



Общероссийский математический портал

П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба, Приближения на классах интегралов Пуассона рациональными интегральными операторами Фурье — Чебышёва, *Сиб. матем. журн.*, 2021, том 62, номер 2, 362–386

DOI: 10.33048/smzh.2021.62.209

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.144.107.193

7 октября 2024 г., 08:15:24



ПРИБЛИЖЕНИЯ НА КЛАССАХ
ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА
РАЦИОНАЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ
ОПЕРАТОРАМИ ФУРЬЕ — ЧЕБЫШЁВА
П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба

Аннотация. Введен класс функций, задаваемых интегралами Пуассона на отрезке $[-1, 1]$. Изучены приближения рациональными интегральными операторами Фурье — Чебышёва на указанных классах. Установлены интегральные представления приближений и оценки сверху равномерных приближений. В случае, когда граничная функция имеет на отрезке $[-1, 1]$ степенную особенность, найдены оценки сверху поточечных и равномерных приближений, асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений посредством рациональных функций с фиксированным числом геометрически различных заданных полюсов. При двух геометрически различных полюсах четной кратности аппроксимирующей функции получены асимптотические оценки наилучших равномерных приближений рассматриваемым методом, которые имеют более высокую скорость сходимости в сравнении с полиномиальными аналогами.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.209

Ключевые слова: класс интегралов Пуассона, рациональные интегральные операторы, ряды Фурье, поточечные и равномерные приближения, асимптотические оценки, точные константы.

Введение. В теории приближений актуальна задача об исследовании асимптотического поведения величин

$$\mathfrak{E}_n = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f(x) - U_n(f, x)\|_C,$$

где U_n — некоторый известный метод приближений, ставящий в соответствие функции f , принадлежащей к заданному компактному классу \mathfrak{M} , некоторый элемент $U_n(f, x)$. Данная задача имеет богатую историю, связанную с именами выдающихся специалистов в теории функций. Изучение аппроксимационных свойств конкретных методов суммирования на различных классах функций было и остается одним из наиболее важных направлений в теории приближений и в теории рядов Фурье.

Задача отыскания точных верхних граней на классах функций, задаваемых интегралами Пуассона в полиномиальной аппроксимации, берет свое начало с

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований «Конвергенция 2020», № 20162269.

работы С. М. Никольского [1]. В 1946 г. им было показано, что для верхних граней отклонений частичных сумм Фурье, взятых по классам $C_{\beta, \infty}^q$ непрерывных 2π -периодических функций $f(\cdot)$, которые можно представить в виде свертки

$$f(x, q) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=1}^{+\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt, \quad (1)$$

$q \in (0, 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\|\varphi(\cdot)\|_C \leq 1$, имеет место асимптотическое равенство

$$\mathfrak{E}_n = \sup_{f \in C_{\beta, \infty}^q} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f, \cdot)\|_C = \frac{8q^n}{\pi^2} \mathbf{K}(q) + \varepsilon_n q^n, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\mathbf{K}(q)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В 1980 г. С. Б. Стечкин [2] уточнил остаточный член в этой формуле, показав, что

$$\mathfrak{E}_n = \sup_{f \in C_{\beta, \infty}^q} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f, \cdot)\|_C = \frac{8q^n}{\pi^2} \mathbf{K}(q) + O(1) \frac{q^{n+1}}{n(1-q)}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где величина $O(1)$ равномерно ограничена относительно n , q и β .

В 1979 г. В. Г. Доронин и А. А. Лигун [3] нашли точные значения одностороннего приближения в интегральной метрике на классах Γ_1^r функций $f(x) \in C$, допускающих представление в виде

$$f(x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(t-x) + r^2} dt,$$

где $\varphi(x) \in L_1$, $\|\varphi(x)\|_{L_1} \leq 1$, доказав справедливость асимптотического равенства

$$E_{n-1}^+(\Gamma_1^r)_1 = \sup_{f \in \Gamma_1^r} \inf_{g(x)=g(x), g \in T_{n-1}} \|f - g\|_{L_1} = \frac{2r^n}{1-r^n}.$$

На классах $C_{\beta}^q H_{\omega}$ непрерывных 2π -периодических функций $f(\cdot)$, которые можно представить в виде свертки (1), при этом $\varphi \in H_{\omega}$, $H_{\omega} = \{\varphi \in C : \omega(\varphi, t) \leq \omega(t)\}$, $\omega(\varphi, t)$ — модуль непрерывности функции $\varphi(t)$, $\omega(t)$ — некоторый заданный модуль непрерывности, аналогичная задача решена в 2001 г. А. И. Степанцом [4]. Для верхних граней уклонений частичных сумм рядов Фурье им получено асимптотическое равенство при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_n &= \sup_{f \in C_{\beta}^q H_{\omega}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f, \cdot)\|_C \\ &= \frac{4q^n}{\pi^2} \mathbf{K}(q) \theta_n(\omega) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t, dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n} \omega\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

где $\theta_n(\omega) \in [1/2, 1]$, причем $\theta_n(\omega) = 1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности.

Дальнейшее развитие данная проблематика нашла в работах математиков украинской математической школы (см., например, [5–8]). В этих и других работах установлены точные верхние грани уклонений различных методов суммирования полиномиальных рядов Фурье 2π -периодических функций на классах интегралов Пуассона $C_{\beta, \infty}^q$ и $C_{\beta}^q H_{\omega}$.

Между тем наряду с тригонометрическими интегралами Пуассона имеет смысл рассматривать класс функций, представимых алгебраическими интегралами Пуассона на отрезке $[-1, 1]$. Для каждой непрерывной на отрезке $[-1, 1]$ функции $\varphi(x)$ рассмотрим при $0 < r < 1$ ряд

$$f(x, r) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n c_n T_n(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (2)$$

где $T_n(x) = \cos n \arccos x$, $n = 0, 1, \dots$, — ортогональная с весом $(1 - x^2)^{-1/2}$ на отрезке $[-1, 1]$ система полиномов Чебышёва первого рода и

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad k = 0, 1, \dots,$$

— коэффициенты Фурье по этой системе.

Известно [9, 10], что для интегралов Пуассона (2) справедливо интегральное представление

$$f(x, r) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\cos \tau) [P_r(\tau - \theta) + P_r(\tau + \theta)] d\tau, \quad (3)$$

$$P_r(u) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos u + r^2}, \quad x = \cos \theta.$$

Множество всех функций, которые допускают представление в виде (3) при $\varphi \in \mathfrak{M}$, где \mathfrak{M} — некоторое подмножество из L_1 , обозначим, следуя [4], через $L_0^r \mathfrak{M}$.

Среди методов рациональной аппроксимации выделяется ряд операторов, являющихся аналогами известных полиномиальных периодических операторов Фурье, Фейера, Джексона, Валле Пуссена [11, 12]. В 1979 г. Е. А. Ровба [13] ввел рациональный оператор на основании системы рациональных функций Чебышёва — Маркова, который является обобщением полиномиального оператора Фурье — Чебышёва.

Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$, где a_k являются либо действительными и $|a_k| < 1$, либо попарно комплексно сопряженными. На множестве суммируемых на отрезке $[-1, 1]$ с весом $1/\sqrt{1-x^2}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор типа Фурье — Чебышёва порядка не выше n (см. [13]):

$$s_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v) \frac{\sin \lambda_n(v, u)}{\sin \frac{v-u}{2}} dv, \quad x = \cos u, \quad (4)$$

где

$$\lambda_n(v, u) = \int_u^v \lambda_n(y) dy, \quad \lambda_n(y) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1 - \alpha_k^2}{1 + 2\alpha_k \cos y + \alpha_k^2},$$

$$\alpha_k = \frac{a_k}{1 + \sqrt{1 - a_k^2}}, \quad |\alpha_k| < 1.$$

Оператор $s_n : f \rightarrow \mathbb{R}_n(A)$, где $\mathbb{R}_n(A)$ — множество рациональных функций вида $\frac{p_n(x)}{\prod_{k=1}^n (1 + a_k x)}$, A — множество наборов (a_1, \dots, a_n) , $p_n(x)$ — некоторый многочлен

степени не выше n , коэффициенты которого зависят от a_k , является точным на константах.

В частности, если положить $a_k = 0, k = 1, \dots, n$, то $s_n(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье по многочленам Чебышёва.

Представляет интерес исследовать приближения на отрезке $[-1, 1]$ интегралов Пуассона (3) рациональным интегральным оператором Фурье — Чебышёва (4) по двум направлениям. Во-первых, изучить приближения на классах интегралов Пуассона, когда граничная функция φ принадлежит некоторому функциональному пространству \mathfrak{M} , во-вторых изучить приближения некоторых индивидуальных функций, задаваемых интегралами Пуассона на отрезке $[-1, 1]$.

В данной работе рассматриваются оба вышеуказанных направления. В разд. 1 исследуются аппроксимации функций, представимых интегралом Пуассона (3), рациональным интегральным оператором Фурье — Чебышёва (4), когда в роли \mathfrak{M} выступают множества

$$S_{\infty}^0[-1, 1] = \left\{ \varphi(t) \in L_1 : \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0, \|\varphi(t)\|_{C[-1,1]} \leq 1 \right\}.$$

В работе получены интегральное представление приближений и оценка сверху равномерных приближений интегралов Пуассона на отрезке $[-1, 1]$ рациональными интегральными операторами Фурье — Чебышёва. В качестве следствия получены точные верхние грани уклонений частичных сумм полиномиальных рядов Фурье — Чебышёва на классах интегралов Пуассона в алгебраическом случае. В разд. 2 исследуются приближения индивидуальных функций, задаваемых интегралами Пуассона в случае, когда граничная функция имеет на отрезке $[-1, 1]$ степенную особенность. Получены оценки сверху поточечных и равномерных приближений, точные в случае четной кратности полюсов аппроксимирующей функции. Найдена асимптотическая оценка мажоранты равномерных приближений рациональными функциями с фиксированным числом геометрически различных заданных полюсов в расширенной комплексной плоскости. В случае двух геометрически различных полюсов найдены наилучшая мажоранта равномерных приближений и асимптотическая оценка наилучших равномерных приближений рассматриваемым методом, когда полюсы аппроксимирующей функции имеют четную кратность.

