ есть замыкание финитных функций в неограниченной области, имеем $\ker(\operatorname{grad}) = 0$. Тогда область значений $R(\operatorname{div})$ всюду плотна в L_p^{-1}.

Итак, $R(\operatorname{div}) = \overline{R(\operatorname{div})} = L_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)$, где чертой обозначено замыкание подпространства $R(\operatorname{div})$ в $L_p^{-1}(\Omega)$. В силу известного результата из функционального анализа (см., например, [9, с. 524]) существуют такие $\mathcal{F} \in L_p(\Omega)$ и $C > 0$, что для любого $f \in L_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ имеем $\operatorname{div}\mathcal{F} = f$ с оценкой (7). Лемма 2 доказана.

Пользуясь леммой 2, вместо задачи (1), (2) будем рассматривать эквивалентную ей задачу, состоящую из уравнений

$$-\nu\Delta V + \nabla q = \operatorname{div}\mathcal{F}, \quad \operatorname{div} V = 0, \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

где $\mathcal{F} \in \mathbb{L}_p(\Omega)$, и граничного условия (2).

Определим $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}$ и $\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}$, положив

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{p,\Omega} \equiv \overset{\circ}{I}{}_p^1(\Omega) \times L_p(\Omega), \quad \overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega} \equiv \overset{\bullet}{I}{}_p^1(\Omega) \times L_p(\Omega). \tag{9}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Дифференциальным оператором $\mathcal{L}$ задачи* (1), (2) будем называть отображение

$$\mathcal{L} : \overset{\circ}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}(\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}) \to L_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3), \quad \{V,q\} \mapsto -\nu\Delta V + \nabla q \equiv \mathcal{L}\{V,q\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Ядрами* дифференциального оператора $\mathcal{L}$ задачи (1), (2) назовем подпространства в $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}$ и $\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}$ вида

$$\overset{\circ}{N}_{p,\Omega} = \big\{\{V,q\} \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}_{p,\Omega} : \mathcal{L}\{V,q\} = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{R}^3)\big\},$$
$$\overset{\bullet}{N}_{p,\Omega} = \big\{\{V,q\} \in \overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega} : \mathcal{L}\{V,q\} = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{R}^3)\big\},$$

где $q = \tilde{q} - C \in L_p(\Omega)$, C — некоторая постоянная.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Областью значений* дифференциального оператора задачи (1), (2) назовем подпространства в $L_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ вида

$$\overset{\circ}{\mathcal{R}}_{p,\Omega} = \big\{f \in L_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3) : f = \mathcal{L}\{V,q\}\big\} \text{ для некоторой пары } \{V,q\} \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}_{p,\Omega},$$
$$\overset{\bullet}{\mathcal{R}}_{p,\Omega} = \big\{f \in L_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3) : f = \mathcal{L}\{V,q\}\big\} \text{ для некоторой пары } \{V,q\} \in \overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}.$$

§ 2. Решение задачи во внешности шара

Докажем полезную в дальнейшем вспомогательную лемму.

Лемма 3. *Пусть $\{V,q\}$ — решение однородной ($f \equiv 0$) задачи (1), (2) во внешности D единичного шара с центром в начале координат, $\nu = 1$, где*

$$q = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} (\alpha_n^m r^{-n-1} + \beta_n^m r^n) Y_n^m(\theta,\varphi), \quad Y_n^m(\theta,\varphi) = e^{im\varphi} P_n^m(\cos\theta), \tag{10}$$

$P_n^m(\cos\theta)$ — присоединенные функции Лежандра, $r = |x|$. Тогда в формуле (10) постоянная $\alpha_0^0 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь формулами Ламба [10], построим векторное поле U, удовлетворяющее системе

$$\Delta U = \nabla \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} (\alpha_n^m r^{-n-1} + \beta_n^m r^n) Y_n^m(\theta,\varphi), \quad \operatorname{div} U = 0.$$

Тогда $V' = V - U$ должно удовлетворять системе

$$\Delta V' = \nabla \frac{\alpha_0^0}{r}, \quad \operatorname{div} V' = 0, \quad x \in D.$$

Положим $W = -\frac{r^2}{2}\nabla\frac{\alpha_0^0}{r}$. Докажем, что

$$\Delta W = \nabla \frac{\alpha_0^0}{r}, \quad \operatorname{div} W = \frac{\alpha_0^0}{r}.$$

Действительно,

$$\Delta\left(r^2\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\alpha_0^0}{r}\right) = r^2\Delta\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\alpha_0^0}{r} + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\alpha_0^0}{r}\Delta r^2 + 4\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\alpha_0^0}{r}$$

$$= 6\alpha_0^0\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r} + 4\alpha_0^0\left(\sum_{k=1}^{3} x_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}.$$

Но

$$\left(\sum_{k=1}^{3} x_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r} = -2\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}.$$

Поэтому $\Delta\left(r^2\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\alpha_0^0}{r}\right) = -2\alpha_0^0\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}$, откуда $\Delta W = \alpha_0^0\nabla\frac{1}{r}$; кроме того,

$$\operatorname{div}\left(r^2\nabla\frac{1}{r}\right) = r^2\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\frac{1}{r} + 2\sum_{k=1}^{3} x_k\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r} = -2\frac{1}{r}.$$

Таким образом, $\operatorname{div} W = -\frac{\alpha_0^0}{2}\operatorname{div}\left(r^2\nabla\frac{1}{r}\right) = \frac{\alpha_0^0}{r}$.

Определим векторное поле V'', положив $V'' = V' - W$. Так определенное V'' удовлетворяет системе

$$\nabla V'' = 0, \quad \operatorname{div} V'' = -\frac{\alpha_0^0}{r}, \quad x \in D. \tag{11}$$

Так как V'' — гармоническая вектор-функция, ее компоненты представимы в виде

$$V_i'' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbb{Y}_n^i, \quad i = 1,2,3, \tag{12}$$

где $\mathbb{Y}_n^i$ — шаровые функции степени n ($n = 0, \pm1, \ldots$). Тогда второе равенство в (11) дает

$$\operatorname{div} V'' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial \mathbb{Y}_n^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbb{Y}_n^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbb{Y}_n^3}{\partial x_3}\right) = -\frac{\alpha_0^0}{r}. \tag{13}$$

Из свойств гармонических функций следует, что сумма $\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathbb{Y}_n^i}{\partial x_i}$ есть гармоническая функция степени $n-1$. Обозначим ее через $\mathbb{Y}_{n-1}$. Из равенства (13) и линейной независимости шаровых функций различных порядков следует существование такого n, что $\mathbb{Y}_{n-1} = -\frac{\alpha_0^0}{r}$, при этом $\mathbb{Y}_{m-1} \equiv 0$ для $m \neq n$. С другой стороны, $-\frac{\alpha_0^0}{r} = \mathbb{Y}_{-1}$. Но если $n - 1 = -1$, то $n = 0$, т. е. $\mathbb{Y}_0^i = \mathrm{const}$ для $i = 1,2,3$. Значит,

$$-\frac{\alpha_0^0}{r} = \mathbb{Y}_{-1} = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \mathbb{Y}_0^k}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial C_k}{\partial x_k} = 0,$$

что возможно в случае $\alpha_0^0 = 0$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть* $\Omega = D = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| > 1\}$, $\{V, q\} \in \overset{\bullet}{N}_{p,D} \in \overset{\bullet}{I}{}^1_p(D) \times L_p(D)$, $1 < p < \infty$, *есть решение задачи* (1), (2), $\nu = 1$. *Тогда*

1) *если* $1 < p \leqslant 3/2$, то $V = \nabla q \equiv 0$;
2) *если* $3/2 < p < \infty$, то

$$V(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{r} - 1\right)\nabla(\alpha_1 x_3 - \alpha_2 x_1 - \alpha_3 x_2) + \frac{1}{6}(1 - r^2)\nabla\left(\frac{\alpha_1 x_3}{r^3} - \frac{\alpha_2 x_1}{r^3} - \frac{\alpha_3 x_2}{r^3}\right), \tag{14}$$

$$q(x) = \alpha_1 \frac{x_3}{r^3} - \alpha_2 \frac{x_1}{r^3} - \alpha_3 \frac{x_2}{r^3}, \tag{15}$$

где α_1, α_2, α_3 — *произвольные вещественные постоянные*, $r = |x|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\nu = 1$. Представим гармоническую в D функцию q в виде

$$q = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(\tilde{\alpha}_n^m r^n + \alpha_n^m r^{-n-1})Y_n^m(\theta, \varphi),$$

где удобно взять $\tilde{\alpha}_n^m = (\tilde{a}_n^m - i\tilde{b}_n^m)/2$, $\alpha_n^m = (a_n^m - ib_n^m)/2$. Здесь комплексные коэффициенты таковы, что $\tilde{a}_n^m, \tilde{b}_n^m, a_n^m, b_n^m \in \mathbb{R}^1$,

$$\tilde{\alpha}_n^m = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\overline{\tilde{\alpha}_n^m}, \quad \alpha_n^{-m} = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\overline{\alpha_n^m}, \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Так как $q \in L_p(D)$, то $\tilde{\alpha}_n^m = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, $-n \leqslant m \leqslant n$. В силу леммы 3 $\alpha_0^0 = 0$. Значит,

$$q = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\alpha_n^m r^{-n-1}\mathbb{Y}_n^m(\theta, \varphi). \tag{16}$$

В сферической системе координат для компоненты $V_r(x)$ введем обозначение $V_r(x) = (V(x), x/|x|)$, где $(\cdot,\cdot)$ — обычное скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}^3$. Как было показано в [2], V_r следует искать в виде

$$V_r = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} g_n^m(r)\mathbb{Y}_n^m(\theta, \varphi). \tag{17}$$

При этом коэффициенты $g_n^m(r)$ находятся в явном виде (см. [11]):

$$g_n^m(r) = A_n^m r^{n-1} + B_n^m r^{-n-2} + \alpha_n^m \frac{n+1}{2(2n-1)}r^{-n}, \tag{18}$$

где A_n^m, B_n^m $(n = 0, 1, 2\ldots;\ -n \leqslant m \leqslant n)$ — произвольные комплексные постоянные, α_n^m — те же коэффициенты, что и в (16).

Из условия $\partial_r V_r \in L_p(\Omega)$ следует, что $A_n^m = 0$ для всех $n = 2, 3, \ldots$ и m таких, что $-n \leqslant m \leqslant n$.

Рассмотрим отдельно два случая: $3/2 < p < \infty$ и $1 < p \leqslant 3/2$.

