С. К. Водопьянов, О регулярности отображений, обратных к соболевским, и теория $\mathscr{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмов, *Сиб. матем. журн.*, 2020, том 61, номер 6, 1257–1299

DOI: 10.33048/smzh.2020.61.605

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2020. Том 61, № 6

УДК 517.518+517.54

О РЕГУЛЯРНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ, ОБРАТНЫХ К СОБОЛЕВСКИМ, И ТЕОРИЯ $\mathscr{Q}_{q,p}$–ГОМЕОМОРФИЗМОВ

С. К. Водопьянов

Аннотация. Доказано, что всякий гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ евклидовых областей в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, класса Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $p \in [1,\infty)$, с конечным искажением индуцирует ограниченный оператор композиции из весового пространства Соболева $L^1_p(D';\omega)$ в $L^1_p(D)$ для некоторой весовой функции $\omega : D' \to (0,\infty)$. В качестве следствия отсюда вытекает, что при условиях $p > n-1$, $n \geq 3$, или $p \geq 1$, $n \geq 2$, обратный $\varphi^{-1} : D' \to D$ к такому гомеоморфизму принадлежит классу Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$, имеет конечное искажение и дифференцируем $\mathscr{H}^n$-п. в. в D'. Получены применения этого результата к теории $\mathscr{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмов и обобщен метод его доказательства для гомеоморфизмов групп Карно.

Дополнительно доказано, что класс $\mathscr{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмов полностью определяется контролируемым изменением емкости кубических конденсаторов: их оболочки суть концентрические кубы.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.605

Ключевые слова: квазиконформный анализ, пространство Соболева, оператор композиции, емкостная оценка.

Введение

Основное содержание работы посвящено доказательству следующей характерной особенности гомеоморфизмов классов Соболева (см. ниже теорему 25) и вытекающих из нее свойств.

Утверждение 1. *Если гомеоморфизм* $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ *— открытые области,* $n \geq 2$, *принадлежит классу Соболева* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $p \in [1,\infty)$, *и имеет конечное искажение, то гомеоморфизм* φ *индуцирует ограниченный оператор композиции* $\varphi^* : L^1_p(D';\omega) \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_p(D)$ *по правилу* $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$, $u \in L^1_p(D';\omega) \cap \mathrm{Lip}_l(D')$, *с некоторой весовой функцией* $\omega : D' \to (0,\infty)$, *определяемой ниже в* (30).

Напомним, что функция $u : D \to \mathbb{R}$, определенная на открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, принадлежит *классу Соболева* $L^1_p(D)$, если u локально суммируема в D, имеет обобщенные производные $\frac{\partial u}{dx_j} \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$ для любого $j = 1, \dots, n$

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (номер 075–15–2019–1613).

(т. е. $\frac{\partial u}{dx_j} \in L_1(U)$ для любой компактно вложенной области $U \Subset D$) и конечную полунорму

$$\|u \mid L^1_p(D)\| = \Big(\int\limits_D |\nabla u(y)|^p \, dy\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Здесь и далее символом $\operatorname{Lip}_l(D')$ обозначено пространство локально липшицевых функций, определенных на области D'. Очевидно, $\operatorname{Lip}_l(D') = W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(D') \cap C(D')$.

Отображение $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ принадлежит *классу Соболева* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, если $\varphi_j(x)$ и обобщенные производные $\frac{\partial \varphi_j}{dx_i}$ принадлежат $L_{p,\mathrm{loc}}(D)$ для любых $j, i = 1, \dots, n$.

Отображение $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ называют отображением с *конечным искажением*, если

$$D\varphi(x) = 0 \quad \mathscr{H}^n\text{-п. в. на множестве } Z = \{x \in D : \det D\varphi(x) = 0\}. \tag{1}$$

Здесь и далее $D\varphi(x) = \big(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x)\big)$ — матрица Якоби отображения φ в точке $x \in D$, $|D\varphi(x)|$ — ее евклидова операторная норма, а $\det D\varphi(x)$ — ее определитель (якобиан).

Сформулированное выше утверждение 1 о функциональной характеристике гомеоморфизма класса Соболева служит основой для доказательства новых свойств обратного гомеоморфизма (см. ниже теорему 27).

Утверждение 2. *Если гомеоморфизм $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ — открытые области, $n \ge 2$, принадлежит классу Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $p \in [1, \infty)$ при $n = 2$ или $p \in (n-1, \infty)$ при $n \ge 3$, и имеет конечное искажение, то обратный гомеоморфизм $\varphi^{-1} : D' \to D$*

1) *принадлежит классу Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$,*
2) *имеет конечное искажение,*
3) *дифференцируем $\mathscr{H}^n$-п. в. в D'.*

Заметим, что утверждения 1, 2 доказаны в [1, теоремы 3.2, 3.3] при $n = 2$, $p = 1$ и в [2, теорема 1.2] при $n \ge 3$, $p > n - 1$; работы [1, 2] мотивированы применениями к задачам нелинейной теории упругости (см. [3]); утверждение 3 можно получить из [4; 5, теорема 2] при $n = 2$, $p = 1$ и из монографии [6] при $n \ge 3$, $p = n$, в которой приведена также подробная библиография.

Доказательство свойств, сформулированных в утверждении 2 (см. теорему 27), новое и более лаконичное по сравнению с доказательствами вышеперечисленных работ.

Более того, новое доказательство применимо и на метрических структурах более сложной природы (см. ниже § 4, где установлены аналоги утверждений 1 и 2 на группах Карно).

Настоящая статья естественно входит в цикл публикаций [7–12], начавшийся в ряде работ [13–20] и возникший на стыке теории функциональных пространства и геометрической теории функций [21–39]. Некоторые результаты упомянутых работ нашли применения в нелинейной теории упругости (см. [40]).

Основные результаты настоящей работы сформулированы в [11].

§ 1. Предварительные сведения

Сформулируем основной результат работ [10, 12]. Можно сказать, что он представляет собой «весовое» обобщение результатов публикаций [13–16] (соответственно [17–20]) в части $1 < q = p < \infty$ $(1 < q < p < \infty)$.