1. Приближения на классах интегралов Пуассона рациональным интегральным оператором типа Фурье — Чебышёва. Изучим приближения на классах функций, представимых интегралами Пуассона на отрезке $[-1, 1]$, посредством рациональных интегральных операторов (4). Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon_n(x, A) = f(x, r) - s_n(f(\cdot, r), x), \quad x \in [-1, 1], \quad (5)$$

$$\varepsilon_n(A) = \|f(x, r) - s_n(f(\cdot, r), x)\|_{C[-1,1]}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Теорема 1. Для приближений интегралов Пуассона (3) на отрезке $[-1, 1]$ с граничной функцией $\varphi \in S_{\infty}^0[-1, 1]$ рациональным интегральным оператором (4) имеют место

(1) интегральное представление

$$\varepsilon_n(x, A) = -\frac{r}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\varphi(\cos \tau)}{\sqrt{1 - 2r \cos(\tau - \theta) + r^2}} \times \cos \psi_n(\tau, x, r) \prod_{k=1}^n \sqrt{\frac{r^2 - 2\alpha_k r \cos \tau + \alpha_k^2}{1 - 2\alpha_k r \cos \tau + \alpha_k^2 r^2}} d\tau; \quad (7)$$

(2) равномерная оценка

$$\varepsilon_n(A) \leq \frac{r}{\pi} \max_{x \in [-1, 1]} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos(\tau - \theta) + r^2}} \prod_{k=1}^n \sqrt{\frac{r^2 - 2\alpha_k r \cos \tau + \alpha_k^2}{1 - 2\alpha_k r \cos \tau + \alpha_k^2 r^2}} d\tau,$$

где

$$\psi_n(\tau, x, r) = \arg \left[\frac{r\xi - z}{\xi} \prod_{k=1}^n \frac{rz - \alpha_k}{1 - \alpha_k r z} \cdot \frac{1 - \alpha_k \xi}{\xi - \alpha_k} \right],$$

$$z = e^{i\tau}, \quad \xi = e^{i\theta}, \quad x = \cos \theta, \quad 0 < r < 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из представления (3) нетрудно получить, что

$$f(x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\cos \tau) P_r(\tau - \theta) d\tau, \quad P_r(u) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos u + r^2}, \quad x = \cos \theta.$$

Легко видеть, что справедливо равенство

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \tau + r^2} d\tau.$$

Воспользовавшись точностью оператора $s_n(\cdot, x)$ на константах, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(x, A) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\cos \tau) P_r(\tau - \theta) d\tau \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\cos \tau) P_r(\tau - v) d\tau \right] \mathfrak{D}_n(v, \theta) dv \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\cos \tau) [P_r(\tau - \theta) - P_r(\tau - v)] d\tau \right) \mathfrak{D}_n(v, \theta) dv, \end{aligned}$$

где

$$\mathfrak{D}_n(v, \theta) = \left(\zeta \frac{\omega_n(\zeta)}{\omega_n(\xi)} - \xi \frac{\omega_n(\xi)}{\omega_n(\zeta)} \right) \frac{1}{\zeta - \xi},$$

$$\omega_n(u) = \prod_{k=1}^n \frac{u - \alpha_k}{1 - \alpha_k u}, \quad \zeta = e^{iv}, \quad \xi = e^{i\theta}, \quad |\alpha_k| < 1.$$

Применив теорему Фубини, в последнем интеграле поменяем порядок интегрирования. Имеем

$$\varepsilon_n(x, A) = \frac{2r(1-r^2)}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\varphi(\cos \tau)}{1-2r \cos(\tau-\theta) + r^2} I_n(x, \tau, A) d\tau, \quad (8)$$

где

$$I_n(x, \tau, A) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos(\tau-\theta) - \cos(\tau-v)}{1-2r \cos(\tau-v) + r^2} \mathfrak{D}_n(v, \theta) dv, \quad x = \cos \theta.$$

Займемся преобразованием последнего интеграла. Положим $z = e^{i\tau}, \xi = e^{i\theta}$ и выполним в интеграле замену переменного по формуле $\zeta = e^{iv}$. Учитывая, что

$$\frac{\cos(\tau-\theta) - \cos(\tau-v)}{1-2r \cos(\tau-v) + r^2} = \frac{(\zeta - \xi)(\xi\zeta - z^2)}{2\xi r(\zeta - rz)(\zeta - z/r)},$$

приходим к представлению

$$I_n(x, \tau, A) = \frac{1}{2\xi r i} [\overline{\omega_n(\xi)} I_1 - \xi \omega_n(\xi) I_2], \quad (9)$$

где

$$I_1 = \oint_{|\zeta|=1} \frac{\xi\zeta - z^2}{(\zeta - rz)(\zeta - z/r)} \omega_n(\zeta) d\zeta, \quad I_2 = \oint_{|\zeta|=1} \frac{\xi\zeta - z^2}{(\zeta - rz)(\zeta - z/r)} \frac{d\zeta}{\zeta \omega_n(\zeta)}.$$

Исследуем каждый из интегралов по отдельности. Так, подынтегральная функция первого интеграла имеет внутри единичной окружности единственную особую точку $\zeta = rz, r \in (0, 1)$, являющуюся для нее простым полюсом. Тогда, применяя теорему Коши о вычетах, находим

$$I_1 = 2\pi i \operatorname{Res}_{\zeta=rz} \frac{\xi\zeta - z^2}{(\zeta - rz)(\zeta - z/r)} \omega_n(\zeta) = -2\pi i r \frac{r\xi - z}{1-r^2} \prod_{k=1}^n \frac{rz - \alpha_k}{1 - \alpha_k r z}. \quad (10)$$

Рассмотрим интеграл I_2 . Его подынтегральная функция во внешности единичного круга имеет в конечной комплексной плоскости особую точку $\zeta = z/r$, являющуюся для нее простым полюсом, а на бесконечности имеет нуль не ниже второго порядка. Применяя интегральную теорему Коши к контуру $\Gamma = \{\zeta : |\zeta| = 1\}$, обходимому по часовой стрелке, находим

$$I_2 = -2\pi i \operatorname{Res}_{\zeta=z/r} \frac{\xi\zeta - z^2}{(\zeta - rz)(\zeta - z/r)} \frac{1}{\zeta \omega_n(\zeta)} = -2\pi i \frac{r}{z} \cdot \frac{\xi - rz}{1-r^2} \prod_{k=1}^n \frac{r - \alpha_k z}{z - \alpha_k r}. \quad (11)$$

Подставив (10), (11) в (9), получим

$$I_n(x, \tau, A) = -\frac{\pi}{1-r^2} \left[\frac{r\xi - z}{\xi} \overline{\omega_n(\xi)} \prod_{k=1}^n \frac{rz - \alpha_k}{1 - \alpha_k r z} + \frac{rz - \xi}{z} \omega_n(\xi) \prod_{k=1}^n \frac{r - \alpha_k z}{z - \alpha_k r} \right],$$

где $\xi = e^{i\theta}, x = \cos \theta, z = e^{i\tau}, 0 < r < 1$. С учетом последнего равенства в (8) будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(x, A) &= -\frac{r}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\varphi(\cos \tau)}{1-2r \cos(\tau-\theta) + r^2} \\ &\times \left[\frac{r\xi - z}{\xi} \overline{\omega_n(\xi)} \prod_{k=1}^n \frac{rz - \alpha_k}{1 - \alpha_k r z} + \frac{rz - \xi}{z} \omega_n(\xi) \prod_{k=1}^n \frac{r - \alpha_k z}{z - \alpha_k r} \right] d\tau, \quad x = \cos \theta. \quad (12) \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках последнего интеграла, представляет собой сумму взаимно комплексно сопряженных слагаемых. Выполнив необходимые преобразования, приходим к (7).

Для того чтобы доказать второе утверждение настоящей теоремы, достаточно заметить, что $\varphi(t) \in S_\infty^0[-1, 1]$, и воспользоваться оценкой $|\cos \psi_n(\tau, x, r)| \leq 1$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1 (полиномиальный случай). *Для приближений на классах интегралов Пуассона $L_0^r S_\infty^0[-1, 1]$ частичными суммами полиномиальных рядов Фурье — Чебышёва справедливо равенство*

$$\mathfrak{E}_n = \sup_{\varphi \in S_\infty^0[-1, 1]} \|f(\cdot, r) - s_n(f, \cdot)\|_{C[-1, 1]} = \frac{8r^{n+1}}{\pi^2} \mathbf{K}(r) + o(1)r^{n+1}, \quad (13)$$

$0 < r < 1$, $n \rightarrow \infty$, где $\mathbf{K}(r)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В представлении (7) положим $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда $\varepsilon_n(x, O) = \varepsilon_n^{(0)}(x)$, $\varepsilon_n(O) = \varepsilon_n^{(0)}$ соответственно поточечные (5) и равномерные (6) приближения интегралов Пуассона (3) частичными суммами полиномиальных рядов Фурье — Чебышёва. В этом случае

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^{(0)}(x) &= -\frac{r^{n+1}}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\varphi(\cos \tau)}{\sqrt{1 - 2r \cos(\tau - \theta) + r^2}} \cos \arg \left[\left(r - \frac{z}{\xi} \right) \left(\frac{z}{\xi} \right)^n \right] d\tau \\ &= -\frac{r^{n+1}}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\varphi(\cos \tau) [r \cos n(\tau - \theta) - \cos(n+1)(\tau - \theta)]}{1 - 2r \cos(\tau - \theta) + r^2} d\tau, \quad x = \cos \theta, \quad 0 < r < 1. \end{aligned}$$

Если $\varphi \in S_\infty^0[-1, 1]$, то из последнего соотношения следует, что

$$|\varepsilon_n^{(0)}(x)| \leq \frac{r^{n+1}}{\pi} I_n, \quad I_n = \int_0^{2\pi} \frac{|r \cos nt - \cos(n+1)t|}{1 - 2r \cos t + r^2} dt, \quad 0 < r < 1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (14)$$

Известно [1], что для интеграла I_n имеет место асимптотическое равенство

$$I_n = \frac{8}{\pi} \mathbf{K}(r) + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, в (14) приходим к оценке

$$\varepsilon_n^0 \leq \frac{8r^{n+1}}{\pi^2} \mathbf{K}(r) + o(1)r^{n+1}, \quad 0 < r < 1.$$

Данная оценка достижима на функции

$$\varphi_x(t) = \text{sign}(r \cos n(\tau - \theta) - \cos(n+1)(\tau - \theta)), \quad x = \cos \theta, \quad t = \cos \tau,$$

которая принадлежит классу $S_\infty^0[-1, 1]$ (см. [1]). Учитывая изложенное, приходим к (13).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Асимптотическое равенство (13) есть алгебраический аналог результата С. М. Никольского [1]. Значение данного результата в том, что он получен как следствие более общего рационального случая.