Пусть $3/2 < p < \infty$. Если

$$\begin{gathered}\partial_r g_n^m(r) = (n-1)A_n^m r^{n-2} - (n+2)B_n^m r^{-n-3} - \alpha_n^m \frac{n(n+1)}{2(2n-1)}r^{-n-1}, \\ A_n^m = 0, \quad n = 2, 3, \ldots, \ -n \leqslant m \leqslant n; \quad \alpha_0^0 = 0,\end{gathered} \tag{19}$$

A_1^m, $m = -1, 0, 1$; A_0^0, B_0^0, α_n^m, $n = 1, 2, \ldots$, — произвольные постоянные, то

$$\partial_r g_n^m \in L_p(D), \quad n = 0, 1, \ldots, \ -n \leqslant m \leqslant n.$$

В силу краевого условия (2) и уравнения несжимаемости, V_r должна удовлетворять на $\partial D = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \equiv r = 1\}$ однородным краевым условиям

$$V_r|_{r=1} = \partial_r V_r|_{r=1} = 0. \tag{20}$$

С учетом представления V_r в виде (17) условия (20) и (19) накладывают следующие соотношения на коэффициенты:

$$A_0^0 + B_0^0 = 0, \quad -A_0^0 - 2B_0^0 = 0;$$
$$A_1^m + B_1^m + \alpha_1^m = 0, \quad -3B_1^m - \alpha_1^m = 0, \quad m = -1, 0, 1;$$
$$B_n^m + \frac{n+1}{2(2n-1)}\alpha_n^m = 0, \quad -(n+2)B_n^m - \frac{n(n+1)}{2(2n-1)}\alpha_n^m = 0,$$
$$n = 2, 3, \ldots, \quad -n \leqslant m \leqslant n,$$

откуда

$$A_0^0 = B_0^0 = A_n^m = B_n^m = \alpha_n^m = 0, \quad n = 2, 3, \ldots, \ -n \leqslant m \leqslant n; \tag{21}$$
$$A_1^m = -\frac{2}{3}\alpha_1^m; \quad B_1^m = -\frac{1}{3}\alpha_1^m. \tag{22}$$

Из формул (16), (19), (21) и (22) следует, что

$$q = \sum_{m=-1}^{1} \alpha_1^m \frac{1}{r^2} \mathbb{Y}_1^m(\theta, \varphi). \tag{23}$$

Возьмем произвольную гармоническую в D функцию φ. Она представима в виде суммы бесконечного ряда шаровых функций порядка n. Обозначая их через φ_n, имеем

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n.$$

Известно, что $\varphi_n r^{-n}$ представляет собой линейную комбинацию сферических гармоник $\mathbb{Y}_n^m$, $m = -n, -n+1, \ldots, n$ $(n > 0)$, с действительными коэффициентами. Обозначая эти коэффициенты через $\tilde{\beta}_n^m$ для функций φ_n положительной степени однородности и через β_n^m для функций φ_n отрицательной степени однородности, можно записать

$$\varphi_n = \sum_{m=-n}^{n} \tilde{\beta}_n^m r^n \mathbb{Y}_n^m, \quad \varphi_{-n-1} = \sum_{m=-n}^{n} \beta_n^m r^{-n-1} \mathbb{Y}_n^m, \ n = 0, 1, \ldots. \tag{24}$$

По формуле (338.9) из [10] радиальная составляющая V_r вектора скорости определяется давлением q не однозначно, а с точностью до произвольной гармонической в D функции φ, т. е.

$$V_r = \sum_n n\frac{\varphi_n}{r} + \sum_n \frac{nr}{2(2n+3)} q_n, \tag{25}$$

где q_n — шаровые функции степени n из разложения (16). Так как $V_r \in L_p^1(D)$, имеем

$$\tilde{\beta}_n^m = 0 \quad \text{для всех} \quad n = 2, 3, \ldots, \quad -n \leqslant m \leqslant n. \tag{26}$$

Подставляя (23) и (24) в (25), получаем

$$V_r = \sum_{m=-1}^{1} (\tilde{\beta}_1^m - 2\beta_1^m r^{-3} + \alpha_1^m r^{-1})\mathbb{Y}_1^m - \sum_{\substack{n=0\\ n\neq 1}}^{\infty}(n+1)r^{-n-2} \sum_{m=-n}^{n} \beta_n^m \mathbb{Y}_n^m. \quad (27)$$

В силу линейной независимости сферических функций $\mathbb{Y}_n^m$ и краевых условий (20) из (27) следует

$$\beta_n^m = 0, \quad n = 2,3,\ldots, -n \leqslant m \leqslant n, \quad (28)$$

а для $n = 1$

$$\tilde{\beta}_1^m - 2\beta_1^m + \alpha_1^m = 0, \quad 6\beta_1^m - \alpha_1^m = 0, \quad m = -1,0,1,$$

откуда

$$\tilde{\beta}_1^m = -\frac{2}{3}\alpha_1^m, \quad \beta_1^m = \frac{1}{6}\alpha_1^m. \quad (29)$$

Из (24), (25), (28), (29) окончательно получаем

$$\varphi = -\frac{2}{3} \sum_{m=-1}^{1} \alpha_1^m r \mathbb{Y}_1^m + \frac{1}{6r^2} \sum_{m=-1}^{1} \alpha_1^m \mathbb{Y}_1^m \equiv \varphi_1 + \varphi_{-2}. \quad (30)$$

Возьмем теперь произвольную гармоническую в D функцию χ, аналогично φ записав ее в следующем виде:

$$\chi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \chi_n, \quad \chi_n = r^n \sum_{m=-n}^{n} \tilde{\gamma}_n^m \mathbb{Y}_n^m, \quad \chi_{-n-1} = r^{-n-1} \sum_{m=-n}^{n} \gamma_n^m \mathbb{Y}_n^m. \quad (31)$$

По формулам Ламба (335.9) и (336.8) из [10] решение однородной задачи (1), (2) в D можно записать в виде

$$V(x) = \sum_{\substack{n\\ n\neq -1}} (\nabla\varphi_n(x) + [x,\nabla]\chi_n(x)) + \sum_{\substack{n\\ n\neq -1}} \left\{ \frac{r^2}{2(2n+1)}\nabla q_n + \frac{nr^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)}\nabla\frac{q_n}{r^{2n+1}} \right\}, \quad (32)$$

где $[\cdot,\cdot]$ — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. В (32) χ_n и φ_n — произвольные, в общем случае различные гармонические в D шаровые функции.

Заметим, что если $x = (x, y, z)$, то формально

$$-[x,\nabla] = \begin{pmatrix} z\partial_y - y\partial_z \\ x\partial_z - z\partial_x \\ y\partial_x - x\partial_y \end{pmatrix},$$

откуда

$$[x,\nabla](\tilde{\gamma}_0^0 + \gamma_0^0/r)\mathbb{Y}_0^0 = 0. \quad (33)$$

Кроме того,

$$z\partial_y - y\partial_z = \sin\varphi\partial_\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi\partial_\varphi,$$
$$x\partial_z - z\partial_x = \cos\varphi\partial_\theta - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\partial_\varphi,$$
$$y\partial_x - x\partial_y = \partial_\varphi,$$

откуда $[x,\nabla](g(r)\mathbb{Y}_n^m) = g(r)[x,\nabla]\mathbb{Y}_n^m$ для всякой сферической гармоники $\mathbb{Y}_n^m$ и дифференцируемой функции g, зависящей только от r. Поэтому условие $\nabla V \in L_p(D;\mathbb{R}^3)$ в силу (23), (30), (32) и линейная независимость $\mathbb{Y}_n^m$ влекут равенство нулю коэффициентов при $\mathbb{Y}_n^m$, т. е.

$$\tilde{\gamma}_n^m = 0, \quad n = 1,2,\dots, \ -n \leqslant m \leqslant n, \tag{34}$$

а тогда в силу краевых условий (2)

$$\gamma_n^m = 0, \quad n = 1,2,\dots, \ -n \leqslant m \leqslant n. \tag{35}$$

Подставляя (34), (35) в выражение (31) для χ, а затем получившееся представление вместе с φ из (30) и q из (23) в (32), получаем окончательно в декартовых координатах

$$V = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{r}-1\right)\nabla(\alpha_1x_3-\alpha_2x_1-\alpha_3x_2)+\frac{1}{6}(1-r^2)\nabla\left(\alpha_1\frac{x_3}{r^3}-\alpha_2\frac{x_1}{r^3}-\alpha_3\frac{x_2}{r^3}\right), \tag{36}$$

$$q = \alpha_1\frac{x_3}{r^3}-\alpha_2\frac{x_1}{r^3}-\alpha_3\frac{x_2}{r^3}, \tag{37}$$

где вещественные постоянные α_1, α_2, α_3 произвольны.

Итак, утверждение теоремы в случае $3/2 < p < \infty$ доказано.

Осталось рассмотреть случай $1 < p \leqslant 3/2$. При таком ограничении на p условие $q \in L_p(D)$ влечет за собой то, что все коэффициенты α_1^m в разложении (16) для q равны нулю, т. е.

$$\alpha_1^m = 0, \quad m = -1,0,1. \tag{38}$$

Из условия $\partial V_r/\partial r \in L_p$ в силу записанного выше разложения V_r по сферическим гармоникам, линейной независимости последних, а также выражения (18) для коэффициентов $g_n^m(r)$ следует, что

$$A_n^m = 0, \quad n = 0,2,3,\dots; \ -n \leqslant m \leqslant n.$$

Но в этом случае в силу (18) краевые условия (20) будут удовлетворены, лишь если

$$A_1^m + B_1^m = 0, \quad -3B_1^m = 0, \quad m = -1,0,1;$$

$$B_n^m + \frac{n+1}{2(2n-1)}\alpha_n^m = 0, \quad -(n+2)B_n^m - \frac{n(n+1)}{2(2n-1)}\alpha_n^m = 0,$$

$$n = 2,3,\dots, \ -n \leqslant m \leqslant n,$$

что возможно только тогда, когда

$$A_1^m = B_1^m = 0, \ m = -1,0,1; \quad \alpha_n^m = B_n^m = 0, \ n = 2,3,\dots; \ -n \leqslant m \leqslant n. \tag{39}$$

Подставляя α_n^m, $n = 0,1,2,\dots$; $-n \leqslant m \leqslant n$, взятые из (38) и (39), в представление (16) для q, получаем

$$q \equiv 0, \tag{40}$$

так как $\alpha_0^0 = 0$, что было доказано в лемме 3. После этого из (25) можно заключить, что при $1 < p \leqslant 3/2$ функция φ, определенная в (24), тождественно равна нулю:

$$\varphi \equiv 0. \tag{41}$$

Подставляя (40) и (41) в представление (32) для V, получаем, что если $V \in L_p^1(D;\mathbb{R}^3)$, $1 < p \leqslant 3/2$, $V|_{\partial D} = 0$, то функция χ, входящая в (32) и определенная в (31), также тождественно равна нулю в D. Значит, и $V \equiv 0$ в D при $1 < p \leqslant 3/2$.

Итак, при $1 < p \leqslant 3/2$ единственное решение из $\overset{\bullet}{I}{}_p^1(D)$ однородной задачи (1), (2) есть тождественный нуль. Теорема доказана.

Замечание 1. Элементы ядра $\overset{\bullet}{N}_{p,D}$ дифференциального оператора задачи обтекания (1), (2) для системы Стокса в случае $3/2 < p < \infty$ представляют собой линейные комбинации с коэффициентами α_1, α_2, α_3 трех линейно независимых решений Стокса (см. [10] или [12]).

§ 3. Априорные оценки

Прежде чем доказывать одну из теорем об априорной оценке, докажем вспомогательную лемму.