Теорема 3 [10, 12]. *Пусть заданы гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и весовая локально суммируемая функция $\omega : D' \to (0,\infty)$.*

Следующие условия эквивалентны:

1) *оператор композиции $\varphi^* : L^1_p(D';\omega) \cap \operatorname{Lip}_l(D') \to L^1_q(D)$, $1 \leq q \leq p < \infty$, ограничен;*

2) *для любого кольцевого*[1)] *конденсатора $E = (F, U)$ в D' с прообразом $\varphi^{-1}(E) = (\varphi^{-1}(F), \varphi^{-1}(U))$ в D выполняется неравенство (здесь и далее число σ определяется соотношениями $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, если $1 \leq q < p < \infty$, и $\sigma = \infty$, если $1 \leq q = p < \infty$)*

$$\operatorname{cap}^{\frac{1}{q}}\big(\varphi^{-1}(E); L^1_q(D)\big) \leq \begin{cases} K_p \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\big(E; L^1_p(D';\omega)\big), & 1 < q = p < \infty, \\ \Psi_{q,p}(U \setminus F)^{\frac{1}{\sigma}} \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\big(E; L^1_p(D';\omega)\big), & 1 < q < p < \infty, \end{cases} \tag{2}$$

где $\Psi_{q,p}$ — некоторая ограниченная квазиаддитивная функция множества, определенная на открытых подмножествах области D';

3) *гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ принадлежит $W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$, имеет конечное искажение: $D\varphi(x) = 0$ $\mathscr{H}^n$-п. в. на множестве $Z = \{x \in D \mid J(x,\varphi) = 0\}$, и операторная функция искажения*

$$D \ni x \mapsto K^{1,\omega}_{q,p}(x,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}\,\omega^{\frac{1}{p}}(\varphi(x))}, & \text{если } \det D\varphi(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \det D\varphi(x) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

принадлежит $L_\sigma(D)$.

Кроме того, $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$ и

$$2^{-\frac{n}{q}}\left(\frac{3n}{2}\right)^{-1}\big\|K^{1,\omega}_{q,p}(\cdot) \mid L_\sigma(D)\big\| \leq \|\varphi^*\|$$
$$\leq \big\|K^{1,\omega}_{q,p}(\cdot) \mid L_\sigma(D)\big\| \leq \begin{cases} 3n2^{\frac{n-p}{p}} K_p & \text{при } q = p, \\ 3n2^{\frac{n-q}{q}} \Psi_{q,p}(D')^{\frac{1}{\sigma}} & \text{при } q < p. \end{cases} \tag{4}$$

Замечание 4. Эквивалентность утверждений 1–3 теоремы 3 доказана в [10, 12] при $1 < q \leq p < \infty$, что обусловлено пределами изменения параметров суммируемости в (2).

В то же время эквивалентность утверждений 1 и 3 теоремы 3 доказана в [10, 12, 41, 42] при $1 \leq q \leq p < \infty$. В этой работе установлено (см. ниже следствие 29), что все утверждения теоремы 3 эквивалентны также и при $1 = q \leq p < \infty$, $n = 2$.

Действительно, импликация $1 \Rightarrow 2$ в теореме 3 доказана в [10, 12] при $1 < q$, однако то же самое доказательство работает и при $n = 2$, $q = 1$. Импликация $2 \Rightarrow 3$ при $q = 1$, $n = 2$ доказана в следствии 29 настоящей работы.

Приведем определения всех используемых в этой теореме понятий.

Локально суммируемая функция $\omega : D' \to \mathbb{R}$ называется *весовой*, если $0 < \omega(y) < \infty$ для $\mathscr{H}^n$-п. в. $y \in D'$. Напомним, что функция $u : D' \to \mathbb{R}$ принадлежит *весовому классу Соболева* $L^1_p(D';\omega)$, $p \in [1,\infty)$, если u локально суммируема в D', а обобщенные производные[2)] $\frac{\partial u}{\partial y_j}$ принадлежат $L_p(D';\omega)$ для

[1)] Описание кольцевого конденсатора см. ниже в определении 5.

[2)] Определение обобщенных производных предполагает, что $\frac{\partial u}{dy_j} \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$.

любого $j = 1, \dots, n$. Полунорма функции $u \in L^1_p(D';\omega)$ равна

$$\|u \mid L^1_p(D';\omega)\| = \biggl(\int\limits_{D'} |\nabla u|^p(y)\omega(y)\,dy\biggr)^{\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

В случае $\omega \equiv 1$ вместо $L^1_p(D';1)$ пишем просто $L^1_p(D')$.

Напомним, что гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ *порождает ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(D';\omega) \cap \operatorname{Lip}_l(D') \to L^1_q(D), \quad 1 \le q \le p < \infty,$$

действующий по правилу $D \ni x \mapsto (\varphi^* u)(x) = u(\varphi(x))$, если с некоторой постоянной $K_{q,p} < \infty$ справедливо неравенство

$$\|\varphi^* u \mid L^1_q(D)\| \le K_{q,p}\|u \mid L^1_p(D';\omega)\| \text{ для любой функции } u \in L^1_p(D') \cap \operatorname{Lip}_l(D').$$

Определение 5. *Конденсатором* в области $D' \subset \mathbb{R}^n$ называется пара $E = (F_1, F_0)$ связных компактов (континуумов) в D': $F_1, F_0 \subset D'$. Если континуум F содержится в U, где $U \Subset D'$ — открытое связное компактно вложенное множество, то конденсатор $E = (F, \partial U)$ будем обозначать символом $E = (F, U)$.

Конденсатор $E = (F, \partial U)$ называется *кольцевым*, если дополнение в $\mathbb{R}^n$ к открытому множеству $U \setminus F$ состоит из двух замкнутых множеств, каждое из которых связно: ограниченная компонента связности — континуум F, а неограниченная — $\mathbb{R}^n \setminus U$.

Кольцевой конденсатор $E = (F, \partial U)$ в $\mathbb{R}^n$ называется *сферическим* (*кубическим*), если область U — это шар[3] $B(x, R) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x|_2 < R\}$ (куб $Q(x, R) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x|_\infty < R\}$), а континуум $F \subset U$ — это замыкание шара $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x|_2 \le r\}$ (куба $Q(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x|_\infty < r\}$), где $r < R$.

Непрерывная функция $u : D \to \mathbb{R}$ класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ называется *допустимой для конденсатора* $E = (F_1, F_0) \subset D$, если $u \equiv 1$ на F_1 и $u \equiv 0$ на F_0. Совокупность допустимых для конденсатора $E = (F_1, F_0)$ функций будем обозначать символом $\mathscr{A}(E)$.