2. Приближения интегралов Пуассона с граничной функцией, имеющей степенную особенность. При решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге возникают случаи, когда граничная функция имеет вид $\varphi(\cos \theta) = M|\cos \theta|^s$, где M — некоторое число, $s > 0$. Такой случай будет рассматриваться далее.

Пусть параметры $\{\alpha_k\}_{k=1}^{2n}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= -\alpha_{n+k}, \quad \alpha_k \mapsto i\alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ \alpha_1 &= \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0, \quad p = \left[\frac{s}{2} \right], \quad n > p. \end{aligned} \tag{15}$$

Теорема 2. Если $\varphi(t) = M|t|^s$, $s > 0$, то для приближений интегралов Пуассона (7) на отрезке $[-1, 1]$ интегральным рациональным оператором (4) при выполнении условий (15) имеют место

(1) интегральное представление

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2n}(x, A) &= \frac{(-1)^n M}{2^{s-2} \pi r^s} \sin \frac{\pi s}{2} \\ &\times \int_0^r \frac{(r^2 - t^2)^s t^{1-s}}{\sqrt{1 + 2t^2 \cos 2\theta + t^4}} \cos \psi_n(x, t, A) \chi_{2n}(t) dt, \quad x = \cos \theta, \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\psi_n(x, t, A) = \arg \frac{\xi^2 \omega_{2n}(\xi)}{1 + t^2 \xi^2};$$

(2) оценка поточечных приближений:

$$|\varepsilon_{2n}(x, A)| \leq \frac{M}{2^{s-2} \pi r^s} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^r \frac{(r^2 - t^2)^s t^{1-s}}{\sqrt{1 + 2t^2 \cos 2\theta + t^4}} |\chi_{2n}(t)| dt, \quad x \in [-1, 1]; \tag{17}$$

(3) оценка равномерных приближений:

$$\varepsilon_{2n}(A) \leq \frac{M}{2^{s-2} \pi r^s} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^r \frac{(r^2 - t^2)^s t^{1-s}}{1 - t^2} |\chi_{2n}(t)| dt, \tag{18}$$

где

$$\omega_{2n}(\xi) = \prod_{k=1}^n \frac{\xi^2 + \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2 \xi^2}, \quad \chi_{2n}(u) = \prod_{k=1}^n \frac{u^2 - \alpha_k^2}{1 - \alpha_k^2 u^2}, \quad r \in (0, 1). \tag{19}$$

Неравенство (18) является точным в том смысле, что если функция $\chi_{2n}(t)$ имеет полюсы только четной кратности, то в (18) имеет место равенство. Неравенство (17) переходит в равенство при $x = 0$, а также на концах отрезка.

Доказательство. Очевидно, что без ограничения общности можно положить $M = 1$. При выполнении условий (15) естественно рассматривать приближения (12) в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2n}(x, A) &= -\frac{r}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{|\cos \tau|^s}{1 - 2r \cos(\tau - \theta) + r^2} \left[\frac{r\xi - z}{\xi} \overline{\omega_{2n}(\xi)} \omega_{2n}(rz) \right. \\ &\quad \left. + \frac{rz - \xi}{z} \omega_{2n}(\xi) \overline{\omega_{2n}(rz)} \right] d\tau, \quad \xi = e^{i\theta}, \quad z = e^{i\tau}, \quad x = \cos \theta. \end{aligned}$$

Разобьем интеграл в правой части на три интеграла по промежуткам $[-\pi, -\pi/2]$, $[-\pi/2, \pi/2]$, $[\pi/2, \pi]$. В первом из них выполним замену $\tau \mapsto \tau - \pi$, а в третьем — $\tau \mapsto \tau + \pi$. После необходимых преобразований придем к выражению

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{2n}(x, A) \\ &= -\frac{r}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^s \tau \left[\frac{\overline{\omega_{2n}(\xi)}}{\xi} \left(\frac{r\xi - z}{1 - 2r \cos(\tau - \theta) + r^2} + \frac{r\xi + z}{1 - 2r \cos(\tau + \theta) + r^2} \right) \omega_{2n}(rz) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\omega_{2n}(\xi)}{z} \left(\frac{rz - \xi}{1 - 2r \cos(\tau - \theta) + r^2} + \frac{rz + \xi}{1 - 2r \cos(\tau + \theta) + r^2} \right) \overline{\omega_{2n}(rz)} \right] d\tau. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$1 - 2r \cos(\tau - \theta) + r^2 = \frac{-(z - r\xi)(rz - \xi)}{\xi z}, \quad 1 - 2r \cos(\tau + \theta) + r^2 = \frac{(z + r\xi)(rz + \xi)}{\xi z},$$

из последнего равенства получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2n}(x, A) &= -\frac{r^2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^s \tau \left[\frac{z^2 \overline{\omega_{2n}(\xi)}}{r^2 z^2 - \xi^2} \prod_{k=1}^n \frac{r^2 z^2 + \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2 r^2 z^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\xi^2 \omega_{2n}(\xi)}{r^2 \xi^2 - z^2} \prod_{k=1}^n \frac{r^2 + \alpha_k^2 z^2}{z^2 + \alpha_k^2 r^2} \right] d\tau, \end{aligned}$$

где $\xi = e^{i\theta}$, $z = e^{i\tau}$, $x = \cos \theta$.

Для исследования интеграла справа воспользуемся методом, предложенным в [14]. Будем полагать, что $x \in (0, 1)$ и $\theta = \arccos x \in (0, \pi/2)$. В последнем интеграле выполним замену переменного по формуле $z = e^{i\tau}$, положив при этом $\xi = e^{i\theta}$. Тогда

$$\varepsilon_{2n}(x, A) = -\frac{r^2}{\pi i} [\overline{\omega_{2n}(\xi)} I_1 + \xi^2 \omega_{2n}(\xi) I_2], \quad \xi = e^{i\theta}, \quad x = \cos \theta, \quad s > 0, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2^s} \int_C \frac{(z^2 + 1)^s}{z^{s-1}(r^2 z^2 - \xi^2)} \prod_{k=1}^n \frac{r^2 z^2 + \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2 r^2 z^2} dz, \\ I_2 &= \frac{1}{2^s} \int_C \frac{(z^2 + 1)^s}{z^{s+1}(r^2 \xi^2 - z^2)} \prod_{k=1}^n \frac{r^2 + \alpha_k^2 z^2}{z^2 + \alpha_k^2 r^2} dz, \end{aligned}$$

$C = \{z : z = e^{i\tau}, -\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}\}$. Другими словами, C — правая полуокружность единичной окружности. Отметим, что подынтегральные функции интегралов I_1 и I_2 имеют точки ветвления при $z = 0$, $z = \infty$, а также $z = \pm i$.

Исследуем каждый из интегралов по отдельности. Рассмотрим область, ограниченную контуром, состоящим из C , полуокружности $C_\delta = \{z : z = \delta e^{i\tau}, -\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}\}$ достаточно малого радиуса δ , которая огибает точку $z = 0$ по часовой стрелке, дуг окружностей

$$C_{\delta_1} = \left\{ z : z - i = \delta_1 e^{i\tau}, -\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \tau_1 \right\}, \quad C_{\delta_2} = \left\{ z : z + i = \delta_2 e^{i\tau}, \tau_2 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

огибающих соответственно точки $z = i$ и $z = -i$ по часовой стрелке, и отрезка мнимой оси от точки i до $-i$ с изъятым диаметром полуокружности C_δ и соответствующими отрезками радиусов окружностей $|z - i| = \delta_1$ и $|z + i| = \delta_2$. Очевидно, что $\tau_k > 0$, $k = 1, 2$, и $\tau_k \rightarrow 0$ при $\delta_k \rightarrow 0$, $k = 1, 2$.

Рассмотрим подынтегральную функцию первого интеграла:

$$\varphi_1(z, \xi) = \frac{g(z, s)z}{r^2 z^2 - \xi^2} \prod_{k=1}^n \frac{r^2 z^2 + \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2 r^2 z^2}, \quad g(z, s) = \frac{1}{2^s} \left(z + \frac{1}{z} \right)^s.$$

Функция $g(z, s)$ в указанной выше области распадается на регулярные ветви, определяемые условием $g(1, s) = e^{2\pi k s i}$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $g_0(z, s)$ — ветвь, для которой выполняется условие $g_0(1, s) = 1$. Тогда в данной области функция

$$\varphi_1(z, \xi) = \frac{g_0(z, s)z}{r^2 z^2 - \xi^2} \prod_{k=1}^n \frac{r^2 z^2 + \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2 r^2 z^2}$$

регулярна. Применяя интегральную теорему Коши, найдем

$$I_1 + \left(\int_{C_{\delta_1}} + \int_{i-\delta_1}^{i\delta} + \int_{C_\delta} + \int_{-i\delta}^{-i+\delta_2} + \int_{C_{\delta_2}} \right) \varphi_1(z, \xi) dz = 0, \quad (21)$$

где третий и пятый интегралы берутся по соответствующим отрезкам мнимой оси. Исследуем интеграл по полуокружности C_δ . Положив $z = \delta e^{i\tau}$, получим

$$\int_{C_\delta} \varphi_1(z, \xi) dz = \frac{i\delta^{2-s}}{2^s} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{(\delta^2 e^{2i\tau} + 1)^s e^{i\tau(2-s)}}{r^2 \delta^2 e^{2i\tau} - \xi^2} \prod_{k=1}^n \frac{r^2 \delta^2 e^{2i\tau} + \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2 r^2 \delta^2 e^{2i\tau}} d\tau.$$