Лемма 4. *Рассмотрим неоднородную систему Стокса*

$$-\Delta V + \nabla q = \operatorname{div} \mathcal{F}, \quad \operatorname{div} V = \psi \tag{42}$$

во всем пространстве $\mathbb{R}^3$. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\psi \in L_p(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{F} \in L_p(\mathbb{R}^3)$. *Тогда существует решение* $\{V, q\}$ *задачи* (42), *удовлетворяющее оценке*

$$\sum_{|\alpha|=1} \|\mathcal{D}^\alpha V\|_{L_p(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)} + \|q\|_{L_p(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\left\{\|\mathcal{F}\|_{L_p(\mathbb{R}^3)} + \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^3)}\right\} \tag{43}$$

с постоянной C, *не зависящей ни от* $\mathcal{F}$, *ни от* ψ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим векторное поле V и функцию q через их образы Фурье, используя лемму 2 и положив

$$V \equiv \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}[\widehat{V}(\xi)], \qquad q \equiv \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}[\hat{q}(\xi)],$$

где векторное поле $\widehat{V}(\xi)$ и $\hat{q}(\xi)$ определены следующим образом ($k = 1, 2, 3$):

$$\widehat{V}_1(\xi) = i\xi_k \frac{\xi_2^2+\xi_3^2}{|\xi|^4}\widehat{\varphi}_k^1 - i\xi_k\frac{\xi_1\xi_2}{|\xi|^4}\widehat{\varphi}_k^2 - i\xi_k\frac{\xi_1\xi_3}{|\xi|^4}\widehat{\varphi}_k^3 - i\frac{\xi_1}{|\xi|^2}\widehat{\psi}; \tag{44}$$

$$\widehat{V}_2(\xi) = -i\xi_k \frac{\xi_1\xi_2}{|\xi|^4}\widehat{\varphi}_k^1 + i\xi_k\frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{|\xi|^4}\widehat{\varphi}_k^2 - i\xi_k\frac{\xi_2\xi_3}{|\xi|^4}\widehat{\varphi}_k^3 - i\frac{\xi_2}{|\xi|^2}\widehat{\psi}; \tag{45}$$

$$\widehat{V}_3(\xi) = -i\xi_k \frac{\xi_1\xi_3}{|\xi|^4}\widehat{\varphi}_k^1 - i\xi_k\frac{\xi_2\xi_3}{|\xi|^4}\widehat{\varphi}_k^2 + i\xi_k\frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{|\xi|^4}\widehat{\varphi}_k^3 - i\frac{\xi_3}{|\xi|^2}\widehat{\psi}; \tag{46}$$

$$\hat{q}(\xi) = \xi_k\frac{\xi_1}{|\xi|^2}\widehat{\varphi}_k^1 + \xi_k\frac{\xi_2}{|\xi|^2}\widehat{\varphi}_k^2 + \xi_k\frac{\xi_3}{|\xi|^2}\widehat{\varphi}_k^3 + \widehat{\psi} \tag{47}$$

(по повторяющимся индексам k предполагается суммирование).

Непосредственной подстановкой нетрудно проверить, что так определенные $\widehat{V}$ и $\hat{q}$ удовлетворяют «фурье-образу» системы (8) всюду в $\mathbb{R}^3_\xi \setminus B(0)$, где $B(0)$ — некоторая окрестность нуля.

Заметим, что согласно (44)–(47) образ Фурье всякой первой производной $\partial V_j/\partial x_i$ (в смысле обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^3)$) представляется в виде суммы конечного числа слагаемых вида $M^j_{iksl}(\xi)\widehat{\varphi}^l_k(\xi)$ и $M^j_i(\xi)\widehat{\psi}(\xi)$, где

$$M^j_{iksl}(\xi) = \pm\xi_i\xi_k\xi_s\xi_l/|\xi|^4, \quad M^j_i(\xi) = \xi_i\xi_j/|\xi|^2, \quad i, j, k, l, s = 1, 2, 3,$$

а $\hat{q}$ — в виде слагаемых $M_{kl}(\xi)\widehat{\varphi}^l_k(\xi)$, где $M_{kl}(\xi) = \xi_k\xi_l/|\xi|^2$ (заметим, что некоторые из индексов k, s, l, i могут быть равными между собой, так как $\xi \in \mathbb{R}^3$). Тогда по теореме о мультипликаторах преобразования Фурье следует оценка (43).

Докажем две основных теоремы об априорных оценках.

Теорема 2. *Пусть* Ω — *область типа* (3), $1 < p < \infty$, $\{V, q\}$ — *обобщенное решение из* $\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}$ *задачи* (1), (2) *с правой частью*

$$f \in L_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3); \quad f = \operatorname{div}\mathcal{F}, \quad \mathcal{F} \in L_p(\Omega),$$

B_R — открытый шар с центром в начале координат такого радиуса R, что $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \subset B_R$. Тогда существуют линейный вполне непрерывный оператор

$$T : L_p(\Omega_R) \to L_p^{-1}(\Omega_R; \mathbb{R}^3), \quad \Omega_R = \Omega \cap B_R,$$

и постоянная $C > 0$, не зависящая от $\mathcal{F}$, такие что имеет место оценка

$$\nu \sum_{|\alpha|=1} \|\mathcal{D}^\alpha V\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|q\|_{L_p(\Omega)}$$
$$\leqslant C\big\{\|\mathcal{F}\|_{L_p(\Omega)} + \nu\|V\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)} + \|Tq\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)} + \|q\|_{L_p^{-1}(\Omega_R)}\big\}. \quad (48)$$

Это утверждение справедливо и для решения из $\overset{\circ}{I}{}_p^1(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Член $\|q\|_{L_p^{-1}(\Omega_R)}$ из правой части неравенства (48) можно оценить следующим образом: $\|q\|_{L_p^{-1}(\Omega_R)} \leqslant C\|T^*q\|_{L_p(\Omega_R)}$, где T^* — некоторый вполне непрерывный оператор.

Действительно, по определению

$$\|q\|_{L_p^{-1}(\Omega_R)} = \sup_{\substack{\psi\in\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega_R)\\ \|\psi\|_{\overset{\circ}{L}{}^1_{p'}(\Omega_R)}\neq 0}} \int_{\Omega_R} q\psi\,dx \big/ \|\psi\|_{\overset{\circ}{L}{}^1_{p'}(\Omega_R)}.$$

Далее, существует вполне непрерывный оператор T из представления Соболева, такой что

$$\int_{\Omega_R} q\psi\,dx = \int_{\Omega_R} qT\nabla\psi\,dx = \int_{\Omega_R} (T^*q, \nabla\psi)\,dx,$$

откуда следует, что

$$\Big|\int_{\Omega_R} q\psi\,dx\Big| \leqslant \|T^*q\|_{L_p(\Omega_R)} \cdot \|\nabla\psi\|_{L_{p'}(\Omega_R)}.$$

Поэтому $\|q\|_{L_p^{-1}(\Omega_R)} \leqslant \|T^*q\|_{L_p(\Omega_R)}$, где оператор T^*, такой что $T\nabla\psi = \psi(x)$ для любой $\psi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega_R)$, является оператором типа потенциала для ограниченной области, т. е. T^* — вполне непрерывный оператор.

Таким образом, в оценке (48) последний член можно объединить с членом $\|Tq\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)}$, где T — вполне непрерывный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Рассмотрим шары

$$B_{R_1} = \{x : x \in \mathbb{R}_3, |x| < R_1\}, \quad B_R = \{x : x \in \mathbb{R}^3, |x| < R\},\ R > R_1,$$

такие что $\bigcup_{m=1}^{M} \omega_m \subset B_{R_1}$, и функции $\eta_1(x) \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\eta_2(x) = 1 - \eta_1(x)$, где

$$\eta_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in B_{R_1}, \\ 1, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}_R, \\ 0 \leqslant \eta_1 \leqslant 1, & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Очевидно, что η_1 и η_2 образуют разбиение единицы в $\mathbb{R}^3$.

Будем считать, что $\nu = 1$. Продолжив функции, входящие в систему (8), с сохранением гладкости на все пространство $\mathbb{R}^3$ и умножив обе части системы на η_1, получим

$$-\Delta(V\eta_1) + \nabla(q\eta_1) = \Phi(x), \quad \operatorname{div}(V\eta_1) = (V, \nabla\eta_1) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3). \quad (49)$$

Векторное поле $\Phi(x) = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ — правая часть системы (49) — имеет вид

$$\Phi_j = \operatorname{div}(\mathcal{F}^j \eta_1) - (\mathcal{F}^j, \nabla\eta_1) - 2\operatorname{div}(V_j \nabla\eta_1) + V_j \Delta\eta_1 + q\frac{\partial\eta_1}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Пусть $\Phi_j = \Phi_j^1 + \Phi_j^2$, где $\Phi_j^1 = \operatorname{div}[\mathcal{F}^j\eta_1 - 2V_j\nabla\eta_1]$, $\Phi_j^2 = -(\mathcal{F}^j, \nabla\eta_1) + V_j\Delta\eta_1 + q\frac{\partial\eta_1}{\partial x_j}$. Обозначим $u = V\eta_1$, $p = q\eta_1$ и положим $u = u^1 + u^2$, $p = p^1 + p^2$, где $\{u^1, p^1\}$ — решение системы

$$-\Delta u^1 + \nabla p^1 = \Phi^1, \quad \operatorname{div} u^1 = (V, \nabla\eta_1) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3), \tag{50}$$

а $\{u^2, p^2\}$ — решение системы

$$-\Delta u^2 + \nabla p^2 = \Phi^2, \quad \operatorname{div} u^2 = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3). \tag{51}$$

Система (50) удовлетворяет условиям леммы 4. Значит, $\{u^1, p^1\}$ удовлетворяет оценке (43) из леммы 4. Правая же часть системы (51) в общем случае не может быть представлена в дивергентной форме, так как, вообще говоря, $\int\limits_{\mathbb{R}^3} \Phi^2(x)\,dx \neq 0$.

При исследовании задачи (51) рассмотрим некоторые вспомогательные задачи. Получим оценку для $\{u^2, p^2\}$. Выберем три вектор-функции $f^j \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, $j = 1, 2, 3$, положив

$$f^1(x) = (f(x), 0, 0), \quad f^2(x) = (0, f(x), 0), \quad f^3(x) = (0, 0, f(x)),$$

где f — произвольно выбранная фиксированная в дальнейшем функция класса $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^3)$, такая что $\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\,dx = 1$.

Рассмотрим три вспомогательные задачи:

$$-\Delta W^j + \nabla P_j = f^j, \quad \operatorname{div} W^j = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3), \quad j = 1, 2, 3. \tag{52}$$

Решая задачи (52) методом преобразования Фурье, получим решения $\{W^j; P_j\}$, которые при финитных f^j и $p \in (3/2, \infty)$ таковы, что $W^j \in L_p^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$; $P_j \in L_p(\mathbb{R}^3)$ и $\|W^j\|_{L_p^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)} + \|P_j\|_{L_p(\mathbb{R}^3)} < C\|f^j\|_{L_p(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)}$ в силу теоремы Соболева об оценке интегралов типа потенциала.

Положим $C_j \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Phi_j^2(x)\,dx$, $u^2 \equiv \tilde{u}^2 + \tilde{\tilde{u}}^2$, $P^2 \equiv \widetilde{P}^2 + \widetilde{\widetilde{P}}^2$, где

$$\tilde{u}^2 = u^2 - \sum_{j=1}^3 C_j W^j; \quad \tilde{\tilde{u}}^2 = \sum_{j=1}^3 C_j W^j; \quad \widetilde{P}^2 = P^2 - \sum_{j=1}^3 C_j P_j; \quad \widetilde{\widetilde{P}}^2 = \sum_{j=1}^3 C_j P_j.$$

Подставив $\tilde{u}^2$, $\widetilde{P}^2$ в систему (51), получим

$$\begin{aligned} -\Delta\tilde{u}^2 + \nabla\widetilde{P}^2 &= -\Delta u^2 + \nabla P^2 - \sum_{j=1}^3 C_j(-\Delta W^j + \nabla P_j) \\ &= \Phi^2 - \sum_{j=1}^3 C_j f^j = \begin{bmatrix} \Phi_1^2 \\ \Phi_2^2 \\ \Phi_3^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_1 f \\ C_2 f \\ C_3 f \end{bmatrix} \equiv F(x). \end{aligned}$$

Из определения постоянных C_j, $j = 1, 2, 3$, следует, что $\int\limits_{\mathbb{R}^3} F(x)\,dx = 0$, а тогда согласно (8) существует матрица $G(x)$, элементы которой суть функции из $L_p^1(\mathbb{R}^3)$, такая что $F = \operatorname{div} G$, т. е. $\{\tilde{u}^2, \widetilde{P}^2\}$ удовлетворяет системе

$$-\Delta\tilde{u}^2 + \nabla\widetilde{P}^2 = \operatorname{div} G, \quad \operatorname{div}\tilde{u}^2 = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3),$$

где

$$G_j = T_1\left[-(\mathcal{F}^j, \nabla\eta_1) + V_j\Delta\eta_1 + q\frac{\partial\eta_1}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{3} C_j f^j\right],$$

T_1 — разрешающий оператор для уравнения $F = \operatorname{div} G$ в Ω_R с оценкой $\|G\|_{L_p^1(\Omega_R)} \leqslant C\|F\|_{L_p(\Omega_R)}$, действующий вполне непрерывно из $L_p(\Omega_R)$ в $L_p^1(\Omega_R)$ [8, 17].