Емкость конденсатора $E = (F_1, F_0)$ в пространстве $L^1_q(D)$, $q \in [1, \infty)$, определим как величину

$$\operatorname{cap}\bigl(E; L^1_q(D)\bigr) = \inf_{u \in \mathscr{A}(E)} \|u \mid L^1_q(D)\|^q, \tag{6}$$

где инфимум берется по всем допустимым для конденсатора $E = (F_1, F_0) \subset D$ функциям класса $\mathscr{A}(E)$.

Весовую емкость конденсатора $E = (F_1, F_0) \subset D'$ в пространстве $L^1_p(D';\omega)$ определим как величину

$$\operatorname{cap}\bigl(E; L^1_p(D';\omega)\bigr) = \inf_{u \in \mathscr{A}(E) \cap \operatorname{Lip}_l(D')} \|u \mid L^1_p(D';\omega)\|^p,$$

где инфимум берется по всем допустимым для конденсатора $E = (F_1, F_0)$ функциям пересечения $\mathscr{A}(E) \cap \operatorname{Lip}_l(D')$.

Далее рассматриваем в области D' преимущественно *кольцевые конденсаторы* вида $E = (F, U)$.

[3] Напомним, что норма $|x|_p$ вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ определяется как величина $|x|_p = \Bigl(\sum\limits_{k=1}^n |x_k|^p\Bigr)^{\frac{1}{p}}$ при $p \in [1, \infty)$ и $|x|_\infty = \max\limits_{k=1,\dots,n} |x_k|$. Шары в норме $|x|_2$ ($|x|_\infty$) — это (евклидовы) шары (кубы).

Определение 6. Пусть D — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Обозначим символом $\mathscr{O}(D)$ некоторую систему открытых множеств в D, обладающую следующими свойствами:

(a) если замыкание $\overline{B}$ открытого шара[4] B содержится в D, то $B \in \mathscr{O}(D)$;

(b) если $U_1, \dots, U_k \in \mathscr{O}(D)$ — дизъюнктная система открытых множеств, то $\bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i \in \mathscr{O}(D)$, $k \in \mathbb{N}$ — произвольное число.

Отображение $\Phi : \mathscr{O}(D) \to [0, \infty]$ называется *$\varkappa$-квазиаддитивной* функцией множества, если

(c) для всякой точки $x \in D$ существует δ, $0 < \delta < \operatorname{dist}(x, \partial D)$, такое, что $0 < \Phi(B(x,\delta)) < \infty$ (если $D = \mathbb{R}^n$, то неравенство $0 \leq \Phi(D(x,\delta)) < \infty$ должно выполняться для всех $\delta \in (0, \delta(x))$, где $\delta(x) > 0$ — число, которое может зависеть от точки x);

(d) для всякого конечного дизъюнктного набора $U_i \in \mathscr{O}(D)$, $i = 1, \dots, l$, открытых множеств таких, что

$$\bigcup_{i=1}^{l} U_i \subset U, \quad \text{где } U \in \mathscr{O}(D), \text{ верно неравенство } \sum_{i=1}^{l} \Phi(U_i) \leq \varkappa \Phi(U). \tag{7}$$

Если неравенство (7) выполняется с постоянной $\varkappa = 1$, то Φ будем называть *квазиаддитивной* (вместо 1-*квазиаддитивной*) *функцией множества.*

Если для всякого конечного набора $\{U_i \in \mathscr{O}(D)\}$ попарно не пересекающихся открытых множеств имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi(U_i) = \Phi\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right), \tag{8}$$

то такая функция множества называется *конечно аддитивной*, а если (8) справедливо для всякого счетного набора $\{U_i \in \mathscr{O}(D)\}$ попарно не пересекающихся открытых множеств, то — *счетно аддитивной.*

Функция Φ *монотонна*, если $\Phi(U_1) \leq \Phi(U_2)$ при условии, что $U_1 \subset U_2 \subset D$, $U_1, U_2 \in \mathscr{O}(D)$. Очевидно, что всякая квазиаддитивная функция множества монотонна.

$\varkappa$-Квазиаддитивная функция множества $\Phi : \mathscr{O}(D) \to [0, \infty]$ называется *ограниченной*, если $\sup\limits_{U \in \mathscr{O}(D)} < \infty$.

Теорема 3 мотивирует выделение в самостоятельный объект исследования следующую шкалу отображений. Напомним, что отображение $f : D' \to \mathbb{R}^n$, D' — область в $\subset \mathbb{R}^n$, называется *непрерывным открытым и дискретным*, если f непрерывно в D', образ открытого множества открыт и прообраз $f^{-1}(y)$ точки $y \in f(D)$ дискретен.

Определение 7 [10, 12]. Будем говорить, что гомеоморфизм (или, более общо, непрерывное открытое и дискретное отображение) $f : D' \to D$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *принадлежит классу* $\mathscr{Q}_{q,p}(D', D; \omega)$, где $1 < q \leq p < \infty$ при $n \geq 3$ или $1 \leq q \leq p < \infty$ при $n = 2$, а $\omega \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$ — весовая функция, если существуют

1) постоянная K_p при $q = p$

или

2) ограниченная квазиаддитивная функция $\Psi_{q,p}$ при $q < p$, заданная на открытых множествах в D',

[4] В качестве элементарных множеств вместо шаров можно рассматривать кубы.

такие, что для всякого конденсатора $E = (F_0, F_1)$, расположенного в D', и образа $f(E) = (f(F_0), f(F_1))$, расположенного в D, выполняются неравенства

$$\begin{cases} \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\big(f(E); L^1_p(D)\big) \leq K_p \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\big(E; L^1_p(D';\omega)\big), & \text{если } q = p, \\ \operatorname{cap}^{\frac{1}{q}}\big(f(E); L^1_q(D)\big) \leq \Psi_{q,p}(D' \setminus (F_0 \cup F_1))^{\frac{1}{\sigma}} \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\big(E; L^1_p(D';\omega)\big), & \text{если } q < p. \end{cases} \tag{9}$$

Если условия (9) выполняются только для *кольцевых конденсаторов* $E = (F, U) \subset D'$:

$$\begin{cases} \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\big(f(E); L^1_p(D)\big) \leq K_p \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\big(E; L^1_p(D';\omega)\big), & \text{если } q = p, \\ \operatorname{cap}^{\frac{1}{q}}\big(f(E); L^1_q(D)\big) \leq \Psi_{q,p}(U \setminus F)^{\frac{1}{\sigma}} \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\big(E; L^1_p(D';\omega)\big), & \text{если } q < p, \end{cases} \tag{10}$$

то получаем более широкий класс гомеоморфизмов $f : D' \to D$ и обозначаем его символом $\mathscr{R}\mathscr{Q}_{q,p}(D', D; \omega)$.