Отсюда приходим к асимптотическому равенству

$$\int_{C_\delta} \varphi_1(z, \xi) dz \sim (-1)^p 2^{1-s} i \sin \frac{\pi s}{2} \frac{r^{2p} \delta^{2-s+2p}}{\xi^2 (2-s+2p)} \prod_{k=p+1}^n \alpha_k^2, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Так как $2 - s + 2p > 0$ (см. (15)), значение интеграла по полуокружности C_δ при стягивании контура C_δ в точку стремится к нулю. Проведя аналогичные действия с интегралами по дугам C_{δ_1} и C_{δ_2} , приходим к асимптотическим равенствам:

$$\int_{C_{\delta_1}} \varphi_1(z, \xi) dz \sim (-1)^{n+1} \frac{\delta^{s+1} (1 - e^{-i\frac{\pi(s+1)}{2}})}{(r^2 + \xi^2)(s+1)i} \prod_{k=1}^n \frac{r^2 - \alpha_k^2}{1 - r^2 \alpha_k^2}, \quad \delta_1 \rightarrow 0,$$

$$\int_{C_{\delta_2}} \varphi_1(z, \xi) dz \sim (-1)^{n+1} \frac{\delta^{s+1} (1 - e^{i\frac{\pi(s+1)}{2}})}{(r^2 + \xi^2)(s+1)i} \prod_{k=1}^n \frac{r^2 - \alpha_k^2}{1 - r^2 \alpha_k^2}, \quad \delta_2 \rightarrow 0.$$

Из них следует, что при стягивании дуг C_{δ_1} и C_{δ_2} в точку значения соответствующих интегралов стремятся к нулю. Отсюда при $\delta, \delta_1, \delta_2 \rightarrow 0$ выражение (21) примет вид

$$I_1 = \frac{1}{2^s} \left(\int_{-i}^0 + \int_0^i \right) \varphi_1(z, \xi) dz.$$

В интегралах справа положим $z = it$. Тогда

$$I_1 = \frac{(-1)^n}{2^s i^s} \left(\int_{-1}^0 + \int_0^1 \right) \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{r^2 t^2 + \xi^2} \chi_{2n}(rt) dt,$$

где $\chi_{2n}(t)$ определена в (19). Выполнив в первом интеграле справа замену $t \mapsto -t$, после несложных преобразований получим

$$I_1 = \frac{(-1)^{n+1} i}{2^{s-1}} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{r^2 t^2 + \xi^2} \chi_{2n}(rt) dt, \quad \xi = e^{i\theta}, \quad x = \cos \theta. \quad (22)$$

Займемся интегралом I_2 . Рассмотрим область, ограниченную контуром, состоящим из C , полуокружности $C_R = \{z : z = Re^{i\tau}, -\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}\}$ достаточно большого радиуса R , которая огибает точку $z = \infty$ против часовой стрелки, дуг окружностей

$$C_{\delta_1} = \{z : z - i = \delta_1 e^{i\tau}, \tau_1 \leq \tau \leq \pi/2\}, \quad C_{\delta_2} = \{z : z + i = \delta_2 e^{i\tau}, -\pi/2 \leq \tau \leq \tau_2\},$$

огибающих соответственно точки $z = i$ и $z = -i$ по часовой стрелке, и отрезков мнимой оси $[i(1 + \delta_1), +iR]$ и $[-iR, -i(1 + \delta_2)]$. Очевидно, что $\tau_k > 0$, $k = 1, 2$, и $\tau_k \rightarrow 0$ при $\delta_k \rightarrow 0$, $k = 1, 2$.

Рассмотрим подынтегральную функцию интеграла I_2 :

$$\varphi_2(z, \xi) = \frac{g(z, s)}{z(r^2 \xi^2 - z^2)} \prod_{k=1}^n \frac{r^2 + \alpha_k^2 z^2}{z^2 + \alpha_k^2 r^2}, \quad g(z, s) = \frac{1}{2^s} \left(z + \frac{1}{z} \right)^s.$$

Функция $g(z, s)$ в указанной выше области распадается на регулярные ветви, определяемые условием $g(1, s) = e^{2\pi k s i}$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $g_0(z, s)$ — ветвь, для которой $g_0(1, s) = 1$. Тогда в данной области функция

$$\varphi_2(z, \xi) = \frac{g_0(z, s) z}{z(r^2 \xi^2 - z^2)} \prod_{k=1}^n \frac{r^2 + \alpha_k^2 z^2}{z^2 + \alpha_k^2 r^2}$$

регулярна. Используя теорему Коши о вычетах, находим, что

$$\left(\int_{iR}^{i(1+\delta_1)} + \int_{C_{\delta_1}} + \int_{C_{\delta_2}} + \int_{-i(1+\delta_2)}^{-iR} + \int_{C_R} \right) \varphi_2(z, \xi) dz - I_2 = 0. \quad (23)$$

Рассуждая, как в случае с интегралом I_1 , заключаем, что интегралы по дугам C_{δ_1} и C_{δ_2} при $\delta_k \rightarrow 0$, $k = 1, 2$, стремятся к нулю. Исследуем интеграл по дуге C_R . Положим $z = Re^{i\tau}$. Тогда

$$\int_{C_R} \varphi_2(z, \xi) dz = \frac{i}{2^s R^s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R^2 e^{2i\tau} + 1)^s}{e^{i\tau s} (r^2 \xi^2 - R^2 e^{2i\tau})} \prod_{k=1}^n \frac{r^2 + \alpha_k^2 R^2 e^{2i\tau}}{R^2 e^{2i\tau} + \alpha_k^2 r^2} d\tau.$$

Отсюда приходим к асимптотическому равенству

$$\int_{C_R} \varphi_2(z, \xi) dz \sim (-1)^{p+1} 2^{1-s} i \sin \frac{\pi s}{2} \frac{r^{2p}}{\xi^2 (2-s+2p) R^{2-s+2p}} \prod_{k=p+1}^n \alpha_k^2, \quad R \rightarrow \infty.$$

Так как $2 - s + 2p > 0$ (см. (15)), значение интеграла по полуокружности C_R при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Из этого следует, что при $\delta_k \rightarrow 0$, $k = 1, 2$, и $R \rightarrow \infty$ в (23) получим

$$\int_{+i\infty}^i \varphi_2(z, \xi) dz + \int_{-i}^{-i\infty} \varphi_2(z, \xi) dz - I_2 = 0,$$

где первый и третий интегралы взяты вдоль соответствующих лучей мнимой оси. В интегралах выполним замену $z \mapsto z^{-1}$. Тогда

$$I_2 = \frac{1}{2^s} \left(\int_{-i}^0 + \int_0^i \right) \frac{(z^2 + 1)^s z^{1-s}}{r^2 \xi^2 z^2 - 1} \prod_{k=1}^n \frac{r^2 z^2 + \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2 r^2 z^2} dz.$$

Выполнив в первом интеграле еще одну замену $z \mapsto -z$, получим

$$I_2 = \frac{1 + (-1)^{1-s}}{2^s} \int_0^i \frac{(z^2 + 1)^s z^{1-s}}{r^2 \xi^2 z^2 - 1} \prod_{k=1}^n \frac{r^2 z^2 + \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2 r^2 z^2} dz.$$

Положив $z = it$, найдем

$$I_2 = \frac{(-1)^{n+1} i}{2^{1-s}} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1 + r^2 t^2 \xi^2} \chi_{2n}(rt) dt, \quad \xi = e^{i\theta}, \quad x = \cos \theta. \quad (24)$$

Подставляя (22) и (24) в (20), будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2n}(x, A) = (-1)^n \frac{r^2}{2^{s-1}\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 (1-t^2)^s t^{1-s} \\ \times \left[\frac{\overline{\omega_{2n}(\xi)}}{r^2 t^2 + \xi^2} + \frac{\xi^2 \omega_{2n}(\xi)}{1 + r^2 t^2 \xi^2} \right] \chi_{2n}(rt) dt. \end{aligned}$$

Заметим, что слагаемые, стоящие в квадратных скобках в подынтегральном выражении, взаимно комплексно сопряжены, а значит, их сумма является действительной функцией. Поскольку

$$\frac{\xi^2 \omega_{2n}(\xi)}{1 + r^2 t^2 \xi^2} = \frac{\exp[i\psi_n^*(x, t, A)]}{\sqrt{1 + 2r^2 t^2 \cos 2\theta + r^4 t^4}}, \quad \psi_n^*(x, t, A) = \arg \frac{\xi^2 \omega_{2n}(\xi)}{1 + r^2 t^2 \xi^2}, \quad \xi = e^{i\theta},$$

то

$$\varepsilon_{2n}(x, A) = (-1)^n \frac{r^2}{2^{s-2}\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s} \cos \psi_n^*(x, t, A)}{\sqrt{1 + 2r^2 t^2 \cos 2\theta + r^4 t^4}} \chi_{2n}(rt) dt, \quad x = \cos \theta.$$

Выполняя в последнем интеграле замену $rt \mapsto t$ и возвращаясь к константе M , получим (16).

Для исследования выражения (16) мы полагали, что $x \in (0, 1)$. Однако из свойств четности функции $|x|^s$, $s > 0$, и интегрального рационального оператора (4) следует, что представление (16) справедливо также и при $x \in (-1, 0)$. Его справедливость в точках $x = 0$ и $x = \pm 1$ следует из непрерывности левой и

правой частью относительно переменной x на $[-1, 1]$, что доказывает утверждение (1).

Чтобы доказать утверждение (2), достаточно в (16) воспользоваться неравенством $|\cos \psi_n(x, t, A)| \leq 1$.

Заметив, что

$$\sqrt{1 + 2t^2 \cos 2\theta + t^4} \geq 1 - t^2, \quad t \in [0, 1],$$

из (17) получим (18).

Если функция $\chi_{2n}(t)$ неотрицательна на отрезке $[0, 1]$, то легко видеть, что

$$\varepsilon_{2n}(A) = |\varepsilon_{2n}(0, A)| = \frac{M}{2^{s-2}\pi r^s} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^r \frac{(r^2 - t^2)^s t^{1-s}}{1 - t^2} \chi_{2n}(t) dt,$$

$r \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Аналогичный результат имеет место в этом случае в точках $x = \pm 1$. Теорема 2 доказана.