Из леммы 4 следует, что

$$\sum_{|\alpha|=1} \|\mathcal{D}^\alpha\tilde{u}^2\|_{L_p(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)} + \|\widetilde{P}^2\|_{L_p(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leqslant C\left\{\|\mathcal{F}^j\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)} + \|V\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)} + \|T_1 q\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)} + \left\|\sum_{j=1}^{3} C_j T_1 f^j\right\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)}\right\}.$$

Так как $C_j = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Phi_j^2(x)\,dx$, $j = 1,2,3$, а $\Phi_j^2 = -(\mathcal{F}^j, \nabla\eta_1) + V_j\Delta\eta_1 + q\frac{\partial\eta_1}{\partial x_j}$, пользуясь неравенством Гёльдера для оценки $|C_j|$, получаем

$$\left\|\sum_{j=1}^{3} C_j T_1 f^j\right\|_{L_p(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)} \leqslant C\left\{\|\mathcal{F}^j\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)} + \|V\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)} + \|T_1 q\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)}\right\}.$$

Таким образом, для $3/2 < p < \infty$ имеем

$$\sum_{|\alpha|=1} \|\mathcal{D}^\alpha\tilde{u}^2\|_{L_p(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)} + \|\widetilde{P}^2\|_{L_p(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)}$$

$$\leqslant C\left\{\|\mathcal{F}\|_{\mathbf{L}_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)} + \|V\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)} + \|T_1 q\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)}\right\}.$$

Установим оценку для $\{\tilde{\tilde{u}}^2, \widetilde{\widetilde{P}}^2\}$. Из определения $\tilde{\tilde{u}}^2$ следует, что

$$\sum_{|\alpha|=1} \|\mathcal{D}^\alpha\tilde{\tilde{u}}^2\|_{L_p(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)} \leqslant \sum_{j=1}^{3} \|C_j W^j\|_{L_p(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)}$$

$$\leqslant \left\{\|\mathcal{F}\|_{\mathbf{L}_p(\Omega_R)} + \|V\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)} + \|T_2 q\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)}\right\},$$

где $T_2 q = \sum\limits_{|\alpha|=1} \mathcal{D}^\alpha W^j \int\limits_{\Omega_R} \frac{\partial\eta_1}{\partial x_j} q(x)\,dx$. Ясно, что $T_2 : L_p(\Omega_R) \to L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)$ — вполне непрерывный оператор. Аналогичное можно показать и для $\widetilde{\widetilde{P}}^2$. Окончательно для $3/2 < p < \infty$ получаем

$$\sum_{|\alpha|=1} \|\mathcal{D}^\alpha V\|_{L_p(\mathbb{R}^3\setminus B_{R^1};\mathbb{R}^3)} + \|q\|_{L_p(\mathbb{R}^3\setminus B_{R^1})}$$

$$\leqslant C\left\{\|\mathcal{F}\|_{\mathbf{L}_p(\Omega)} + \|V\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)} + \|Tq\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)}\right\},$$

где $T = T_1 + T_2$ — вполне непрерывный оператор.

Для функций $V\eta_2$, $q\eta_2$ в ограниченной области $\Omega_R = B_R \cap \Omega$ оценка

$$\sum_{|\alpha|=1} \|\mathcal{D}^\alpha V\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)} + \|q\|_{L_p(\Omega_R)} \leqslant C\left\{\|\mathcal{F}\|_{\mathbf{L}_p(\Omega_R)} + \|V\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)} + \|q\|_{L_p^{-1}(\Omega_R)}\right\}$$

следует из [19] и системы вида (49) с заменой функции η_1 на η_2. Таким образом, теорема 2 доказана для $3/2 < p < \infty$.

Рассмотрим случай $1 < p \leqslant 3/2$. Введем вспомогательную задачу

$$-\Delta V + \nabla q = \mathcal{D}^\alpha \Phi, \quad \operatorname{div} V = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{R}^3), \quad V|_{\partial\Omega} = 0, \tag{53}$$

в которой $|\alpha| = 1$, $\Phi \in L_p(\Omega;\mathbb{R}^3)$.

Для $p \in (3/2, \infty)$ доказана априорная оценка (48), из которой ниже (теорема 4) будет выведено, что ядро $\overset{\bullet}{N}_{p,\Omega}$ дифференциального оператора задачи (53) конечномерно в $\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}$, а тогда для любых $V, q \in \overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega} \ominus \overset{\bullet}{N}_{p,\Omega}$ при $3/2 < p < \infty$ будет иметь место оценка (см. теорему 5)

$$\sum_{|\alpha|=1} \|\mathcal{D}^\alpha V\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|q\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C\|\Phi\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^3)}. \tag{54}$$

Рассмотрим задачу (53). Пусть $\psi(x)$ — произвольное векторное поле из $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$, а w, φ — соответствующее ему решение задачи (53), причем $w \in L^1_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^3)$, $\varphi \in L_{p'}(\Omega)$, $3 \leqslant p' < \infty$, и при этом $\{w,\varphi\} \in \overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p',\Omega} \ominus \overset{\bullet}{N}_{p',\Omega}$. Тогда для w, φ имеет место оценка (54). Пусть теперь $V \in \overset{\bullet}{I}{}^1_p(\Omega)$, $q \in L_p(\Omega)$ — решение задачи (53) при $p \in (1, 3/2]$. Тогда имеет место следующая цепочка равенств для $|\alpha| = 1$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\mathcal{D}^\alpha V, \psi)\,dx &= -\int_\Omega (V, \mathcal{D}^\alpha \psi(x))\,dx = -\int_\Omega (V, -\Delta w + \nabla\varphi)\,dx \\ &= -\int_\Omega (-\Delta V + \nabla q, w)\,dx = -\int_\Omega (\mathcal{D}^\alpha \Phi, w)\,dx = \int_\Omega (\Phi, \mathcal{D}^\alpha w)\,dx.\end{aligned}$$

По неравенству Гёльдера получаем

$$\left|\int_\Omega (\mathcal{D}^\alpha V, \psi)\,dx\right| \leqslant \|\Phi\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^3)} \cdot \|\mathcal{D}^\alpha w\|_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^3)}.$$

В силу оценки (54) для $\{w,\varphi\} \in \overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p',\Omega} \ominus \overset{\bullet}{N}_{p',\Omega}$, $3 \leqslant p' < \infty$, имеем

$$\|\mathcal{D}^\alpha w\|_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leqslant C\|\psi\|_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^3)},$$

поэтому

$$\left|\int_\Omega (\mathcal{D}^\alpha V, \psi)\,dx\right| \leqslant C\|\Phi\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^3)} \cdot \|\psi\|_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^3)} \quad \forall \psi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3).$$

А тогда по обратному неравенству Гёльдера (см. [18, с. 65]) для $p \in (1, 3/2]$ имеем

$$\sum_{|\alpha|=1} \|\mathcal{D}^\alpha V\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leqslant C\|\Phi\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^3)}.$$

В частности, из плотности $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ для $\mathcal{F} \in L_p(\Omega)$, $1 < p \leqslant 3/2$, вытекает оценка

$$\sum_{|\alpha|=1} \|\mathcal{D}^\alpha V\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leqslant C\|\mathcal{F}\|_{L_p(\Omega)}. \tag{55}$$

Оценим $\|q\|_{L_p(\Omega)}$ для $1 < p \leqslant 3/2$. Сначала докажем неравенство

$$\|q\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C(p)\|\nabla q\|_{L_p^{-1}(\Omega)}. \tag{56}$$

Имеем

$$\|q\|_{L_p(\Omega)} = \sup_{\substack{\psi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega) \\ \|\psi\|_{\overset{\circ}{L}_{p'}(\Omega)} \neq 0}} \left|\int\limits_\Omega q\psi\,dx\right| \Big/ \|\psi\|_{\overset{\circ}{L}_{p'}(\Omega)}. \tag{57}$$

Рассмотрим задачу $\operatorname{div} v = \psi \in L_{p'}(\Omega)$, $v \in \overset{\circ}{L}{}^1_{p'}(\Omega)$, для решения которой имеет место оценка $\|v\|_{\overset{\circ}{L}{}^1_{p'}(\Omega)} \leqslant C(p')\|\psi\|_{L_{p'}(\Omega)}$ (см. [8]). Рассмотрим функционал

$$\int\limits_\Omega q\psi\,dx = \int\limits_\Omega q\operatorname{div} v\,dx = -\int\limits_\Omega (\nabla q, v)\,dx.$$

Ясно, что

$$\left|\int\limits_\Omega q\psi\,dx\right| \leqslant \|\nabla q\|_{L_p^{-1}(\Omega)} \cdot \|v|_{L^1_{p'}(\Omega)} \leqslant C(p')\|\nabla q\|_{L_p^{-1}(\Omega)} \cdot \|\psi\|_{L_{p'}(\Omega)},$$

откуда с использованием (57) получаем (56). Из (56), системы Стокса (8) и неравенства (55) вытекает

$$\|q\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla q\|_{L_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\operatorname{div}\mathcal{F}\|_{L_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\Delta V\|_{L_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)}$$
$$\leqslant C(\|\mathcal{F}\|_{\mathbb{L}_p(\Omega)} + \|V\|_{L^1_p(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leqslant C'\|\mathcal{F}\|_{\mathbb{L}_p(\Omega)}.$$

Таким образом,

$$\sum_{|\alpha|=1} \|\mathcal{D}^\alpha V\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|q\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C\|\mathcal{F}\|_{\mathbb{L}_p(\Omega)}$$

при $1 < p \leqslant 3/2$. Теорема доказана.

Другого типа оценку дает

Теорема 3. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *— неограниченная область вида* (3) *с компактной границей из класса* C^2, $1 < p < s < \infty$. *Если* $v \in \overset{\bullet}{I}{}^1_p(\Omega)$ *— обобщенное решение задачи* (8), (2) *с правой частью* $\mathcal{F} \in L_p(\Omega) \cap L_s(\Omega)$, *то для* $v \in \overset{\bullet}{I}{}^1_s(\Omega)$, $q \in L_s(\Omega)$ *имеет место оценка*

$$\|v\|_{L^1_s(\Omega)} + \|q\|_{L_s(\Omega)} \leqslant C\|(\mathcal{F}\|_{L_s(\Omega)} + \|v\|_{L^1_p(\Omega)}\big) \tag{58}$$

с постоянной $C > 0$, *зависящей только от* s, p *и* Ω.