Если условия (10) выполняются только для *сферических* (*кубических*) *кольцевых конденсаторов*, то получаем еще более широкий класс гомеоморфизмов $f : D' \to D$ и обозначаем его символом $S\mathscr{R}Q_{q,p}(D', D; \omega)$ $(Q\mathscr{R}Q_{q,p}(D', D; \omega))$.

Очевидно,

$$\mathscr{Q}_{q,p}(D', D; \omega) \subset \mathscr{R}Q_{q,p}(D', D; \omega) \subset S\mathscr{R}Q_{q,p}(D', D; \omega) \quad (Q\mathscr{R}Q_{q,p}(D', D; \omega)).$$

Замечание 8. В случае $q = p = n$ класс гомеоморфизмов $\mathscr{Q}_{n,n}(D', D; \omega)$ содержит [12, разд. 4.4] класс так называемых Q-гомеоморфизмов [6], определяемых посредством контролируемого изменения модуля семейств кривых.

В следующей теореме приводится аналитическое описание отображений, обратные к которым принадлежат классу $\mathscr{Q}_{q,p}(D', D; \omega)$.

Теорема 9 [10, 12]. *Гомеоморфизм $f : D' \to D$ тогда и только тогда принадлежит классу $\mathscr{R}Q_{q,p}(D', D; \omega)$, $1 < q \leq p < \infty$ при $n \geq 3$ и $1 \leq q \leq p < \infty$ при $n = 2$, когда обратный гомеоморфизм $\varphi = f^{-1} : D \to D'$ обладает либо свойством 1, либо свойством 3 теоремы 3.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что условие $f \in \mathscr{R}Q_{q,p}(D', D; \omega)$, $1 < q \leq p < \infty$, $2 \leq n$, для гомеоморфизма $f : D' \to D$ эквивалентно выполнению условия 2 в теореме 3 для обратного гомеоморфизма $\varphi = f^{-1} : D \to D'$. Отсюда выводим, что для отображения $\varphi : D \to D'$ выполнены утверждение 1 и утверждение 3 теоремы 3. Так как приведенные рассуждения обратимы, теорема 9 доказана в случае $n > 2$. Справедливость теоремы 9 в случае $1 = q \leq p < \infty$, $n = 2$, доказана в теореме 3, замечании 4 и следствии 29 настоящей работы. □

В этой работе приведены новые примеры классов отображений, входящих в семейство $\mathscr{Q}_{q,p}(D', D; \omega)$.

Замечание 10. В [13–16], доказано, что в случае $1 < q = p < \infty$, $\omega \equiv 1$ оператор композиции $\varphi^* : L^1_p(D') \cap \operatorname{Lip}_l(D') \to L^1_p(D)$ теоремы 3 распространяется по непрерывности на пространство $L^1_p(D')$ и совпадает с оператором композиции в следующем смысле:

$$L^1_p(D') \ni u \mapsto \varphi^* u = \begin{cases} u \circ \varphi, & \text{где } u \text{ — непрерывный представитель } u \in L^1_p(D') \text{ при } p \in (n, \infty), \\ u \circ \varphi, & \text{где } u \text{ — произвольный представитель } u \in L^1_p(D') \text{ при } p \in [1, n]. \end{cases}$$

При $p = n$ отображения этого класса квазиконформные. В [43] отображения этого класса при $p \neq n$ названы p-морфизмами.

Напомним несколько полезных понятий. Для $k \geq 0$, $\delta \in (0, \infty]$ и $A \subset \mathbb{R}^n$ определим величину

$$\mathscr{H}^k_\delta(A) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam} T_i)^k : \operatorname{diam} T_i < \delta, A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_i\Big\},$$

где $\omega_k = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}$, а инфимум берется по всем счетным покрытиям $\{T_i\}$ множества A. Если A не может быть покрыто счетным набором множеств указанного размера, то полагаем $\mathscr{H}^k_\delta(A) = \infty$. Предел $\mathscr{H}^k(A) = \lim\limits_{\delta\to 0} \mathscr{H}^k_\delta(A)$ существует и называется *k-мерной мерой Хаусдорфа* множества A. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ n-мерная мера Хаусдорфа $\mathscr{H}^n(A)$ множества $A \subset \mathbb{R}^n$ совпадает с n-мерной мерой Лебега (см., например, [44, теорема 2.3.4]).

Квазиаддитивная функция множества Φ, определенная выше, дифференцируема в следующем смысле.

Предложение 11 [45–47]. **I.** *Пусть монотонная квазиаддитивная функция множества Φ определена на некоторой системе $\mathscr{O}(D')$ открытых подмножествах области D'. Тогда*

1) *для $\mathscr{H}^n$-п. в. точек $y \in D'$ существует конечная производная*[5]*:*

$$\lim_{\delta\to 0,\, y\in B_\delta} \frac{\Phi(B_\delta)}{\mathscr{H}^n(B_\delta)} = \Phi'(y);$$

2) *для любого открытого множества $U \in \mathscr{O}(D')$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_U \Phi'(y)\, dy \leq \Phi(U).$$

II. *Пусть монотонная $\varkappa$-квазиаддитивная функция множества Φ определена на некоторой системе $\mathscr{O}(D')$ открытых подмножествах области D'. Тогда*

3) *для $\mathscr{H}^n$-п. в. точек $y \in D'$ существует конечная верхняя производная:*

$$\lim_{r\to 0} \sup_{0<\delta<r,\, y\in B_\delta} \frac{\Phi\,(B_\delta)}{\mathscr{H}^n(B_\delta)} = \overline{\Phi}'(y);$$

4) *для любого открытого множества $U \in \mathscr{O}(D')$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_U \overline{\Phi}'(y)\, dy \leq \varkappa\Phi(U).$$

Во всех пределах шары можно заменить кубами.