Обратим внимание на то, что при $\alpha_k = 0$, $k = 1, \dots, n$, величины $\varepsilon_{2n}(x, O) = \varepsilon_{2n}(x)$, $\varepsilon_{2n}(O) = \varepsilon_{2n}^{(0)}$ соответственно поточечные и равномерные приближения интегралов Пуассона частичными суммами ряда Фурье по системе полиномов Чебышёва первого рода. Отсюда получим

Следствие 2 (полиномиальный случай). *В условиях теоремы 2 для приближений интегралов Пуассона частичными суммами полиномиального ряда Фурье — Чебышёва справедливы соотношения*

$$|\varepsilon_{2n}(x)| \leq \frac{M}{2^{s-2}\pi r^s} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^r \frac{(r^2 - t^2)^s t^{2n+1-s}}{\sqrt{1 + 2t^2 \cos 2\theta + t^4}} dt, \quad x \in [-1, 1];$$

$$\varepsilon_{2n}^{(0)} = \frac{M}{2^{s-2}\pi r^s} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^r \frac{(r^2 - t^2)^s t^{2n+1-s}}{1 - t^2} dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Как известно [15], интеграл Пуассона является решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа. При этом на границе области $f(x, 1) = \varphi(x)$ для любой кусочно непрерывной граничной функции $\varphi(x)$, $x \in [-1, 1]$. Тогда из теоремы 2 получим

Следствие 3 (приближения функций со степенной особенностью). *Для приближений функции $|x|^s$ на отрезке $[-1, 1]$ рациональным интегральным оператором (4) имеют место*

(1) *интегральное представление*

$$\varepsilon_{2n}(x, A) = \frac{(-1)^n}{2^{s-2}\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 \frac{(1 - t^2)^s t^{1-s}}{\sqrt{1 + 2t^2 \cos 2\theta + t^4}} \cos \psi_n(x, t, A) \chi_{2n}(t) dt, \quad x = \cos \theta; \quad (25)$$

(2) *оценка поточечных приближений:*

$$|\varepsilon_{2n}(x, A)| \leq \frac{1}{2^{s-2}\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^1 \frac{(1 - t^2)^s t^{1-s}}{\sqrt{1 + 2t^2 \cos 2\theta + t^4}} |\chi_{2n}(t)| dt, \quad x \in [-1, 1]; \quad (26)$$

(3) оценка равномерных приближений:

$$\varepsilon_{2n}(A) \leq \frac{1}{2^{s-2}\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^1 \left(\frac{1-t^2}{t} \right)^{s-1} |\chi_{2n}(t)| dt, \quad s > 0, n \in \mathbb{N}, \quad (27)$$

где $\omega_{2n}(\xi), \chi_{2n}(u)$ из (19), $\psi_n(x, t, A)$ из (16).

Неравенство (27) точное в том смысле, что если функция $\chi_{2n}(t)$ имеет полюсы только четной кратности, то в (27) имеет место равенство. При тех же условиях на полюсы неравенство (26) переходит в равенство при $x = 0$, а также на концах отрезка.

Исследование приближений функции $|x|^s$ на отрезке $[-1, 1]$ рациональными интегральными операторами типа Фурье, т. е. выражений (25)–(27), представляет, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Соотношения (25)–(27) получены нами в [16] при изучении приближений функции $|x|^s, s \in (0, 2)$, частичными суммами ряда Фурье по системе рациональных функций Чебышёва – Маркова в случае двух геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции.

3. Асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений интегралов Пуассона в случае фиксированного числа полюсов. Выше найдены оценки поточечных и равномерных приближений функций, задаваемых интегралами Пуассона с граничной функцией, имеющей степенную особенность, рациональным интегральным оператором (4). Найдем асимптотическое выражение интеграла, стоящего в правой части (18) при $n \rightarrow \infty$ при специальном выборе полюсов аппроксимирующей рациональной функции. Для решения поставленной задачи в вышеуказанном интеграле выполним замену переменного по формуле $t^2 = (1-u)/(1+u), dt = -du/((1-u)^{1/2}(1+u)^{3/2})$. Тогда

$$\varepsilon_{2n}^*(A) = \frac{2M}{\pi(1-R^2)^{\frac{s}{2}}} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_R^1 \frac{(u-R)^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)u} \left| \prod_{k=1}^n \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \right| du, \quad s > 0, n \in \mathbb{N},$$

где $R = (1-r^2)/(1+r^2), R \in (0, 1), \beta_k = (1-\alpha_k^2)/(1+\alpha_k^2), k = 1, \dots, n$.

Пусть $n > p, p = [s/2], n_1 = n - p$ и q – произвольное натуральное число, $0 < q < n_1, A_q$ – множество наборов параметров $(0, \dots, 0, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+m_q}) \in A$ таких, что среди чисел $\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+m_q}$ ровно q различных и кратность каждого параметра равна $m, m = [n_1/q]$. Таким образом, будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями с полюсом на бесконечности порядка $2p$ и $2q$ геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости кратности m каждый. В этом случае

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2n}^*(A_q) &= \frac{2M}{\pi(1-R^2)^{\frac{s}{2}}} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \\ &\times \int_R^1 \frac{(u-R)^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)u} \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^p \left| \prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \right|^m du, \quad n > p. \quad (28) \end{aligned}$$

Положим, что параметры $\beta_k, k = 1, \dots, q$, упорядочены следующим образом:

$$R < \beta_q < \beta_{q-1} < \dots < \beta_1 \leq 1.$$

Теорема 3. В условиях теоремы 2 для любых натуральных n и q , $0 < q < n_1$, $m = [n_1/q]$, при $m \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2n}^*(A_q) \sim \frac{2M}{\pi(1-R^2)^{\frac{s}{2}}} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| & \left[\frac{\Gamma(s+1) \left(\frac{1-R}{1+R}\right)^p \left(\prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - R}{\beta_k + R} \right)^m}{(1-R^2)^{\frac{s}{2}} (1+R) R \left(2m \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{\beta_k^2 - R^2} \right)^{s+1}} \right. \\ & + \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{(b_j - R)^s}{(1-b_j^2)^{\frac{s}{2}} (1+b_j) b_j^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1-b_j}{1+b_j} \right)^p \\ & \times \left(\prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} \prod_{k=j+1}^q \frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k} \right)^m \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^j \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{\beta_k}{(b_j^2 - \beta_k^2)^2}}} \\ & \left. + \frac{(1-R)^s \Gamma\left(1+p - \frac{s}{2}\right)}{2^{2p+2} \left(m \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{1-\beta_k^2}\right)^{1+p-\frac{s}{2}}} \left(\prod_{k=1}^q \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k} \right)^m \right], \quad (29) \end{aligned}$$

если $r \in (0, 1)$, и

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2n}^*(A_q) \sim \frac{2M}{\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| & \left[\frac{\Gamma(s)}{\left(2m \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^s} \right. \\ & + \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{b_j^{s-\frac{3}{2}} \left(\frac{1-b_j}{1+b_j}\right)^p \left(\prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} \prod_{k=j+1}^q \frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k} \right)^m}{(1-b_j^2)^{\frac{s}{2}} (1+b_j) \sqrt{\sum_{k=1}^j \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{\beta_k}{(b_j^2 - \beta_k^2)^2}}} \\ & \left. + \frac{\Gamma\left(1+p - \frac{s}{2}\right)}{2^{2p+2} \left(m \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{1-\beta_k^2}\right)^{1+p-\frac{s}{2}}} \left(\prod_{k=1}^q \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k} \right)^m \right], \quad (30) \end{aligned}$$

если $r = 1$, где $b_j \in (\beta_{j+1}, \beta_j)$, $j = 1, \dots, q-1$, — единственный корень уравнения

$$-\sum_{k=1}^j \frac{\beta_k}{\beta_k^2 - u^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{\beta_k}{u^2 - \beta_k^2} = 0,$$

$R \in (0, 1)$, $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения

$$I_1(A_q, n) = \int_R^{\beta_q} \frac{(u-R)^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}} (1+u)u} \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^p \left(\prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \right)^m du,$$

$$I_2(A_q, n) = \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{(u-R)^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}} (1+u)u} \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^p \left(\prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right)^m du,$$

$$I_3(A_q, n) = \int_{\beta_1}^1 \frac{(u - R)^s}{(1 - u^2)^{\frac{s}{2}}(1 + u)u} \left(\frac{1 - u}{1 + u}\right)^p \left(\prod_{k=1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}\right)^m du.$$

Тогда

$$\varepsilon_{2n}^*(A) = \frac{2M}{\pi(1 - R^2)^{\frac{s}{2}}} \sin \frac{\pi s}{2} [I_1(A_q, n) + I_2(A_q, n) + I_3(A_q, n)]. \quad (31)$$

Исследуем каждый из интегралов $I_1(A_q, n), I_2(A_q, n), I_3(A_q, n)$ по отдельности. Изучим их асимптотическое поведение при $n \rightarrow \infty$. Дальнейшему доказательству теоремы 3 предположим три леммы.

Лемма 1. *Справедливы асимптотические равенства*

$$I_1(A_q, n) \sim \begin{cases} \frac{\Gamma(s+1) \left(\frac{1-R}{1+R}\right)^p \left(\prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - R}{\beta_k + R}\right)^m}{(1-R^2)^{\frac{s}{2}}(1+R)R \left(2m \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{\beta_k^2 - R^2}\right)^{s+1}}, & r \in (0, 1), \\ \frac{\Gamma(s)}{\left(2m \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right)^s}, & r = 1, m \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (32)$$

где $\Gamma(s + 1)$ — гамма-функция Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для исследования асимптотики интеграла $I_1(A_q, n)$ воспользуемся методом Лапласа [17, 18]. Приведем последний интеграл к виду, при котором реализуется указанный метод. Имеем

$$I_1(A_q, n) = \int_R^{\beta_q} \frac{(u - R)^s}{(1 - u^2)^{\frac{s}{2}}(1 + u)u} \left(\frac{1 - u}{1 + u}\right)^p e^{mS(u)} du, \quad S(u) = \sum_{k=1}^q \ln \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}.$$

Функция $S(u)$ убывает на промежутке $[R, \beta_q]$, поскольку $S'(u) < 0$, и, следовательно, достигает максимума при $u = R$. Отсюда заключаем, что при $m \rightarrow \infty$ значение исходного интеграла приближенно равно значению интеграла по малому отрезку $[R, R + \varepsilon]$. Используя асимптотические равенства

$$S(u) = \sum_{k=1}^q \ln \frac{\beta_k - R}{\beta_k + R} - 2 \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{\beta_k^2 - R^2} (u - R) + o((u - R)),$$

$$\frac{(u - R)^s}{(1 - u^2)^{\frac{s}{2}}(1 + u)u} \left(\frac{1 - R}{1 + R}\right)^p = \frac{(u - R)^s}{(1 - R^2)^{\frac{s}{2}}(1 + R)R} \left(\frac{1 - R}{1 + R}\right)^p + o((u - R)^s),$$