Доказательство. Пусть открытые шары $\{B_j\}_{j=1}^\infty$ одного диаметра $d > 0$ образуют покрытие $\overline{\Omega}$ такое, что открытые шары $\{B'_j\}_{j=1}^\infty$ диаметра $2d$, концентрические с шарами $\{B_j\}_{j=1}^\infty$, образуют покрытие $\overline{\Omega}$ с кратностью, не превосходящей числа N. Пусть $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^\infty$ — набор функций из $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^3)$ таких, что $\operatorname{supp}\varphi \subset B_j$, $\varphi_j|_{B_j} = 1$, $j \geqslant 1$, причем все $\varphi_j(x)$ являются сдвигом одной и той же функции $\varphi_0(x) \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^3)$, т. е.

$$\|\varphi_j\|_{C^2} = \|\varphi_0\|_{C^2} = C_0, \quad j \geqslant 1.$$

Обозначим $\Omega'_j = \Omega \cap B'_j$ и положим

$$q^j(x) = q(x) - \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega'_j}\int\limits_{\Omega'_j} q(x)\,dx;$$

$$v^j(x) = \begin{cases} v(x), & x \in B'_j \cap \partial\Omega \neq \varnothing, \\ v(x) - \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega'_j}\int\limits_{\Omega'_j} v(x)\,dx, & B'_j \cap \partial\Omega = \varnothing, \end{cases}$$

для $x \in \Omega'_j$, $j \geqslant 1$, при этом имеем

$$-\Delta v^j + \nabla q^j = \operatorname{div}\mathcal{F}. \tag{59}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что области Ω_j имеют липшицеву границу, когда $B'_j \cap \partial\Omega \neq \varnothing$. Так как $\operatorname{div} v = 0$, то

$$\|\operatorname{div}(v^j\varphi_j)\|_{L_s(\Omega)} \leqslant C_0\|v^j\|_{L_s(\Omega'_j)}. \tag{60}$$

В силу (59) имеем

$$\|\Delta(v^j\varphi_j) - \nabla(q^j\varphi_j)\|_{L_s^{-1}(\Omega)} \leqslant \|\varphi_j \operatorname{div}\mathcal{F}\|_{L_s^{-1}(\Omega)} + C_0\big(\|v^j\|_{L_s(\Omega'_j)} + \|q^j\|_{L_s^{-1}(\Omega'_j)}\big). \tag{61}$$

Очевидно,

$$\|\varphi_j \operatorname{div}\mathcal{F}\|_{L_s^{-1}(\Omega)} \leqslant (1 + C_0)\|\mathcal{F}\|_{L_s(\Omega'_j)}. \tag{62}$$

При $3 \leqslant p < \infty$, $p < s < \infty$ и при $1 < p < 3$, $p < s \leqslant 3p/(3-p)$ с учетом того, что $\int\limits_{\Omega'_j} v\,dx = 0$, когда $B'_j \cap \partial\Omega = \varnothing$, а в случае непустого пересечения на $\partial\Omega$ есть нулевое граничное условие, имеем

$$\|v^j\|_{L_s(\Omega'_j)} \leqslant C\|v\|_{L_p^1(\Omega'_j)}, \tag{63}$$

где $C = C(s, p, \Omega)$.

По теореме вложения $W^1_{s'}(\Omega'_j) \hookrightarrow L_{p'}(\Omega'_j)$ для сопряженных показателей s' и p'

$$\|q^j\|_{L_s^{-1}(\Omega'_j)} \leqslant C(s, p, \Omega)\|q^j\|_{L_p(\Omega'_j)}, \tag{64}$$

так как $L_p \hookrightarrow L_s^{-1} \iff \overset{\circ}{L}{}^1_{s'} \hookrightarrow L_{p'}$.

Выше было доказано (см. (56)), что

$$\|q^j\|_{L_p(\Omega'_j)} \leqslant C(s, p, \Omega)\|\nabla q\|_{L_p^{-1}(\Omega'_j)}. \tag{65}$$

Так как $\nabla q = \operatorname{div}\mathcal{F} + \Delta v$, имеем $\|\nabla q\|_{L_p^{-1}(\Omega'_j)} \leqslant \|\mathcal{F}\|_{L_p(\Omega'_j)} + \|v\|_{L_p^1(\Omega_j)}$. Последнее неравенство вместе с (64), (65) дает

$$\|q^j\|_{L_s^{-1}(\Omega'_j)} \leqslant C\big(\|\mathcal{F}\|_{\mathbb{L}_p(\Omega'_j)} + \|v\|_{L_p^1(\Omega'_j)}\big). \tag{66}$$

Таким образом,

$$\|\Delta(v^j\varphi_j) - \nabla(q^j\varphi_j)\|_{L_s^{-1}(\Omega'_j)} \leqslant C\big(\|\mathcal{F}\|_{L_s(\Omega'_j)} + \|\mathcal{F}\|_{L_p(\Omega'_j)} + \|v\|_{L_p^1(\Omega'_j)}\big). \tag{67}$$

Из (67) и оценки Каттабриги [19] следует, что $\varphi_j v^j \in L^1_s(\Omega'_j)$ и

$$\|\varphi_j v^j\|_{L_s^1(\Omega'_j)} \leqslant C\big(\|\mathcal{F}\|_{L_s(\Omega'_j)} + \|v\|_{L_p^1(\Omega'_j)}\big). \tag{68}$$

Обозначим $\Omega_j = \Omega \cap B_j$. При этом $\varphi_j|_{\Omega_j} = 1$ и $\|v\|_{L_s^1(\Omega_j)} = \|v^j\|_{L_s^1(\Omega_j)} = \|\varphi_j v^j\|_{L_s^1(\Omega_j)}$, что вместе с (68) дает $\|v\|_{L_s^1(\Omega_j)} \leqslant C(\|\mathcal{F}\|_{\mathbb{L}_s(\Omega_j')} + \|v\|_{L_p^1(\Omega_j')})$. Тогда

$$\|v\|^s_{L_s^1(\Omega_j)} \leqslant C(\|\mathcal{F}\|^s_{L_s(\Omega_j')} + \|v\|^s_{L_p^1(\Omega_j')}) \leqslant (\|\mathcal{F}\|^s_{L_s(\Omega_j')} + \|v\|^{s-p}_{L_p^1(\Omega)} \|v\|^p_{L_p^1(\Omega_j')}). \quad (69)$$

Для любой измеримой функции $f(x)$ (Ω_j могут пересекаться) имеем

$$\|f\|^s_{L_s(\Omega)} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|f\|^s_{L_s(\Omega_j)}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \|f\|^p_{L_p(\Omega_j')} \leqslant N\|f\|^p_{L_p(\Omega)}$$

и, привлекая (69), получаем

$$\|v\|^s_{L_s^1(\Omega)} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|v\|^s_{L_s^1(\Omega_j)} \leqslant C\sum_{j=1}^{\infty} \|\mathcal{F}\|^s_{L_s(\Omega_j')} + C\|v\|^{s-p}_{L_p^1(\Omega)} \sum_{j=1}^{\infty} \|v\|^p_{L_p^1(\Omega_j')}$$
$$\leqslant CN\|\mathcal{F}\|^s_{\mathbb{L}_s(\Omega)} + CN\|v\|^{s-p}_{L_p^1(\Omega)} \|v\|^p_{L_p^1(\Omega)},$$

откуда находим

$$\|v\|_{L_s^1(\Omega)} \leqslant C(\|\mathcal{F}\|_{\mathbb{L}_s(\Omega)} + \|v\|_{L_p^1(\Omega)}). \quad (70)$$

Так как $\nabla q = \operatorname{div} \mathcal{F} + \Delta v$, из (70) следует оценка

$$\|v\|_{L_s^1(\Omega)} + \|\nabla q\|_{L_s^{-1}(\Omega)} \leqslant C(\|\mathcal{F}\|_{L_p(\Omega)} + \|v\|_{L_p^1(\Omega)}). \quad (71)$$

Таким образом, для $3 \leqslant p < \infty$ теорема доказана.

Если $1 < p < 3$, то имеют место вложения $L_1^1 \hookrightarrow L_{3/2}$, $L_{3/2}^1 \hookrightarrow L_3$, $L_3^1 \hookrightarrow L_q$ с любым q. Воспользовавшись не более трех раз оценкой (71), справедливой для $p < s \leqslant 3p/(3-p)$, получим оценку (71), справедливую при $1 < p < 3$ для любых конечных $s > p$.

Из доказанной выше оценки $\|q\|_{L_s(\Omega)} \leqslant C\|\nabla q\|_{L_s^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)}$ для любой $q(x) \in L_s(\Omega)$ и из (71) получаем

$$\|v\|_{L_s^1(\Omega)} + \|q\|_{L_s(\Omega)} \leqslant C(s,p,\Omega)(\|\mathcal{F}\|_{\mathbb{L}_s(\Omega)} + \|v\|_{L_p^1(\Omega;\mathbb{R}^3)}),$$

где $1 < p < s < \infty$. Теорема 3 доказана.

§ 4. Размерности ядер и коразмерности областей значений рассматриваемых операторов

Кроме указанного в названии, в этом параграфе будет решен вопрос о совпадении и несовпадении между собой введенных нами пространств $\overset{\circ}{I}{}_p^1(\Omega)$ и $\overset{\bullet}{I}{}_p^1(\Omega)$.

Теорема 4. *Ядра* $\overset{\circ}{N}_{p,\Omega}$ *и* $\overset{\bullet}{N}_{p,\Omega}$ *дифференциального оператора задачи* (1), (2) *суть конечномерные подпространства пространств* $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}$, $\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}$ *соответственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вспомним, что определенный в теореме 2 оператор T действует вполне непрерывно из пространства $L_p(\Omega_R)$ в пространство $L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)$, так как $W_p^1(\Omega_R;\mathbb{R}^3)$ компактно вкладывается в $L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)$, а $\|Tg\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_R;\mathbb{R}^3)} \leqslant C\|g\|_{L_p(\Omega)}$ для всякой функции $g \in L_p(\Omega)$ [8]. Для доказательства теоремы воспользуемся известной теоремой [14]:

если из всякой последовательности, равномерно ограниченной в некоторой норме, можно выбрать подпоследовательность, фундаментальную в той же норме, то это пространство конечномерно.

Доказательство проведем для случая $\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}$. Для $\{V,q\} \in \overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}$ положим

$$\|\{V,q\}\|_{\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}} \equiv \nu\|V\|_{L^1_p(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|q\|_{L_p(\Omega)}.$$

Пусть $\left\{\{V^j,q_j\}\right\}_{j=1}^{\infty} \in \overset{\bullet}{N}_{p,\Omega}$, так что

$$\|\{V^j,q_j\}\|_{\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}} \leqslant A < \infty \quad \text{для всех} \quad j = 1,2,\ldots \tag{72}$$

с постоянной $A > 0$, не зависящей от j. Если обозначить через V^j_R сужение V^j на область Ω_R, то, очевидно, в рассматриваемом случае и последовательность $\left\{V^j_R\right\}_{j=1}^{\infty}$ будет равномерно ограничена в норме $L^1_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)$ той же постоянной A. Заметим, что в силу ограниченности области Ω_R и гладкости ее границ норма $\left\|V^j_R\right\|_{L^1_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)}$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_{W^1_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)}$ на множестве векторных полей V таких, что $V \in L^1_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)$ и $V|_{\partial\Omega} = 0$. Значит, последовательность векторных полей $\left\{V^j_R\right\}_{j=1}^{\infty}$ равномерно ограничена и в норме $W^1_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)$. Но $W^1_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)$ компактно вкладывается в $L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)$. Значит, найдется последовательность $\{V^{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$, фундаментальная в $L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)$.

В силу непрерывности оператора T: $L_p(\Omega_R) \to L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)$ из ограниченной условием (72) последовательности выберем подпоследовательность $\{q_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$, такую что Tq_{j_k} фундаментальна в норме $L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^3)$. Из оценки (48) и замечания к теореме 2 следует, что подпоследовательность $\{V^{j_k},q_{j_k}\}$ фундаментальна в норме $\|\cdot\|_{\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}}$. Итак, подпространство $\overset{\bullet}{N}_{p,\Omega}$ конечномерно. Заметим, что отсюда следует и конечномерность ядра $\overset{\circ}{N}_{p,\Omega}$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Области значений* $\overset{\circ}{R}_{p,\Omega}$ *и* $\overset{\bullet}{R}_{p,\Omega}$ *дифференциального оператора задачи* (1), (2) *замкнуты в* $L^{-1}_p(\Omega;\mathbb{R}^3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 4 следует, что пространства $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}$ и $\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}$ представимы как прямые суммы вида

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{p,\Omega} = \overset{\circ}{N}_{p,\Omega} \oplus \overset{\circ}{M}_{p,\Omega}, \quad \overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega} = \overset{\bullet}{N}_{p,\Omega} \oplus \overset{\bullet}{M}_{p,\Omega} \tag{73}$$

с замкнутыми в $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}$ и $\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}$ подпространствами $\overset{\circ}{M}_{p,\Omega}$ и $\overset{\bullet}{M}_{p,\Omega}$.