Пример 12 (объемная производная). **I.** Пусть D' — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а $f : D' \to \mathbb{R}^n$ — инъективное непрерывное отображение. Для любого открытого множества $U \subset D'$ образ $f(U)$ является борелевским множеством и поэтому определена функция множества $\mathscr{V}_n$:

$$U \mapsto \mathscr{V}_n(U) = \mathscr{H}^n(f(U)).$$

Функция $\mathscr{V}_n$ определена на открытых множествах $U \subset D'$ и является, очевидно, монотонной и счетно аддитивной. В силу предложения 11 существует производная $\mathscr{V}'_n(y)$, совпадающая для $\mathscr{H}^n$-п. в. $y \in D'$ с плотностью (объемной производной)

$$D' \ni y \mapsto J_f(y) = \lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}^n(f(B(y,r)))}{\mathscr{H}^n(B(y,r))} \tag{11}$$

[5] Здесь и далее B_δ — произвольный шар $B(z,\delta) \subset D'$, содержащий точку y.

функции множества $\mathscr{B}(D') \ni T \mapsto \mathscr{H}^n(f(T))$, определенной на σ-алгебре $\mathscr{B}(D')$ борелевских множеств $T \subset D'$.

II. Пусть D' — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а $f : D' \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое дискретное отображение. Фиксируем произвольное открытого множества $U \Subset D'$. Его образ $f(U)$ является открытым ограниченным множеством. Более того, функция кратности (индикатриса Банаха)

$$f(U) \ni x \mapsto \mathscr{N}(x, f, U) = \#\{y \in U : f(y) = x\}$$

ограничена (см. [48, предложение 4.1]). Положим $\mathscr{N}(f, U) = \sup\limits_{x \in f(U)} \mathscr{N}(x, f, U)$. Имеем $\mathscr{N}(f, U) < \infty$.

Функция множества $\mathscr{V}_n$:

$$U \supset V \mapsto \mathscr{V}_n(V) = \mathscr{H}^n(f(V)),$$

определенная на открытых множествах $V \subset U$, является монотонной $\varkappa$-квазиаддитивной функцией множества с постоянной $\varkappa = \mathscr{N}(f, U)$. Действительно, если $V_i \subset U$, $i = 1, \dots, l$, — конечный дизъюнктный набор открытых множеств, то

$$\sum_{i=1}^{l} \mathscr{V}_n(V_i) = \sum_{i=1}^{l} \mathscr{H}^n(f(V_i)) = \sum_{i=1}^{l} \int\limits_{f(U)} \chi_{f(V_i)}(x)\,dx \\ \leq \int\limits_{f(U)} \mathscr{N}(f, U)\,dx = \mathscr{N}(f, U)\mathscr{V}_n(U).$$

В силу предложения 11 существует верхняя производная $\overline{\mathscr{V}}'_n(y)$:

$$U \ni y \mapsto \overline{\mathscr{V}}'_n(y) = \varlimsup_{r \to 0,\, y \in B_r} \frac{\mathscr{H}^n(\mathscr{V}_n(B_r))}{\mathscr{H}^n(B_r)} = \varlimsup_{r \to 0,\, y \in B_r} \frac{\mathscr{H}^n(f(B_r))}{\mathscr{H}^n(B_r)}, \tag{12}$$

где B_r — шар радиуса r, содержащий точку y, не обязательно совпадающую с центром шара B_r. При этом по предложению 11 верно неравенство

$$\int\limits_{V} \overline{\mathscr{V}}'_n(y)\,dy \leq \varkappa \mathscr{V}_n(V)$$

для любого открытого множества $V \subset U$.

Пример 13 (теорема Лебега о дифференцировании интеграла). Пусть D — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а $g \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$ — неотрицательная функция. Для открытого множества $U \subset D$ положим $\Phi(U) = \int\limits_U g(x)\,dx$. Функция Φ определена на открытых множествах $U \subset D$, монотонна и счетно аддитивна. Ее производная $\Phi'(x)$ существует для $\mathscr{H}^n$-п. в. $x \in D$ и совпадает $\mathscr{H}^n$-п. в. с функцией $g(x)$ [49, 50].

Напомним, что функция $u : D \to \mathbb{R}$ принадлежит $\mathrm{ACL}(D)$ ($u \in \mathrm{ACL}(D)$), если ограничение $u|_Q$ функции $u : D \to \mathbb{R}$ на любой замкнутый куб $Q \subset D$, ребра которого параллельны координатным осям, абсолютно непрерывно на $\mathscr{H}^{n-1}$-п. в. отрезках, перпендикулярных граням этого куба. Известно (см., например, [51]), что всякую функцию класса $f \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ можно переопределить на множестве меры нуль так, что переопределенная функция $\tilde{f}$ будет принадлежать $\mathrm{ACL}(D)$, а все ее частные производные будут совпадать с обобщенными $\mathscr{H}^n$-п. в. в D.

Ниже будем применять следующую формулу о замене переменной в интеграле Лебега.

Предложение 14 [12, 52]. *Пусть $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ (или класса $\mathrm{ACL}(D)$). Тогда*

1) *существует борелевское множество $\Sigma \subset D$ нулевой меры такое, что $\varphi : D \setminus \Sigma \to \mathbb{R}^n$ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина;*

2) *функции*

$$D \setminus \Sigma \ni x \mapsto (u \circ \varphi)(x)|\det D\varphi(x)| \quad \text{и} \quad \mathbb{R}^n \ni y \mapsto u(y)\mathscr{N}(y, \varphi, D \setminus \Sigma)$$

измеримы, если функция $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ измерима;

3) *если $A \subset D \setminus \Sigma$ — измеримое множество, то верна формула площади:*

$$\int\limits_A |\det D\varphi(x)|\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathscr{N}(y, \varphi, A)\, dy;$$

4) *если функция $u \geq 0$ неотрицательна, то подынтегральные функции в (13) измеримы и верна следующая формула замены переменной в интеграле Лебега:*

$$\int\limits_{D\setminus\Sigma} u(\varphi(x))|\det D\varphi(x)|\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{x \in \varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma} u(x)\, dy; \tag{13}$$

5) *если одна из функций*

$$D \setminus \Sigma \ni x \mapsto (u \circ \varphi)(x)|\det D\varphi(x)| \quad \text{или} \quad \mathbb{R}^n \ni y \mapsto u(y)\mathscr{N}(y, \varphi, D \setminus \Sigma)$$

интегрируема, то и другая интегрируема и верна формула

$$\int\limits_{D\setminus\Sigma} u(\varphi(x))|\det D\varphi(x)|\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y)\mathscr{N}(y, \varphi, D \setminus \Sigma)\, dy. \tag{14}$$

Замечание 15. Так как $\mathscr{H}^n(\Sigma) = 0$ в формулах (13) и (14), то в левых частях этих формул интегрирование по $D \setminus \Sigma$ можно заменить интегрированием по D, так что вместе с (14) верна также формула

$$\int\limits_D u(\varphi(x))|\det D\varphi(x)|\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y)\mathscr{N}(y, \varphi, D \setminus \Sigma)\, dy.$$

Последняя формула другим способом доказана в [53].