справедливые при $u \rightarrow R$, для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и $m \rightarrow \infty$, находим

$$I_1(A_q, n) \sim \frac{1}{(1 - R^2)^{\frac{s}{2}}(1 + R)R} \left(\frac{1 - R}{1 + R}\right)^p \left(\prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - R}{\beta_k + R}\right)^m \times \int_R^{R+\varepsilon} (u - R)^s \exp \left[-2m \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{\beta_k^2 - R^2} (u - R) \right] du, \quad m \rightarrow \infty.$$

После соответствующей замены переменных в интеграле справа последнее асимптотическое равенство примет вид

$$I_1(A_q, n) \sim \frac{\left(\frac{1-R}{1+R}\right)^p \left(\prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - R}{\beta_k + R}\right)^m}{(1 - R^2)^{\frac{s}{2}}(1 + R)R \left(2m \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{\beta_k^2 - R^2}\right)^{s+1}} \int_0^{\varphi(m, \varepsilon)} t^s e^{-t} dt, \quad m \rightarrow \infty,$$

где $\varphi(m, \varepsilon) = 2m\varepsilon \sum_{k=1}^q \beta_k / (\beta_k^2 - R^2) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Учитывая, что

$$\int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = \Gamma(s), \quad s > 0,$$

приходим к первому асимптотическому равенству в (32). Рассуждая совершенно аналогично при $R = 0$, получим второе равенство. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Справедливы асимптотические равенства*

$$I_2(A_q, n) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{(b_j - R)^s}{(1 - b_j^2)^{\frac{s}{2}} (1 + b_j) b_j} \left(\frac{1 - b_j}{1 + b_j} \right)^p \left(\prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} \prod_{k=j+1}^q \frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k} \right)^m \times \frac{1}{\sqrt{b_j \left(\sum_{k=1}^j \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{\beta_k}{(b_j^2 - \beta_k^2)^2} \right)}}, \quad r \in (0, 1], \quad m \rightarrow \infty, \quad (33)$$

где b_j , $j = 1, \dots, q-1$, определены в формулировке теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем

$$I_2(A_q, n) = \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} f(u) e^{mS(u)} du,$$

где

$$f(u) = \frac{(u - R)^s}{(1 - u^2)^{\frac{s}{2}} (1 + u) u} \left(\frac{1 - u}{1 + u} \right)^p, \quad S(u) = \sum_{k=1}^j \ln \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} + \sum_{k=j+1}^q \ln \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}.$$

Поскольку

$$S'(u) = \sum_{k=1}^j \frac{-2\beta_k}{\beta_k^2 - u^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{2\beta_k}{u^2 - \beta_k^2},$$

$$S''(u) = \sum_{k=1}^j \frac{-4\beta_k u}{(\beta_k^2 - u^2)^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{-4\beta_k u}{(u^2 - \beta_k^2)^2} < 0,$$

причем $S'(\beta_{j+1}) = +\infty$, $S'(\beta_j) = -\infty$, заключаем, что существует внутренняя точка $b_j \in (\beta_{j+1}, \beta_j)$, в которой функция $S(u)$ достигает на данном интервале максимума. При этом $S'(b_j) = 0$. Используя асимптотические разложения

$$S(u) \sim \sum_{k=1}^j \ln \frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} + \sum_{k=j+1}^q \ln \frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k} - 2b_j \times \left[\sum_{k=1}^j \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{\beta_k}{(b_j^2 - \beta_k^2)^2} \right] (u - b_j)^2,$$

$$f(u) \sim \frac{(b_j - R)^s}{(1 - b_j^2)^{\frac{s}{2}} (1 + b_j) b_j} \left(\frac{1 - b_j}{1 + b_j} \right)^p,$$

справедливые при $u \rightarrow b_j$, для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и $m \rightarrow \infty$ находим, что

$$I_2(A_q, n) \sim \sum_{j=1}^{q-1} \frac{(b_j - R)^s}{(1 - b_j^2)^{\frac{s}{2}}(1 + b_j)b_j} \left(\frac{1 - b_j}{1 + b_j}\right)^p \left(\prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} \prod_{k=j+1}^q \frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k}\right)^m \times \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left[-2b_j m \left(\sum_{k=1}^j \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{\beta_k}{(b_j^2 - \beta_k^2)^2}\right) u^2\right] du.$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

из последнего асимптотического равенства при $m \rightarrow \infty$ приходим к (33). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$I_3(A_q, n) \sim \frac{(1 - R)^s}{2^{2p+2} \left(m \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{1 - \beta_k^2}\right)^{1+p-\frac{s}{2}}} \Gamma\left(1 + p - \frac{s}{2}\right) \left(\prod_{k=1}^q \frac{1 - \beta_k}{1 + \beta_k}\right)^m, \quad m \rightarrow \infty, \tag{34}$$

где $r \in (0, 1]$, $p = [s/2]$, $s > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В интеграле $I_3(A_q, n)$ выполним замену переменного по формуле $u = \cos \theta$. Имеем

$$I_3(A_q, n) = \int_0^{\arccos \beta_1} f(\theta) e^{mS(\theta)} d\theta,$$

где

$$f(\theta) = \frac{(\cos \theta - R)^s \sin^{1-s} \theta}{(1 + \cos \theta) \cos \theta} \left(\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}\right)^p, \quad S(\theta) = \sum_{k=1}^q \ln \frac{\cos \theta - \beta_k}{\cos \theta + \beta_k}.$$

Функция $S(\theta)$ убывает при $\theta \in (0, \arccos \beta_1)$, поскольку $S'(\theta) < 0$, следовательно, достигает своего максимального значения при $\theta = 0$. Учитывая разложения

$$S(\theta) = \sum_{k=1}^q \ln \frac{1 - \beta_k}{1 + \beta_k} - \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{1 - \beta_k^2} \theta^2 + o(\theta^2), \quad f(\theta) = \frac{(1 - R)^s}{2^{2p+1}} \theta^{1+2p-s} + o(\theta^{1+2p-s}),$$

справедливые при $\theta \rightarrow 0$, находим, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и $m \rightarrow \infty$

$$I_3(A_q, n) \sim \frac{(1 - R)^s}{2^{2p+1}} \left(\prod_{k=1}^q \frac{1 - \beta_k}{1 + \beta_k}\right)^m \int_0^{\varepsilon} \theta^{1+2p-s} \exp\left[-m \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{1 - \beta_k^2} \theta^2\right] d\theta.$$

Выполнив в интеграле справа замену переменного по формуле

$$m \sum_{k=1}^q \beta_k / (1 - \beta_k^2) \theta^2 \mapsto \theta^2,$$

приходим к асимптотическому равенству

$$I_3(A_q, n) \sim \frac{(1-R)^s}{2^{2p+1} \left(m \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{1-\beta_k^2} \right)^{1+p-\frac{s}{2}}} \times \left(\prod_{k=1}^q \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k} \right)^m \int_0^{\varphi(\varepsilon, m)} \theta^{1+2p-s} e^{-\theta^2} d\theta, \quad m \rightarrow \infty,$$

где $\varphi(\varepsilon, m) = \varepsilon \sqrt{m \sum_{k=1}^q \beta_k / (1-\beta_k^2)} \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Учитывая, что

$$\int_0^{+\infty} \theta^{1+2p-s} e^{-\theta^2} d\theta = \frac{1}{2} \Gamma\left(1+p-\frac{s}{2}\right), \quad p = \left[\frac{s}{2}\right], \quad s > 0,$$

из последнего асимптотического равенства приходим к (34). Лемма 3 доказана.

Подставив асимптотические равенства (32), (33) и (34) в (31), получим (29), чем завершим доказательство теоремы 3.

Следствие 4 (полиномиальный случай). *Для равномерных приближений интегралов Пуассона с граничной функцией $M|x|^s$, $s > 0$, $M > 0$, на отрезке $[-1, 1]$ частичными суммами полиномиального ряда Фурье – Чебышёва справедлива асимптотическая оценка*

$$\varepsilon_{2n}^{(0)} \sim \frac{4M}{\pi(1-r^2)} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \Gamma(s+1) \frac{r^{2n+2}}{(2n)^{s+1}}, \quad s > 0, \quad r \in (0, 1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство следует непосредственно из (29), если положить $\beta_k = 1$, $k = 1, \dots, q$. Отметим, что аналогичный результат можно получить, исследовав асимптотическое поведение интеграла в следствии 2 при $n \rightarrow \infty$.

Следствие 5 (полиномиальный случай). *Для равномерных приближений функции $|x|^s$, $s > 0$, на отрезке $[-1, 1]$ частичными суммами полиномиального ряда Фурье – Чебышёва справедлива асимптотическая оценка*

$$\varepsilon_{2n}^{(0)} \sim \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \frac{\Gamma(s)}{(2n)^s}, \quad s > 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство следует непосредственно из (30), если положить $\beta_k = 1$, $k = 1, \dots, q$. Данный результат содержится в [19].

4. Случай двух геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции. Рассмотрим приближения интегралов Пуассона в условиях теоремы 2 при $q = 1$, $n_1 = m$. Для мажоранты равномерных приближений находим, что

$$\varepsilon_{2n,2}^*(\alpha) \sim \frac{2M}{\pi(1-R^2)^{\frac{s}{2}}} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| [\sigma_1(\beta, r, s, n) + \sigma_2(\beta, r, s, n)], \quad (35)$$

$s > 0$, $\beta = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$, $n \rightarrow \infty$, где

$$\sigma_1(\beta, r, s, n) = \frac{\Gamma(s+1)(\beta^2 - R^2)^{s+1}}{(1-R^2)^{\frac{s}{2}}(1+R)R(2n_1\beta)^{s+1}} \left(\frac{1-R}{1+R} \right)^p \left(\frac{\beta-R}{\beta+R} \right)^{n_1},$$

$$\sigma_2(\beta, r, s, n) = \frac{(1-R)^s(1-\beta^2)^{1+p-\frac{s}{2}}}{2^{2p+2}(n_1\beta)^{1+p-\frac{s}{2}}} \Gamma\left(1+p-\frac{s}{2}\right) \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{n_1},$$

если $r \in (0, 1)$, и

$$\varepsilon_{2n,2}^*(\alpha) \sim \frac{2M}{\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \left[\frac{\Gamma(s)\beta^s}{(2n_1)^s} + \frac{(1-\beta^2)^{1+p-\frac{s}{2}}}{2^{2p+2}(n_1\beta)^{1+p-\frac{s}{2}}} \Gamma\left(1+p-\frac{s}{2}\right) \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{n_1} \right], \tag{36}$$

$n \rightarrow \infty$, если $r = 1$, где $p = \left[\frac{s}{2}\right]$, $s > 0$.