Докажем, что для всякой пары $\{V,q\} \in \overset{\bullet}{M}_{p,\Omega}$ имеет место неравенство

$$C'\|\{V,q\}\|_{\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}} \leqslant \|L\{V,q\}\|_{L^{-1}_p(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leqslant C''\|\{V,q\}\|_{\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}} \tag{74}$$

с постоянными $C' > 0$ и $C'' > 0$, не зависящими от V и q. Правое неравенство (74) очевидно. Докажем левое. Предположим, что соответствующее утверждение не имеет места. Тогда в силу предположения найдется семейство пар $\left\{\{V^k,q_k\}\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\{V^k,q_k\} \in \overset{\bullet}{M}_{p,\Omega}$, таких что

$$\|L\{V^k,q_k\}\|_{L^{-1}_p(\Omega;\mathbb{R}^3)} < \frac{1}{k}\|\{V^k,q_k\}\|_{\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}}. \tag{75}$$

Если ввести обозначения $f^k \equiv L\{V^k, q_k\}$, то, как было отмечено выше, найдется постоянная $C > 0$, не зависящая от f^k, такая что для любой вектор-функции f^k, $k = 1, 2, \ldots$, найдется $\mathcal{F}^k \in \mathbb{L}_p(\Omega)$, для которой $\operatorname{div} \mathcal{F}^k = f^k$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$ и $\|\mathcal{F}^k\|_{\mathbb{L}_p(\Omega)} \leqslant C^{-1}\|f^k\|_{L_p^{-1}(\Omega)}$. Значит, вместо (75) получим неравенство

$$C\|\mathcal{F}^k\|_{\mathbb{L}_p(\Omega)} < \frac{1}{k}\|\{V^k, q_k\}\|_{\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}}. \tag{76}$$

Не ограничивая общности, можно считать

$$\|\{V^k, q_k\}\|_{\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}} = C > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{77}$$

а тогда из (76) следует $\|\mathcal{F}^k\|_{\mathbb{L}_p(\Omega)} < 1/k$, так что $\lim\limits_{k\to\infty} \|\mathcal{F}^k\|_{\mathbb{L}_p(\Omega)} = 0$.

Для V^k, q^k и $\mathcal{F}^k$ при любом $k = 1, 2, \ldots$ имеет место оценка (48), доказанная в теореме 2. Тогда последовательность $\big\{\{V^k, q_k\}\big\}_{k=1}^{\infty}$, равномерно ограниченная в силу (72), будет фундаментальной в норме $\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}$, что доказывается так же, как и в теореме 4. В силу полноты пространств $\overset{\circ}{I}{}^1_p(\Omega)$, $\overset{\bullet}{I}{}^1_p(\Omega)$, $L_p(\Omega)$ существуют векторное поле V и функция q, такие что

$$\{V, q\} \in \overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}, \quad \lim_{k\to\infty} \|V^k - V\|_{L_p^1(\Omega;\mathbb{R}^3)} = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \|q_k - q\|_{L_p(\Omega)} = 0.$$

При этом $\{V, q\} \in \overset{\bullet}{M}_{p,\Omega}$ в силу замкнутости подпространства $\overset{\bullet}{M}_{p,\Omega}$. Но $L\{V, q\} = 0$, т. е. $\{V, q\} \in \overset{\bullet}{N}_{p,\Omega}$. Значит,

$$\|\{V, q\}\|_{\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_{p,\Omega}} = 0, \tag{78}$$

поскольку, с одной стороны, $\{V, q\} \in \overset{\bullet}{M}_{p,\Omega} \cap \overset{\bullet}{N}_{p,\Omega}$, а с другой, имеет место разложение (73), из которого следует $\overset{\bullet}{M}_{p,\Omega} \cap \overset{\bullet}{N}_{p,\Omega} = \{0\}$. Но (78) противоречит (77). Тем самым доказана левая оценка (74), из которой следует замкнутость $\overset{\bullet}{R}_{p,\Omega}$ в $L_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3)$.

Доказательство замкнутости $\overset{\circ}{R}_{p,\Omega}$ в $L_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ проводится аналогично. Теорема 5 доказана.

Докажем ряд лемм о совпадении или несовпадении введенных выше пространств и о поведении при $\|x\| \to \infty$ функций из этих пространств.

Как отмечено выше, в работе [5] доказано (см. также [15]), что $\overset{\circ}{I}{}^1_p(\Omega) = \widehat{\overset{\circ}{I}{}^1_p}$ для неограниченной области с компактной границей для всех p таких, что $1 \leqslant p < \infty$.

Методами работы [15] доказывается

Лемма 5. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — неограниченная область с компактной липшицевой границей, $n \geqslant 2$. Тогда*

$$\widehat{\overset{\circ}{L}{}^1_p}(\Omega) = \overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega) \quad \textit{при} \quad n \leqslant p < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой $\psi(x) \in \widehat{\overset{\circ}{L}{}^1_p}(\Omega)$ обычным образом (см. [15, 20]) построим последовательность функций $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$: $\psi_k(x) \in$

$C^\infty(\Omega) \cap L_p^1(\Omega)$, равных нулю в некоторой окрестности границы $\partial\Omega$, таких что $\lim\limits_{k\to\infty} \|\psi - \psi_k\|_{L_p^1(\Omega)} = 0$. Функции $\psi_k(x) \in C^\infty(\Omega) \cap L_p^1(\Omega)$ при $n \leqslant p < \infty$ аппроксимируются в $L_p^1(\Omega)$ тождественно равными нулю в некоторой окрестности $\partial\Omega$ функциями из $C^\infty(\Omega) \cap L_\infty(\Omega) \cap L_p^1(\Omega)$ с помощью срезающих функций из [15]. В свою очередь, эти функции из $C^\infty(\Omega) \cap L_\infty(\Omega) \cap L_p^1(\Omega)$ аппроксимируются в $L_p^1(\Omega)$ функциями из $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ с помощью обычной срезки $\eta(x/\mu)$ при $\mu \to \infty$, где $\eta(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & |x| \geqslant 2, \\ 0, & |x| \leqslant 1. \end{cases} \tag{79}$$

Лемма доказана.

В работе [20] С. Л. Соболев установил, что при $1 < p < n$ функции из $L_p^1(\mathbb{R}^n)$ выходят на бесконечности на постоянную, откуда следует

Лемма 6. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — неограниченная область с компактной липшицевой границей, $n \geqslant 2$. Тогда для функций $u(x) \in \widehat{\overset{\circ}{L}}{}_p^1(\Omega)$ при $1 < p < n$ имеем*

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \Longleftrightarrow u(x) \in \overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega),$$

причем $\dim \widehat{\overset{\circ}{L}}{}_p^1(\Omega)/\overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega) = 1$, если $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\eta_0(x) = 0$ в некоторой окрестности границы $\partial\Omega$ и $\eta_0(x) = 1$ в некоторой окрестности бесконечности.

Рассмотрим функцию $\psi \in \widehat{\overset{\circ}{L}}{}_p^1(\Omega)$. Доопределив ее нулем вне Ω, получим $\psi(x) \in L_p^1(\mathbb{R}^n)$. С. Л. Соболев в [20] доказал, что при $1 < p < n$ найдется постоянная C, такая что разность $\psi(x) - C$ аппроксимируется в L_p^1 последовательностью $\eta(x/\mu)[\psi(x) - C]$, $\mu \to \infty$, где $\eta(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию (79), что следует из принадлежности разности $\psi(x) - C$ пространству $L_q(\mathbb{R}^n)$, где $q = np/(n-p)$. Поэтому функции $\psi_\mu(x) = \eta(x/\mu)[\psi - C\eta_0(x)]$ аппроксимируют разность $\psi(x) - C\eta_0(x)$ в $L_p^1(\Omega)$ при $\mu \to +\infty$. Функции ψ_μ принадлежат $\overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega)$, так как $\psi_\mu(x)$ аппроксимируются в $L_p^1(\Omega)$ функциями из $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$. А тогда $\psi(x) - C\eta_0(x) \in \overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega)$ для любой $\psi(x) \in \widehat{\overset{\circ}{L}}{}_p^1(\Omega)$ с одной и той же фиксированной функцией $\eta_0(x)$, т. е. при $1 < p < n$ имеем

$$\dim \widehat{\overset{\circ}{L}}{}_p^1(\Omega)/\overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega) \leqslant 1. \tag{80}$$

Чтобы получить неравенство, обратное к (80), рассмотрим функционал

$$\Lambda(\psi) = \int\limits_\Omega \left(\nabla\psi(x), \frac{x}{|x|^n}\right) dx.$$

Если $\psi(x) \in \overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega)$, то ввиду соленоидальности векторного поля $x/|x|^n \in L_{p'}^1(\Omega)$, $n \leqslant p' < \infty$, имеем

$$\Lambda(\psi) = 0 \quad \forall \psi(x) \in \overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega), \quad 1 < p < n. \tag{81}$$

С другой стороны, для $\psi(x) \in \widehat{\overset{\circ}{L}}{}_p^1(\Omega)$ при $1 < p < n$

$$\Lambda\psi = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Omega_R} \left(\nabla\psi(x), \frac{x}{|x|^n}\right) dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n-1}} \int\limits_{S_R} \psi(x)\, ds,$$

где $S_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = R\}$. Возьмем $\psi(x) = \eta_0(x)$, тогда $\Lambda(\eta_0) = 1$, откуда в силу (81) следует, что $\eta_0(x) \notin \overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega)$, т. е. $\dim \widehat{\overset{\circ}{L}}{}_p^1(\Omega)/\overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega) \geqslant 1$. Отсюда и из (80) вытекает утверждение леммы 6.

Лемма 7. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — неограниченная область с компактной липшицевой границей. Тогда для векторного поля $v(x) \in \overset{\bullet}{I}{}_p^1(\Omega)$ при $1 < p < 3$ имеем*

$$\lim_{|x|\to\infty} v(x) = 0 \Longleftrightarrow v(x) \in \overset{\circ}{I}{}_p^1(\Omega),$$

причем $\dim \overset{\bullet}{I}{}_p^1(\Omega)/\overset{\circ}{I}{}_p^1(\Omega) = 3$, *если* $\lim\limits_{|x|\to\infty} v(x) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\overset{\bullet}{I}{}_p^1(\Omega)$ — подпространство соленоидальных векторных полей в пространстве трехмерных векторных полей $\widehat{\overset{\circ}{L}}{}_p^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ и $\dim \widehat{\overset{\circ}{L}}{}_p^1(\Omega;\mathbb{R}^3)/\overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega;\mathbb{R}^3) = 3$, имеем

$$\dim \overset{\bullet}{I}{}_p^1(\Omega;\mathbb{R}^3)/\overset{\circ}{I}{}_p^1(\Omega;\mathbb{R}^3) \leqslant 3. \tag{82}$$

Чтобы получить неравенство, обратное к (82), возьмем функцию $\eta_0(x)$ из доказательства леммы 6 и произвольную векторную константу $a \in \mathbb{R}^3$. Пусть $R > 0$ — радиус открытого шара B_R, содержащего $\operatorname{supp}|\nabla\eta_0|$. Для области $\Omega_R = \Omega \cap B_R$

$$\int\limits_{\Omega_R} (a, \nabla\eta_0(x))\, dx = 0.$$

Поэтому в Ω_R разрешима краевая задача

$$\operatorname{div} v = (a, \nabla\eta_0(x)), \ x \in \Omega_R; \quad v|_{\partial\Omega_R} = 0. \tag{83}$$

Решение задачи (83) из класса $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega_R;\mathbb{R}^3)$ строится в явном виде с помощью представлений из [8]. Доопределяя $v(x)$ нулем вне Ω_R, получим $v(x) \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$. А полагая $\tilde{v}(x) = v(x) - a\eta_0(x)$, получим соленоидальное бесконечно дифференцируемое векторное поле $\tilde{v}(x)$, тождественно равное векторной постоянной a в некоторой окрестности бесконечности и тождественно равное нулю в некоторой окрестности границы $\partial\Omega$. Очевидно, $\tilde{v}(x) \in \overset{\bullet}{I}{}_p^1(\Omega)$.