Замечание 16. Заметим, что всякое отображение $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$ при $q > n$ (гомеоморфизм $\varphi \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$) обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина (см. [54–56]).

Определение 17. Пусть $\varphi : D \to D'$ — гомеоморфизм евклидовых областей в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Пример 12 показывает, что D можно представить в виде объединения трех дизъюнктных борелевских множеств: $D = Z \cup \Sigma \cup (D \setminus (Z \cup \Sigma))$, где

1) Z содержит множество $\{x \in D : J_\varphi(x) = 0\}$ нулей объемной производной, и отличается от него на множество меры нуль: $\mathscr{H}^n(Z \setminus \{x \in D : J_\varphi(x) = 0\}) = 0$,

2) $\Sigma \subset D$ — множество сингулярности, т. е. множество, образ $\varphi(\Sigma)$ которого имеет положительную меру,

3) $D \setminus (Z \cup \Sigma)$ — множество, на котором отображение φ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина и во всех точках которого верно неравенство $0 < J_\varphi(x) < \infty$.

Разложению области D соответствует разложение в образе:

$$D' = (D' \setminus (Z' \cup \Sigma')) \cup Z' \cup \Sigma',$$

где множества $Z' = \varphi(\Sigma)$, $\Sigma' = \varphi(Z)$ играют ту же роль для обратного гомеоморфизма $\varphi^{-1} : D' \to D$, что и множества Z, Σ для прямого гомеоморфизма φ (см. детали в [12, § 1]).

Кроме того, если $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ (или $\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$), то в [12, § 1] доказано, что

$$\mathscr{H}^n(\{x \in D : J_\varphi(x) = 0\}\Delta\{x \in D : \det D\varphi(x) = 0\}) = 0.$$

С учетом вышеизложенного с самого начала для отображений класса Соболева можно считать, что $Z \supset \{x \in D : \det D\varphi(x)) = 0\}$, $\mathscr{H}^n(Z \setminus \{x \in D : \det D\varphi(x) = 0\}) = 0$ и $\det D\varphi(x) \neq 0$ на множестве $D \setminus (Z \cup \Sigma)$.

Ниже будем применять введенные здесь обозначения.

1.1. От минимального набора конденсаторов к локализации функции искажения. В этом разделе покажем, что локализация функции искажения в теореме 3 может быть получена из набора только кубических конденсаторов. Другими словами, докажем, что если условие (2) выполняется только для кубических конденсаторов, то выполняются также и утверждения 1 и 3 теоремы 3. Этот подход контрастирует с классическими традициями в теории квазиконформных отображений, в которой в качестве минимального набора обычно рассматриваются сферические конденсаторы (см. [27]).

В следующей теореме в качестве системы открытых множеств $\mathscr{O}_c(D')$, на которых определена квазиаддитивная функция множества Ψ, рассматривается минимальная система открытых множеств в D' (см. определение 6), содержащая:

1) D';

2) всякий открытый куб Q, если $\overline{Q} \subset D'$;

3) дополнение $Q_2 \setminus \overline{Q}_1$, если $Q_1, Q_2 \subset D'$ — два куба с общим центром и $Q_1 \subset Q_2$.

В качестве ограниченной квазиаддитивной функции множества рассматривается отображение $\Phi : \mathscr{O}_c(D') \to [0, \infty)$.

Теорема 18. *Пусть заданы гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и весовая локально суммируемая функция $\omega : D' \to (0, \infty)$.*

Если для любого кубического конденсатора $E = (\overline{Q(y,r)}, Q(y,R)) \subset D'$ с прообразом $\varphi^{-1}(E) = (\varphi^{-1}(Q(y,r)), \varphi^{-1}(Q(y,R)))$ в D выполняется неравенство

$$\operatorname{cap}^{\frac{1}{q}}\big(\varphi^{-1}(E); L^1_q(D)\big) \leq \begin{cases} K_p \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\big(E; L^1_p(D';\omega)\big), & 1 < q = p < \infty, \\ \Psi_{q,p}^{\frac{1}{\sigma}}(U \setminus F) \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\big(E; L^1_p(D';\omega)\big), & 1 < q < p < \infty, \end{cases}$$

где $\Psi_{q,p}$ — некоторая ограниченная квазиаддитивная функция множества, определенная на системе $\mathscr{O}_c(D')$, то верны следующие утверждения.

1. *Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ принадлежит $W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$, имеет конечное искажение: $D\varphi(x) = 0$ $\mathscr{H}^n$-п. в. на множестве $Z = \{x \in D \mid J(x,\varphi) = 0\}$, и операторная функция искажения*

$$D \ni x \mapsto K^{1,\omega}_{q,p}(x,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}\omega^{\frac{1}{p}}(\varphi(x))}, & \text{если } \det D\varphi(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \det D\varphi(x) = 0, \end{cases}$$

принадлежит $L_\sigma(D)$, где σ определяется соотношениями $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, если $1 < q < p < \infty$, и $\sigma = \infty$, если $1 < q = p < \infty$; более того,

$$K^{1,\omega}_{q,p}(x,\varphi) \leq \begin{cases} 7^{\frac{n}{p}} n K_p^p & \text{при } 1 < q = p < \infty, \\ 7^{\frac{n}{q}} n \Psi'(\varphi(x))^{\frac{1}{\sigma}} & \text{при } 1 < q < p < \infty \end{cases}$$

для $\mathscr{H}^n$-п. в. $x \in D \setminus (Z \cup \Sigma)$.