Представляет интерес минимизировать правые части соотношений (35) и (36) посредством выбора оптимального для каждой задачи параметра $\alpha = \alpha^*$, $\alpha \in [0, r]$. Другими словами, будем искать оценку наилучшего равномерного приближения интегралов Пуассона с граничной функцией $M|x|^s$, $s > 0$, $M > 0$, на отрезке $[-1, 1]$ рациональным интегральным оператором (4). Для решения этой задачи положим

$$\varepsilon_{2n,2} = \inf_{\alpha \in [0,r]} \varepsilon_{2n,2}(\alpha), \quad \varepsilon_{2n,2}^* = \inf_{\alpha \in [0,r]} \varepsilon_{2n,2}^*(\alpha), \tag{37}$$

Теорема 4. *Имеют место*

(1) *асимптотическая оценка наилучшей мажоранты (37) при $r \in (0, 1)$:*

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2n,2}^* \sim \frac{M}{2^{2s}\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| & \left[\frac{\Gamma(s+1)(1+r^2)^{1-\frac{s}{2}}}{(1-r^4)^{\frac{1-s}{2}}} + \frac{2^{\frac{3s}{2}-p}\Gamma\left(1+p-\frac{s}{2}\right)}{(1-r^4)^{\frac{2+2p-s}{4}}} \right] \\ & \times \left(\frac{r^2}{1+\sqrt{1-r^4}} \right)^{n-p} \frac{r^{2+2p}(1+r^2)^{\frac{s}{2}}}{n^{1+\frac{p}{2}+\frac{s}{4}}}, \quad n \rightarrow \infty; \end{aligned}$$

(2) *асимптотическая оценка наилучшей мажоранты (37) при $r = 1$:*

$$\varepsilon_{2n,2}^* \sim \frac{2M}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \left(\frac{s}{2}\right)^s \left(\frac{\ln n}{n^2}\right)^s, \quad n \rightarrow \infty;$$

(3) $\varepsilon_{2n,2} = \varepsilon_{2n,2}^*$, если $n - p$ четное, $r \in (0, 1]$, где $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера, $p = [s/2]$, $s > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что при $\beta = 1$, а также $\beta = R$ порядок наилучших равномерных приближений не отличается от полиномиального. Положим

$$\beta = \sqrt{R}(1 + \rho_n),$$

где $\rho_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. При данном β из равенства (35) находим

$$\begin{aligned} \sigma_1(\beta, r, s, n) \sim \frac{\Gamma(s+1)}{(2n_1)^{s+1}} R^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{1-R}{1+R}\right)^{1+p+\frac{s}{2}} \left(\frac{1-\sqrt{R}}{1+\sqrt{R}}\right)^{n_1} \\ \times \exp\left[n_1\rho_n \frac{2\sqrt{R}}{1-R}\right], \quad n_1 \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получим

$$\sigma_2(\beta, r, s, n) \sim \frac{\Gamma(1+p-s/2)}{2^{2p+2}n_1^{1+p-\frac{s}{2}}} \frac{(1-R)^{1+p+\frac{s}{2}}}{R^{\frac{2+2p-s}{4}}} \left(\frac{1-\sqrt{R}}{1+\sqrt{R}}\right)^{n_1} \exp^{-1}\left[n_1\rho_n \frac{2\sqrt{R}}{1-R}\right],$$

$n_1 \rightarrow \infty$. Положим $\rho_n^* = \frac{C \ln n_1}{n_1}$, $n_1 = n - p$, $n \in \mathbb{N}$, и $\beta^* = \sqrt{R}(1 + \rho_n^*)$, где C — некоторая постоянная, не зависящая от n , но зависящая от s и r .

Покажем, что указанное значение β^* решает сформулированную выше задачу минимизации (см. (37)). В этом случае

$$\sigma_1(\beta^*, r, s, n) \sim \frac{\Gamma(s+1)}{(2n_1)^{s+1}} R^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{1-R}{1+R} \right)^{1+p+\frac{s}{2}} \left(\frac{1-\sqrt{R}}{1+\sqrt{R}} \right)^{n_1} n_1^{\frac{2\sqrt{RC}}{1-R}},$$

$$\sigma_2(\beta^*, r, s, n) \sim \frac{\Gamma(1+p-s/2)}{2^{2p+2} n_1^{1+p-\frac{s}{2}}} \frac{(1-R)^{1+p+\frac{s}{2}}}{R^{\frac{2+2p-s}{4}}} \left(\frac{1-\sqrt{R}}{1+\sqrt{R}} \right)^{n_1} \frac{1}{n^{\frac{2\sqrt{RC}}{1-R}}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Оптимальную константу C^* будем искать из условия

$$s+1 - \frac{2\sqrt{RC}}{1-R} = 1+p - \frac{s}{2} + \frac{2\sqrt{RC}}{1-R}.$$

Отсюда находим

$$C^* = \frac{(3s-2p)(1-R)}{8\sqrt{R}},$$

и правые части асимптотических равенств $\sigma_1(\beta^*, r, s, n)$ и $\sigma_2(\beta^*, r, s, n)$ соответственно примут вид

$$\sigma_1(\beta^*, r, s, n) \sim \frac{\Gamma(s+1)}{2^{s+1}} R^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{1-R}{1+R} \right)^{1+p+\frac{s}{2}} \left(\frac{1-\sqrt{R}}{1+\sqrt{R}} \right)^{n_1} \frac{1}{n_1^{1+\frac{p}{2}+\frac{s}{4}}},$$

$$\sigma_2(\beta^*, r, s, n) \sim \frac{\Gamma(1+p-s/2)}{2^{2p+2}} \frac{(1-R)^{1+p+\frac{s}{2}}}{R^{\frac{2+2p-s}{4}}} \left(\frac{1-\sqrt{R}}{1+\sqrt{R}} \right)^{n_1} \frac{1}{n_1^{1+\frac{p}{2}+\frac{s}{4}}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Подставив последние равенства в (35), при $n \rightarrow \infty$ получим

$$\varepsilon_{2n,2}^*(\alpha^*) \sim \frac{M}{2^s \pi (1-R^2)^{\frac{s}{2}}} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \left[\Gamma(s+1) R^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{1-R}{1+R} \right)^{1+p+\frac{s}{2}} \right. \\ \left. + \Gamma\left(1+p-\frac{s}{2}\right) \frac{(1-R)^{1+p+\frac{s}{2}}}{2^{1+2p-s} R^{\frac{2+2p-s}{4}}} \right] \left(\frac{1-\sqrt{R}}{1+\sqrt{R}} \right)^{n_1} \frac{1}{n_1^{1+\frac{p}{2}+\frac{s}{4}}}.$$

Возвращаясь к величине r по формуле $r = \sqrt{(1-R)/(1+R)}$, находим

$$\varepsilon_{2n,2}^*(\alpha^*) \sim \frac{M}{2^{2s} \pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \left[\frac{\Gamma(s+1)(1+r^2)^{1-\frac{s}{2}}}{(1-r^4)^{\frac{1-s}{2}}} + \frac{2^{\frac{3s}{2}-p} \Gamma\left(1+p-\frac{s}{2}\right)}{(1-r^4)^{\frac{2+2p-s}{4}}} \right] \\ \times \left(\frac{r^2}{1+\sqrt{1-r^4}} \right)^{n_1} \frac{r^{2+2p}(1+r^2)^{\frac{s}{2}}}{n_1^{1+\frac{p}{2}+\frac{s}{4}}}, \quad n_1 = n-p, \quad n \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Отметим, что правая часть последнего асимптотического равенства ввиду очевидного соотношения

$$r^{2p+2} \left(\frac{r^2}{1+\sqrt{1-r^4}} \right)^{n_1} = \frac{r^{2n+2}}{(1+\sqrt{1-r^4})^{n_1}} = o(r^{2n+2}), \quad n \rightarrow \infty,$$

убывает при $n \rightarrow \infty$ значительно быстрее полиномиального аналога, найденного в следствии 3.

Покажем, что найденное значение β^* является оптимальным в том смысле, что доставляет выражению $\varepsilon_{2n}^*(\alpha)$ асимптотически минимальное значение.

Зафиксируем некоторое $\delta > 0$. С одной стороны, при

$$\beta^+ = \sqrt{R}(1+\delta+\rho_n^*)$$

находим, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{\beta^+ - R}{\beta^+ + R}\right)^{n_1} &= \left(\frac{\sqrt{R}(1 + \delta + \rho_n^*) - R}{\sqrt{R}(1 + \delta + \rho_n^*) + R}\right)^{n_1} = \left(\frac{1 + \delta - \sqrt{R}}{1 + \delta + \sqrt{R}}\right)^{n_1} \left(\frac{1 + \frac{\rho_n^*}{1 + \delta - \sqrt{R}}}{1 + \frac{\rho_n^*}{1 + \delta + \sqrt{R}}}\right)^{n_1} \\ &\sim \left(\frac{1 + \delta - \sqrt{R}}{1 + \delta + \sqrt{R}}\right)^{n_1} n_1^{\frac{2\sqrt{R}C^*}{(1+\delta)^2 - R}} > \left(\frac{1 - \sqrt{R}}{1 + \sqrt{R}}\right)^{n_1} n_1^{\frac{2\sqrt{R}C^*}{1 - R}}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Последняя оценка справедлива при достаточно больших n ввиду того, что функция $(t - a)/(t + a)$, $a > 0$, переменного t возрастает. Отсюда заключаем, что при достаточно больших n будет

$$\varepsilon_{2n,2}^*(\alpha^+) > \varepsilon_{2n,2}^*(\alpha^*), \quad \alpha^+ = \sqrt{\frac{1 - \beta^+}{1 + \beta^+}}. \tag{39}$$