Таким образом, построенное поле $\tilde{v}(x)$ не принадлежит $\overset{\circ}{I}{}_p^1(\Omega)$, ибо в противном случае каждая его компонента была бы из $\overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega)$, что, вообще говоря, невозможно, ибо $\lim\limits_{|x|\to\infty} \tilde{v}(x) = a$. Но $a \in \mathbb{R}^3$, так что $\dim \overset{\bullet}{I}{}_p^1(\Omega)/\overset{\circ}{I}{}_p^1(\Omega) \geqslant 3$; отсюда и из (82) вытекает утверждение леммы 7.

В дальнейшем будет полезна лемма об асимптотическом поведении решения во внешности шара с произвольными граничными значениями на его поверхности.

Лемма 8. *Асимптотика при $|x| \to \infty$ решения однородной системы Стокса во внешности шара $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| > 1\}$ с произвольными граничными условиями в классе*

$$\{V, q\} \in \overset{\bullet}{N}_{p,D} \subset \overset{\bullet}{I}{}^1_p(D) \times L_p(D)$$

та же, что и у решения с нулевыми граничными условиями, определяемого теоремой 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $q(x)$ — гармоническая функция из $L_p(D)$, $1 < p < \infty$, она представляется в виде ряда

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathbb{Y}_n(\theta, \varphi) r^{-n}. \tag{84}$$

Ввиду бесконечной дифференцируемости решений однородной системы Стокса, имеем $\mathcal{D}_x^\alpha q(x) \in L_2(S)$ для любого мультииндекса α, где $S = \{x : |x| = 2\}$. Поэтому $C_n 2^{-n} = O(1/(n^m))$ для любого достаточно большого натурального m. Отсюда при $r > 2$ имеем

$$|q(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^m} \left(\frac{r}{2}\right)^{-n}, \quad r = |x|.$$

При найденном $q(x)$ в виде ряда (84) каждая компонента скорости в системе Стокса определяется как решение неоднородного уравнения Пуассона

$$\Delta v_j = \frac{\partial q}{\partial x_j}. \tag{85}$$

Решение уравнения (85) равно частному решению неоднородного уравнения плюс общее решение однородного. Последнее представляется в виде бесконечного ряда

$$v_j^0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^j Y(\varphi, \theta) r^{-n}. \tag{86}$$

Частное решение уравнения (85) определяется формулой $v_j^r = q(x)x_j/2$. В самом деле, $\Delta v_j^r = \frac{1}{2}\Delta(qx_j) = (\nabla q, \nabla x_j) = \frac{\partial q}{\partial x_j}$. Покажем, что вектор $v = x/r$, соответствующий главному члену асимптотики в выражении для $q(x)$, не соленоидален.

Действительно, $\operatorname{div}(x/r) = 2/r \neq 0$. Таким образом,

$$q = \sum_{n=2}^{\infty} C_n \mathbb{Y}_n(\theta, \varphi) r^{-n}, \tag{87}$$

так как при нулевых граничных значениях асимптотика для $q(x)$ имеет порядок $1/r^2$.

Итак, будем определять поле скоростей как решение уравнения (85), где $q(x)$ задается рядом (87). Главный член ряда в частном решении для v_j будет иметь порядок C/r или лучше. Главный же член гармонического ряда (86) — общего решения однородного уравнения для v_j — при $|x| \to \infty$ выходит на постоянную. При удовлетворении уравнения соленоидальности теперь могут обратиться в нуль некоторые постоянные C_n и A_n^j, но асимптотика на бесконечности рассматриваемого решения не ухудшится. Лемма доказана.

Теперь определим размерности ядер $\overset{\bullet}{N}_{p,\Omega}$ и $\overset{\circ}{N}_{p,\Omega}$ задачи

$$-\Delta v + \nabla q = 0, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad x \in \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \tag{88}$$

где Ω — произвольная область с компактной границей вида (3).

В теореме (1) для внешности шара $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| > R\}$ было доказано, что

$$\dim \overset{\bullet}{N}_{p,D} = \begin{cases} 0, & 1 < p \leqslant 3/2, \\ 3, & 3/2 < p < \infty. \end{cases} \tag{89}$$

Из леммы 7 и явного представления (14) решения однородной задачи Стокса в пространстве $\overset{\circ}{I}{}^1_p(\Omega)$ следует, что постоянные α_1, α_2, α_3 должны быть взяты нулями в случае $1 < p < 3$, иначе решение не будет принадлежать $\overset{\circ}{I}{}^1_p(\Omega)$, т. е.

$$\dim \overset{\circ}{N}_{p,D} = \begin{cases} 0, & 1 < p < 3, \\ 3, & 3 \leqslant p < \infty. \end{cases} \tag{90}$$

Теорема 6. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — неограниченная область вида* (3) *с компактной границей из класса C^2. Тогда размерности $\overset{\bullet}{N}_{p,\Omega}$, и $\overset{\circ}{N}_{p,\Omega}$, вычисляются по тем же формулам* (89) *и* (90), *что и для внешности шара.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случаи $1 < p < 2$ и $2 \leqslant p < \infty$.

Пусть $2 \leqslant p < \infty$ и $\eta(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ — срезающая функция,

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & |x| \geqslant 2R, \\ 0, & |x| \leqslant R, \end{cases}$$

где фиксированное число $R > 0$ выбрано так, что $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega \subset B_R$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$. (Изменив масштаб, можно выбрать $R = 1$, что было сделано при доказательстве теоремы 1.)

Пусть $v(x)$, $q(x)$ — обобщенное решение задачи

$$-\Delta v + \nabla q = 0, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad |x| > R, \quad v|_{|x|=R} = 0. \tag{91}$$

По решению $\{v, q\}$ задачи (91) во внешности шара построим решение однородной задачи Стокса в области Ω. Так как система (91) эллиптическая по Дуглису — Ниренбергу, решение $v(x)$, $q(x)$ задачи (91) бесконечно дифференцируемо по x при $|x| > R$.

Рассмотрим в области $R < |x| < 2R$ краевую задачу

$$\operatorname{div} w = (v, \nabla\eta), \quad w|_{|x|=R} = w|_{|x|=2R} = 0, \tag{92}$$

которая решается с помощью явного представления из [8]. Найденное векторное поле $w(x)$ доопределим нулем при $|x| < R$ и $|x| > 2R$. Тогда векторное поле $\eta(x)v(x) - w(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ соленоидально и равно нулю в некоторой окрестности границы $\partial\Omega$.

Для области Ω рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta u + \nabla\psi = \Delta(\eta v - w) - \nabla(\eta q), \quad \operatorname{div} u = 0, \quad x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{93}$$

В силу (91), (92) векторное поле $\Delta(\eta v - w) - \nabla(\eta q)$ принадлежит $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$, его носитель компактен в Ω и содержится в B_{2R}. Поэтому по теореме Рисса существует единственное обобщенное решение $u(x) \in \overset{\circ}{I}{}^1_2(\Omega)$ задачи (93).

Применяя к задаче (93) теорему 3 об априорной оценке, заключаем, что $u(x) \in \overset{\circ}{I}{}^1_p(\Omega)$ при $2 \leqslant p < \infty$. (В теореме 3 при $p = 2$ получаем $2 < s < \infty$.)

Полагая в Ω

$$V(x) = u(x) + \eta(x)v(x) - w(x), \quad Q(x) = \eta(x)q(x) + \psi(x),$$

получим обобщенное решение задачи Стокса

$$-\Delta V + \nabla Q = 0, \quad \operatorname{div} V = 0, \quad x \in \Omega, \quad V|_{\partial\Omega} = 0$$

с $V(x) \in \overset{\bullet}{I}{}^1_p(\Omega)$, которое выходит на бесконечности на ту же векторную постоянную, что и $v(x)$, ибо $u(x) \in \overset{\circ}{I}{}^1_p(\Omega)$ выходит на бесконечности на нуль. Поэтому

$$\dim \overset{\bullet}{N}_{p,\Omega} \geqslant \dim \overset{\bullet}{N}_{p,D} \quad \text{при} \quad 2 \leqslant p < \infty. \tag{94}$$

Тем же путем, что и выше, по решению для Ω строится решение однородной задачи Стокса для внешности шара $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}_r$, где $r > 0$ — такой радиус, что $B_r \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, откуда

$$\dim \overset{\bullet}{N}_{p,\mathbb{R}^3\setminus\overline{B}_r} \geqslant \dim \overset{\bullet}{N}_{p,\Omega}. \tag{95}$$

Поскольку для любых $r, R > 0$ при $2 \leqslant p < \infty$ имеем

$$\dim \overset{\bullet}{N}_{p,\mathbb{R}^3\setminus\overline{B}_R} = \dim \overset{\bullet}{N}_{p,\mathbb{R}^3\setminus\overline{B}_r} = 3,$$

из (94), (95) получаем $\dim \overset{\bullet}{N}_{p,\Omega} = 3$ для $2 \leqslant p < \infty$; таким образом, в случае $2 \leqslant p < \infty$ теорема 6 доказана.

Рассмотрим случай $1 < p < 2$. Пусть $v(x) \in \overset{\bullet}{I}{}^1_p(\Omega)$ — обобщенное решение однородной задачи Стокса в области Ω. По теореме 3 это обобщенное решение принадлежит $\overset{\bullet}{I}{}^1_2(\Omega)$. Отсюда следует, что при $1 < p < 2$

$$\dim \overset{\bullet}{N}_{p,\Omega} \leqslant 3, \tag{96}$$

так как при $p = 2$ уже доказано, что размерность ядра равна трем.

Согласно лемме 8 асимптотическое разложение решения для внешности шара $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}_R$ с неоднородными краевыми условиями на ∂B_R то же, что и для однородных краевых условий, так что для обобщенного решения $v(x) \in \overset{\bullet}{I}{}^1_p(\Omega)$ имеем $\lim\limits_{|x|\to\infty} v(x) = 0$ при $1 < p \leqslant 3/2$. Отсюда $v(x) \in \overset{\circ}{I}{}^1_p(\Omega)$. А тогда из теоремы 3 вытекает, что $v(x) \in \overset{\circ}{I}{}^1_2(\Omega)$, т. е. $v(x) = 0$ п. в. в Ω. Следовательно, при $1 < p \leqslant 3/2$ будет $\dim \overset{\bullet}{N}_{p,\Omega} = 0$.