2. *Оператор композиции* $\varphi^* : L^1_p(D';\omega)\cap \operatorname{Lip}_l(D') \to L^1_q(D)$, $1\le q\le p<\infty$, *ограничен*; *более того*,

$$\|\varphi^*\| \le \left\|K^{1,\omega}_{q,p}(\cdot)\mid L_\sigma(\varphi^{-1}(A))\right\| \le \begin{cases} 7^{\frac{n}{p}} nK_p & \text{в случае } 1<q=p<\infty,\\ 7^{\frac{n}{q}} n\Psi(D')^{\frac{1}{\sigma}} & \text{в случае } 1<q<p<\infty; \end{cases}$$

квазиаддитивная функция

$$D'\supset A\mapsto \widetilde{\Psi}_{q,p}(A)=\left\|K^{1,\omega}_{q,p}(\cdot)\mid L_\sigma(\varphi^{-1}(A))\right\|^\sigma$$

удовлетворяет следующим соотношениям:

(*a*) $\widetilde{\Psi}_{q,p}(U)\le 7^{\frac{n\sigma}{q}} n^\sigma \Psi(U)$ *для любого открытого множества* $U\in \mathscr{O}_c(D')$,

(*b*) $\|\varphi^*_A\|\le \Psi^{\frac{1}{\sigma}}_{q,p}(A)$, *где* $\|\varphi^*_A\|$ — *норма оператора* $\varphi^*_A : L^1_p(A;\omega)\cap \operatorname{Lip}_l(A)\to L^1_q(\varphi^{-1}(A))$, $A\subset D'$ — *открытое множество.*

3. *Для любого конденсатора* $E=(F_1,F_0)$ *в* D' *с прообразом* $\varphi^{-1}(E)=(\varphi^{-1}(F_1),\varphi^{-1}(F_0))$ *в* D' *выполняется неравенство*

$$\operatorname{cap}^{\frac{1}{q}}\big(\varphi^{-1}(E);L^1_q(D)\big) \le \begin{cases} 7^{\frac{n}{p}} nK_p \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\big(E;L^1_p(D';\omega)\big), & 1<q=p<\infty,\\ 7^{\frac{n}{q}} n\Psi^{\frac{1}{\sigma}}_{q,p}(D'\setminus(F_0\cup F_1))\operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\big(E;L^1_p(D';\omega)\big), & 1<q<p<\infty. \end{cases}$$

4. *Между классами гомеоморфизмов имеет место совпадение:*

$$Q\mathscr{R}Q_{q,p}(D',D;\omega)=\mathscr{Q}_{q,p}(D',D;\omega).$$

5. *Утверждения теоремы* 18 *справедливы также и в случае* $1=q\le p<\infty$, $n=2$.

Доказательство. Фиксируем куб $Q(y,r)\Subset D'$ и рассмотрим тестовую функцию $u(z)=(r-|z-y|_\infty)^+$. Эта функция, очевидно, удовлетворяет условиям леммы 2.3 из [12]. По ее заключению имеем $u\circ\varphi\in L^1_q(\varphi^{-1}(U))$ и

$$\begin{aligned}\left\|u\circ\varphi\mid L^1_q(\varphi^{-1}(Q(y,r)))\right\| \\ \le \begin{cases} K_p\left\|u\mid L^1_p(Q(y,r);\omega)\right\| = K_p\omega(Q(y,r))^{\frac{1}{p}}, & \text{если } q=p,\\ \Psi(Q(y,r))^{\frac{1}{\sigma}}\left\|u\mid L^1_p(Q(y,r);\omega)\right\| = \Psi(Q(y,r))^{\frac{1}{\sigma}}\omega(Q(y,r))^{\frac{1}{p}}, & \text{если } q<p,\end{cases}\end{aligned} \tag{15}$$

где $\omega(Q(y,r))=\int\limits_{Q(y,r)}\omega(z)\,dz$ — весовая мера куба $Q(y,r)$.

Фиксируем произвольное натуральное число $1\le j\le n$. Зададим в кубе $Q(y,r)$ n-мерный открытый тетраэдр

$$T_jQ(y,r)=\{z\in Q(y,r): y_j-r<z_j<y_j,\ |z_j-y_j|>\max_{l\ne j}|z_l-y_l|\}.$$

Заметим, что на прообразе $\varphi^{-1}(T_jQ(y,r))$ композиция $u\circ\varphi$ равна $r+\varphi_j(x)-y_j$. Из (15) выводим, что $\varphi_j\in L^1_q(\varphi^{-1}(T_jQ(y,r)))$.

Пусть $z=y-\frac{3}{4}e_j$, где e_j — j-й вектор стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$. При таком выборе точки z имеем включения

$$Q(z,r/4)\subset T_jQ(y,r)\subset Q(y,r)\subset Q(z,7r/4).$$

С каждой точкой $z\in W$, где W — произвольное компактно вложенное в D' открытое множество: $W\Subset D'$, ассоциируем куб $Q(z,r/4)$ такой, что $Q(z,2r)\Subset$

D'. С учетом (15) имеем

$$\begin{gathered}\left\|\nabla\varphi_j \mid L^1_q(\varphi^{-1}(Q(z,r/4)))\right\| \le \left\|u\circ\varphi \mid L^1_q(\varphi^{-1}(Q(y,r)))\right\| \\ \le \begin{cases} K_p\omega(Q(y,r))^{\frac1p} \\ \Psi(Q(y,r))^{\frac1\sigma}\omega(Q(y,r))^{\frac1p}\end{cases} \le \begin{cases} K_p\omega(Q(z,7r/4))^{\frac1p}, & \text{если } q=p, \\ \Psi(Q(z,7r/4))^{\frac1\sigma}\omega(Q(z,7r/4))^{\frac1p}, & \text{если } q<p,\end{cases}\end{gathered} \tag{16}$$

$j=1,\dots,n$. Так как любое компактное множество в D' может быть покрыто конечным набором кубов вида $Q(z,r/4)$, из (16) выводим следующие свойства:

1) $\varphi_j \in L^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$;

2) $\varphi \in L^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$, так как число $1\le j\le n$ произвольное.

Покажем, что

3) $\nabla\varphi_j(x)=0$ в $\mathscr{H}^n$-п. в. точках множества $\varphi^{-1}(E)$, где E — множество нулевой меры в D', $1\le j\le n$.