С другой стороны, при $\beta^- = \sqrt{R}(1 - \delta + \rho_n^*)$ исследуем выражение $\sigma_2(\beta^*, r, s, n)$. Имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - \beta^-}{1 + \beta^-}\right)^{n_1} &= \left(\frac{1 - \sqrt{R}(1 - \delta + \rho_n^*)}{1 + \sqrt{R}(1 - \delta + \rho_n^*)}\right)^{n_1} \\ &= \left(\frac{1 - \sqrt{R}(1 - \delta)}{1 + \sqrt{R}(1 - \delta)}\right)^{n_1} \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{R}\rho_n^*}{1 - \sqrt{R}(1 - \delta)}}{1 + \frac{\sqrt{R}\rho_n^*}{1 + \sqrt{R}(1 - \delta)}}\right)^{n_1} \\ &\sim \left(\frac{1 - \sqrt{R}(1 - \delta)}{1 + \sqrt{R}(1 - \delta)}\right)^{n_1} \frac{1}{n_1^{\frac{2\sqrt{R}C^*}{1 - R(1 - \delta)^2}}} > \left(\frac{1 - \sqrt{R}}{1 + \sqrt{R}}\right)^{n_1} \frac{1}{n_1^{\frac{2\sqrt{R}C^*}{1 - R}}}, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

что справедливо при достаточно больших n ввиду убывания функции $(1 - at)/(1 + at)$, $a > 0$, по t . Отсюда заключаем, что при достаточно больших n будет

$$\varepsilon_{2n,2}^*(\alpha^-) > \varepsilon_{2n,2}^*(\alpha^*), \quad \alpha^- = \sqrt{\frac{1 - \beta^-}{1 + \beta^-}}. \tag{40}$$

Из соотношений (39) и (40) следует, что

$$\varepsilon_{2n,2}^* = \inf_{\alpha \in [0,r]} \varepsilon_{2n,2}^*(\alpha) \sim \varepsilon_{2n,2}^*(\alpha^*), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\varepsilon_{2n,2}^*(\alpha^*)$ из (38). Из последнего соотношения вытекает утверждение (1).

Для доказательства утверждения (3) при $r \in (0, 1)$ воспользуемся точностью оценки (18) при четных значениях n_1 . В случае, когда полюсы имеют четную кратность, вышеуказанная оценка примет вид

$$\varepsilon_{2n,2}(\alpha) = \frac{M}{2^{s-2}\pi r^s} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^r \frac{(r^2 - t^2)^s t^{1+2p-s}}{1 - t^2} \left(\frac{\alpha^2 - t^2}{1 - \alpha^2 t^2}\right)^{n_1} dt,$$

$s > 0$, $n_1 = n - p$, $n \in \mathbb{N}$. Заменой переменного по формуле $t^2 = (1 - u)/(1 + u)$, $dt = -du/((1 - u)^{1/2}(1 + u)^{3/2})$, этот интеграл приводится к виду

$$\varepsilon_{2n,2}(\alpha) = \frac{2M}{\pi(1 - R^2)^{\frac{s}{2}}} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_R^1 \frac{(u - R)^s}{(1 - u^2)^{\frac{s}{2}}(1 + u)u} \left(\frac{1 - u}{1 + u}\right)^p \left(\frac{\beta - u}{\beta + u}\right)^{n_1} du,$$

$s > 0$, где $R = (1 - r^2)/(1 + r^2)$, $R \in [0, 1)$, $\beta = (1 - \alpha^2)/(1 + \alpha^2)$.

Поскольку интеграл справа совпадает с правой частью соотношения (28) при $q = 1$ и четном n_1 , то $\varepsilon_{2n,2}(\alpha) = \varepsilon_{2n,2}^*(\alpha)$ при любом $\alpha \in [0, 1)$. Следовательно, $\varepsilon_{2n,2} = \varepsilon_{2n,2}^*$ и имеет место утверждение (3) при $r \in (0, 1]$.

Займемся случаем $r = 1$. Задача поиска оптимального параметра, доставляющего асимптотически минимальное значение правой части асимптотического равенства (36), подробно рассмотрена нами в [16], когда в качестве метода рациональной аппроксимации применялись частичные суммы ряда Фурье по системе рациональных дробей Чебышёва — Маркова с двумя геометрически различными полюсами. Повторяя рассуждения из вышеуказанной работы, находим, что при заданном $s > 0$ оптимальным параметром, доставляющим асимптотически минимальное значение правой части равенства (36), будет

$$\beta^* = \frac{s \ln n}{n}, \quad s > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (41)$$

При этом выполняется утверждение (2). Таким образом, теорема 4 доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Асимптотическая оценка наилучших равномерных приближений в теореме 4 при $r = 1$ получена в [16]. Она также совпадает по порядку с оценкой наилучших равномерных приближений функции $|x|^s$ в случае двух геометрически различных полюсов в работе Е. А. Ровбы и Е. Г. Микулича [20] об аппроксимациях функций Маркова на отрезке $[-1, 1]$ частичными суммами рядов Фурье по системе рациональных функций, введенных М. М. Джрбашьяном и А. А. Китбальяном [21].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В теореме 4 установлено значение параметра

$$\beta^* = \sqrt{\frac{1 - r^2}{1 + r^2}} + \frac{(3s - 2p)r^2 \ln n}{4(1 + r^2)n}, \quad s > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

оптимальное в том смысле, что при нем равномерные приближения на отрезке $[-1, 1]$ рациональным интегральным оператором типа Фурье (4) функций, задаваемых интегралами Пуассона в условиях теоремы 2, при $r \in (0, 1)$ обладают наибольшей скоростью. Представляет интерес сравнить это значение со значением β^* , указанным в формуле (41) и оптимальным при $r = 1$.

Заключение. В работе изучены аппроксимации на классах функций, представимых на отрезке $[-1, 1]$ интегралами Пуассона, а также некоторых индивидуальных функций из данного класса рациональными интегральными операторами типа Фурье на основании системы алгебраических дробей Чебышёва — Маркова. Найдены интегральное представление приближений и оценка сверху равномерных приближений, когда граничная функция φ принадлежит $S_\infty^0[-1, 1]$. В случае, когда граничная функция имеет на отрезке $[-1, 1]$ степенную особенность, получены оценки сверху поточечных и равномерных приближений, точные в случае четного количества полюсов аппроксимирующей функции. В случае фиксированного числа геометрически различных полюсов у аппроксимирующей функции установлено асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений. Если аппроксимирующая функция имеет два геометрически различных комплексно сопряженных полюса в открытой комплексной плоскости, то найдены асимптотические оценки наилучших мажорант равномерных приближений функций, представимых интегралами Пуассона с граничной функцией, имеющей степенную особенность, и асимптотически

точная оценка наилучших равномерных приближений рассматриваемым методом при условии их четной кратности.

Из полученных результатов можно заключить, что порядок приближений функций, представимых на отрезке $[-1, 1]$ интегралами Пуассона, в случае, когда граничная функция имеет степенную особенность, рациональным интегральным оператором типа Фурье оказываются в значительной степени выше соответствующих полиномиальных аналогов, т. е. исследуемый метод приближений отражает особенности рациональной аппроксимации функций из классов Пуассона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1946. Т. 10, № 3. С. 207–256.
2. Стечкин С. Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. МИАН СССР. 1980. Т. 145. С. 126–151.
3. Доронин В. Г., Лигун А. А. Точные значения наилучших односторонних приближений некоторых классов периодических функций // Изв. вузов. Математика. 1979. № 8. С. 20–25.
4. Степанец А. И. Решение задачи Колмогорова — Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 1. С. 113–138.
5. Рукасов В. И. Приближение суммами Валле Пуассона классов аналитических функций // Укр. мат. журн. 2003. Т. 55, № 6. С. 806–816.
6. Сердюк А. С. Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуассона в рівномірній та інтегральних метриках // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. 2009. V. 6. P. 34–39.
7. Serdyuk A. S., Sokolenko I. V. Asymptotic behavior of best approximations of classes of Poisson integrals of functions from H_ω // J. Approx. Theory. 2011. V. 163. P. 1692–1706.
8. Новиков О. А., Ровенская О. Г. Приближение классов интегралов Пуассона суммами Фейера // Компьютерные исследования и моделирование. 2015. Т. 7, № 4. С. 813–819.
9. Русецкий Ю. И. О приближении непрерывных на отрезке функций суммами Абеля — Пуассона // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 1. С. 136–144.
10. Жигалло Т. В. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица на конечном отрезке вещественной оси, интегралами Пуассона — Чебышёва // Проблемы управления и информатики. 2018. Т. 3. С. 1–14.
11. Русак В. Н. Об одном методе приближения рациональными функциями // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. 1978. Т. 3. С. 15–20.
12. Ровба Е. А. Рациональные интегральные операторы на отрезке // Вестн. БГУ. 1996. Т. 1, № 1. С. 34–39.
13. Ровба Е. А. Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 11. С. 968–971.
14. Ровба Е. А. О приближении функции $|\sin x|$ рациональными рядами Фурье // Мат. заметки. 1989. Т. 46, № 4. С. 52–59.
15. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
16. Ровба Е. А., Поцейко П. Г. Аппроксимация функции $|x|^s$ на отрезке $[-1, 1]$ частичными суммами рационального ряда Фурье — Чебышёва // Вєстн. Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2019. Т. 9, № 3. С. 16–28.
17. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.
18. Федорюк М. В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
19. Поцейко П. Г. Об одном представлении сингулярного интеграла Джексона и аппроксимации функции $|x|^s$ на отрезке $[-1, 1]$ // Вєстн. Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2019. Т. 9, № 2. С. 22–38.
20. Rovba E. A., Mikulich E. G. Constants in rational approximation of Markov–Stieltjes functions with fixed number of poles // Vesn. Yanka Kupala State University. 2013. V. 1. P. 12–20.

21. Джрбашян М. М. Об одном обобщении полиномов Чебышёва // Докл. АН Арм. ССР. 1964. Т. 38, № 5. С. 263–270.

Поступила в редакцию 26 августа 2020 г.

После доработки 26 августа 2020 г.

Принята к публикации 18 ноября 2020 г.

Поцейко Павел Геннадьевич, Ровба Евгений Алексеевич
Гродненский государственный университет им. Я. Купалы,
кафедра фундаментальной и прикладной математики,
ул. Ожешко, 22, Гродно 230023, Беларусь
pahamatby@gmail.com, rovba.ea@gmail.com