Остается доказать неравенство, обратное к (96), при $3/2 < p < 2$. Для этого возьмем векторное поле $u(x) \in \overset{\bullet}{I}{}^1_p(\Omega)$, тождественно равное заданной векторной константе в некоторой окрестности бесконечности. Пусть $u(x) \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$, тогда $\Delta u(x) \in \overset{\circ}{I}{}^\infty(\Omega)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta w + \nabla \psi = \Delta u, \quad \operatorname{div} w = 0, \quad x \in \Omega, \quad w|_{\partial\Omega} = 0. \tag{97}$$

По теореме Рисса существует единственное обобщенное решение $w(x) \in \overset{\circ}{I}{}^1_2(\Omega)$ задачи (97). Для некоторого $R > 0$ носитель векторного поля $\Delta u(x)$ содержится в открытом шаре B_R. Из асимптотического разложения решения $w(x)$ для внешности шара $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}_R$ с неоднородными краевыми условиями на ∂B_R следует, что $w(x) \in \overset{\circ}{I}{}^1_p(\Omega)$ при $3/2 < p < 2$, так как

$$\lim_{|x| \to \infty} w(x) = 0 \tag{98}$$

ввиду принадлежности $w(x) \in \overset{\circ}{I}{}^1_2(\Omega)$. А тогда векторное поле $v(x) = u(x) + w(x) \in \overset{\bullet}{I}{}^1_p(\Omega)$ будет обобщенным решением задачи (91), выходящим в силу (98) на бесконечности на заданную векторную постоянную, откуда $\dim \overset{\bullet}{N}_{p,\Omega} \geqslant 3$ при $3/2 < p < 2$; отсюда и из (96) следует, что $\dim \overset{\bullet}{N}_{p,\Omega} = 3$ при $3/2 < p < 2$. Теорема 6 доказана.

Определим размерности коядра каждого из операторов, рассматриваемых в наших пространствах.

Теорема 7. *Пусть Ω — область типа (3) с компактной границей. Тогда для областей значений имеем*

a) $\dim L_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3) / \overset{\bullet}{R}{}^1_{p,\Omega} = 0, \quad \dim L_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3) / \overset{\circ}{R}{}^1_{p,\Omega} = 3, \quad 1 < p \leqslant 3/2;$

b) $\dim L_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3) / \overset{\bullet}{R}{}^1_{p,\Omega} = \dim L_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3) / \overset{\circ}{R}{}^1_{p,\Omega} = 0$ *для* $3/2 < p < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. a) Рассмотрим случай $3/2 < p < \infty$, тогда сопряженное $p' \in (1, 3)$.

Рассмотрим аннулятор области значений $\overset{\circ}{R}{}^1_{p,\Omega}$. Пусть

$$u \in \overset{\circ}{L}{}^1_{p'}(\Omega; \mathbb{R}^3) : \langle f, u \rangle = 0 \quad \forall f \in \overset{\circ}{R}{}^1_{p,\Omega} \subset L_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3);$$

в частности, выбирая $f = \nabla q$, получим $\langle \nabla q, u \rangle = 0$ $\forall q \in L_p(\Omega)$. Отсюда $u \in \overset{\circ}{I}{}^1_{p'}(\Omega)$. Затем, выбирая $f = -\Delta V$, имеем $\langle \Delta V, u \rangle = 0$ $\forall V \in \overset{\circ}{I}{}^1_p(\Omega)$, откуда $\langle \nabla V, \nabla u \rangle = 0$ $\forall V \in \overset{\circ}{I}{}^\infty(\Omega)$, т. е. $u(x)$ — обобщенное решение из $\overset{\circ}{I}{}^1_p(\Omega)$ задачи Стокса.

Пользуясь теоремой 6 для $1 < p' < 3$, получаем $u \equiv 0$, поскольку $\dim \overset{\circ}{N}{}^1_{p,\Omega} = 0$. Отсюда следует, что

$$\dim L_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3) / \overset{\circ}{R}{}^1_{p,\Omega} = 0.$$

Так как $\overset{\circ}{R}{}^1_{p,\Omega} \subset \overset{\bullet}{R}{}^1_{p,\Omega}$, то и $\dim L_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3) / \overset{\bullet}{R}{}^1_{p,\Omega} = 0$.

b) Рассмотрим случай $1 < p \leqslant 3/2$; в этом случае $3 \leqslant p' < \infty$.

Рассмотрим аннулятор подпространства $\overset{\bullet}{R}{}^1_{p,\Omega}$, т. е. рассмотрим $u \in \widehat{\overset{\circ}{L}}{}^1_{p'}(\Omega; \mathbb{R}^3) : \langle f, u \rangle = 0$ $\forall f \in \overset{\bullet}{R}{}^1_{p,\Omega} \subset L_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3)$.

Выбирая $f = \nabla q$, получим $\langle \nabla q, u \rangle = 0$ $\forall q \in L_p(\Omega)$; отсюда $u \in \overset{\bullet}{I}{}^1_{p'}(\Omega)$. Затем, выбирая $f = -\Delta V$ с $V \in \overset{\bullet}{I}{}^1_p(\Omega)$, получим $\langle \Delta V, u \rangle = -\langle \nabla V, \nabla u \rangle = 0$ $\forall V \in \overset{\bullet}{I}{}^1_p(\Omega)$.

Рассмотрим шар $B_R(0)$, такой что $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \subset B_R$. Тогда, вспомнив обозначение $\Omega_R = \Omega \cap B_R$, получим

$$\langle \nabla V, \nabla u \rangle = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Omega_R} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{S_R} \left(V, \frac{\partial u}{\partial r} \right) ds - \int\limits_{\Omega} (V, \Delta u)\, dx. \quad (99)$$

С другой стороны, так как $\langle \Delta V, u \rangle = 0 \ \forall V \in \overset{\bullet}{I}{}^1_p(\Omega)$, имеем $\langle \Delta V, u \rangle = 0$ $\forall V \in \overset{\circ}{I}{}^\infty(\Omega)$ ввиду того, что $\overset{\bullet}{I}{}^1_p(\Omega) = \overset{\circ}{I}{}^1_p(\Omega)$ для рассматриваемых p, $1 < p \leqslant 3/2$. Тогда $\langle \Delta V, u \rangle = 0 = \langle V, \Delta u \rangle \ \forall V \in \overset{\circ}{I}{}^\infty(\Omega)$, откуда следует существование $\varphi \in L_{p'}(\Omega)$ такой, что $\Delta u = \nabla \varphi$, т. е. $\{u, \varphi\}$ — обобщенное решение задачи Стокса; на самом деле, оно будет бесконечно дифференцируемым классическим решением, т. е. функционал можно реализовать в виде интеграла. Поэтому

$$\int\limits_{\Omega} (V, \Delta u)\, dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Omega_R} (V, \nabla \varphi)\, dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{S_R} \left(V, \frac{x}{|x|} \right) \varphi\, dx. \quad (100)$$

Из (99) и (100) получаем

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{S_R} \left(V, \frac{\partial u}{\partial r} \right) ds = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{S_R} \left(V, \frac{x}{|x|} \right) \varphi\, ds. \quad (101)$$

Подставим в (101) в качестве $\{u, \varphi\}$ явное решение однородной системы Стокса в рассматриваемом нами случае $3/2 < p < \infty$, которое имеет вид (14), (15) и дается теоремой 1. Запишем это решение в полярных координатах, тогда легко вычислить $\partial u / \partial r$ на поверхности сферы. Так как $V \in \overset{\bullet}{I}{}^1_p(\Omega)$, имеем $\lim\limits_{|x|\to\infty} V = (A_1, A_2, A_3)$ с произвольными постоянными A_i. После предельного перехода при $R \to \infty$ из (101) получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \big\{ & A_1[-3\alpha_1 \cos\theta \cos\varphi \sin^2\theta + \alpha_2 \sin\theta (1 + 3\sin\theta \cos^2\varphi) + 3\alpha_3 \sin\varphi \cos\varphi \sin^3\theta] \\ & + A_2\left[-3\alpha_1 \sin\varphi \sin^2\theta \cos\theta + 3\alpha_2 \sin\varphi \cos\varphi \sin^3\theta + \alpha_3 \sin\theta (1 + 3\sin^2\theta \sin^2\varphi)\right] \\ & + A_3\left[-\alpha_1 \sin\theta (1 + 3\cos^2\theta) + 3\alpha_2 \sin^2\theta \cos\theta \cos\varphi + 3\alpha_3 \sin\varphi \cos\theta \sin^2\theta\right] \big\}\, d\varphi\, d\theta = 0.\end{aligned} \quad (102)$$

Вычислим в (102) интегралы по единичной сфере и обозначим полученные при этом постоянные, зависящие от α_k, через β_k. Тогда

$$A_1\beta_1 + A_2\beta_2 + A_3\beta_3 = 0 \quad \forall A_i \in \mathbb{R}^1, \ i = 1, 2, 3,$$

откуда $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, т. е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ в формулах для решения из теоремы 1.

Таким образом, $u(x) \equiv 0$, $\varphi(x) \equiv 0$, т. е. $\dim L_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3) / \overset{\bullet}{R}{}^1_{p,\Omega} = 0$, ибо аннулятором для $\overset{\bullet}{R}{}^1_{p,\Omega}$ является нулевой элемент.

Коразмерность области значения $\overset{\circ}{R}{}^1_{p,\Omega}$ равна размерности ядра дифференциального оператора, сопряженного к $\mathcal{L}$ и действующего в $\overset{\circ}{\mathcal{D}}{}^1_{p',\Omega}$, $3 \leqslant p < \infty$, поэтому $\dim L_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3) / \overset{\circ}{R}{}^1_{p,\Omega} = \dim \overset{\circ}{N}_{p',\Omega} = 3$. Теорема 7 доказана.

Выражаем глубокую благодарность М. Е. Боговскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Масленникова В. Н., Тимошин М. А.* К L_p-теории в задаче обтекания для системы Стокса // Применение новых методов анализа к дифференциальным уравнениям. Воронеж, 1989. С. 63–77.
2. *Тимошин М. А.* О размерности ядра дифференциального оператора первой краевой задачи для системы Стокса в L_p-пространствах в случае неограниченных областей с компактной границей // Краевые задачи и пространства дифференцируемых функций. М.: Изд-во Ун-та Дружбы народов, 1989. С. 124–147.
3. *Масленникова В. Н., Тимошин М. А.* К L_p-теории для задачи Стокса в неограниченных областях с компактной границей // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313, № 6. С. 1341–1345.
4. *Galdi G. P., Simader Ch. G.* Existence, uniqueness and L^q-estimates for the Stokes problem in an exterior domain // Arch. Rational Mech. Anal. 1990. V. 112, N 4. P. 291–318.
5. *Масленникова В. Н., Боговский М. Е.* О плотности финитных соленоидальных векторных полей // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 5. С. 1092–1108.
6. *Де Рам Ж.* Дифференцируемые многообразия. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.
7. *Темам Р.* Уравнения Навье — Стокса. М.: Мир, 1981.
8. *Боговский М. Е.* Решение некоторых задач, связанных с операторами div и grad // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1986. С. 1–40. (Тр. семинара С. Л. Соболева).
9. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. Т. 1: Общая теория.
10. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947.
11. *Heywood J. G.* On uniqueness questions in the theory of viscous flow // Acta Math. 1976. V. 136, N 1. P. 61–102.
12. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1963. Т. 2.
13. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
14. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
15. *Масленникова В. Н., Боговский М. Е.* Аппроксимация потенциальных и соленоидальных векторных полей // Сиб. мат. журн. 1983. Т.24, № 5. С. 149–171.
16. *Масленникова В. Н., Боговский М. Е.* Аппроксимация соленоидальных и потенциальных векторных полей в пространствах Соболева и задачи математической физики // Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: Наука, 1986. С. 129–137.
17. *Боговский М. Е.* К L_p-теории системы Навье — Стокса для неограниченных областей с некомпактными границами: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1984.
18. *Буренков В. И.* Функциональные пространства. Пространства L_p. М.: Изд-во Ун-та Дружбы народов, 1987.
19. *Cattabriga L.* Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes // Rend. sem. Mat. Univ. Padova. 1961. N 31. P. 308–340.
20. *Соболев С. Л.* Плотность финитных функций в пространстве $L_p^{(m)}(E_n)$ // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 3. С. 673–682.

г. Москва *Статья поступила 5 апреля 1993 г.*