Достаточно проверить свойство 3 для множества $E\subset D'$ нулевой меры такого, что $\operatorname{diam} E<\infty$ и $\operatorname{dist}(E,\mathbb{R}^n\setminus D')>0$. Существует ограниченное открытое множество $V\Subset D'$ такое, что $E\subset V$ и $\mathscr{H}^n(V)<\varepsilon$ для наперед заданного $\varepsilon>0$. Применяя теорему Безиковича [50] к открытому множеству V, по аналогии с [57] найдем счетный набор $\mathscr{W}=\{Q_k\}$ кубов $Q_k=Q_k(z_k,r_k)$ таких, что

(a) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k = V$;

(b) для $Q_k=Q_k(z_k,r_k)\in\mathscr{W}$ верно условие $|z_k-\mathbb{R}^n\setminus V|_\infty = 32r_k$, где $|x-F|_\infty=\inf\limits_{y\in F}|x-y|_\infty$ — расстояние от точки x до множества $F\ne\varnothing$;

(c) семейство $\mathscr{W}$ можно разбить на конечное число N_n (зависящее только от размерности n) подсемейств таких, что внутри каждого из них кубы не пересекаются; аналогичное свойство справедливо и для семейства кубов $\mathscr{W}^*=\{8Q_k=Q_k(z_k,8r_k)\}$.

В соответствии с последним свойством последовательность $\{8Q_k\}$ можно разбить на N_n подсемейств $\{8Q_{1m}\}_{m=1}^\infty,\ \dots,\{8Q_{N_nm}\}_{m=1}^\infty$ так, что внутри каждого подсемейства кубы дизъюнктны: $8Q_{km}\cap 8Q_{kl}=\varnothing$, если $m\ne l$, $k=1,\dots,N_n$.

Применим последнее свойство для оценки левого интеграла в (16) при $q=p$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\varphi^{-1}(V)}|\nabla\varphi_j(x)|^p\,dx &\le \sum_{k\in\mathbb{N}}\ \int\limits_{\varphi^{-1}(Q_k(z_k,r_k))}|\nabla\varphi_j(x)|^p\,dx \\ &\le K_p^p\sum_{k\in N_n}\sum_{m\in\mathbb{N}}\omega(8Q_{km}) \le N_nK_p^p\omega(V).\end{aligned}$$

Так как ε — произвольное число, а интеграл Лебега суммируемой функции абсолютно непрерывен, свойство 3 в случае $q=p$ доказано.

Случай $q<p$ потребует применения неравенства Гёльдера: из (16) выводим

$$\begin{gathered}\int\limits_{\varphi^{-1}(V)}|\nabla\varphi_j(x)|^q\,dx \le \sum_{k\in\mathbb{N}}\ \int\limits_{\varphi^{-1}(Q_k(z_k,r_k))}|\nabla\varphi_j(x)|^q\,dx \\ \le \sum_{k\in N_n}\sum_{m\in\mathbb{N}}\Psi(8Q_{km})^{\frac q\sigma}\omega(8Q_{km})^{\frac qp} \le \sum_{k\in N_n}\Bigl(\sum_{m\in\mathbb{N}}\Psi(8Q_{km})\Bigr)^{\frac q\sigma}\Bigl(\sum_{m\in\mathbb{N}}\omega(8Q_{km})\Bigr)^{\frac qp} \\ \le \sum_{k\in N_n}\Psi(D')^{\frac q\sigma}\omega(V)^{\frac qp} \le N_n\Psi(D')^{\frac q\sigma}\omega(V)^{\frac qp}.\end{gathered}$$

По причине, описанной выше, свойство 3 в случае $q<p$ тоже доказано.

4. Отображение φ имеет конечное искажение: $D\varphi(x) = 0$ в $\mathscr{H}^n$-п. в. точках множества Z (поскольку по формуле (14) имеем $\mathscr{H}^n(\varphi(Z \setminus \Sigma)) = 0$, где $\Sigma \subset D$ — множество сингулярности отображения φ меры нуль).

5. Из включений $Q(z,r) \subset T_j Q(y,4r) \subset Q(y,4r) \subset Q(z,7r)$ и оценки (16) с помощью формулы замены переменной (14) и свойства 3 выводим соотношение

$$\int\limits_{Q(z,r)} \frac{|\nabla\varphi_j(\varphi^{-1}(y))|^q}{J(\varphi^{-1}(y),\varphi)} \chi_{D'\setminus\varphi(\Sigma)}(y)\,dy \le \begin{cases} K_p^p \omega(Q(z,7r)), & 1 \le q = p < \infty, \\ \Psi(Q(z,7r))^{\frac{q}{\sigma}} \omega(Q(z,7r))^{\frac{q}{p}}, & 1 \le q < p < \infty, \end{cases}$$

где $J(x,\varphi)$ — якобиан отображения φ. Остается поделить обе части последнего неравенства на $\mathscr{H}^n(Q(z,7r))$, учесть равенство $\frac{q}{\sigma} + \frac{q}{p} = 1$ и перейти к пределу при $r \to 0$ по предложению 11 и теореме Лебега о дифференцировании интеграла (см. пример 13). В пределе для $\mathscr{H}^n$-п. в. $z \in D' \setminus \varphi(\Sigma)$ получаем поточечное соотношение

$$\frac{|\nabla\varphi_j(\varphi^{-1}(z))|}{J(\varphi^{-1}(z),\varphi)^{\frac{1}{q}} \omega(z)^{\frac{1}{p}}} \le \begin{cases} 7^{\frac{n}{p}} K_p^p, & 1 \le q = p < \infty, \\ 7^{\frac{n}{q}} \Psi'(z)^{\frac{1}{\sigma}}, & 1 \le q < p < \infty. \end{cases}$$

С учетом неравенства $|D\varphi(x)| \le \sum\limits_{j=1}^{n} |\nabla\varphi_j(x)|$ приходим к заключению, что при $q = p$ функция искажения $D \ni x \mapsto K_{p,p}^{1,\omega}(x,\varphi)$ (см. (3)) ограничена постоянной $7^{\frac{n}{p}} n K_p^p$, а при $q < p$ имеем неравенство

$$\left(\frac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{q}} \omega^{\frac{1}{p}}(\varphi(x))}\right)^{\sigma} |\det D\varphi(x)| \le 7^{\frac{n\sigma}{q}} n^{\sigma} \Psi'(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)|$$

для п. в. точек $x \in D \setminus (Z \cup \Sigma)$. Интегрируя левую и правую части полученного соотношения по множеству $D \setminus (Z \cup \Sigma)$ и заменяя переменную в правой части, по формуле (14) выводим

$$\left\| K_{q,p}^{1,\omega}(\cdot) \mid L_\sigma(D) \right\| \le 7^{\frac{n}{q}} n \Psi^{\frac{1}{\sigma}}(D'). \tag{17}$$

Утверждение 1 теоремы 18 доказано.

Оценка (17) означает, что выполнены условия утверждения 3 теоремы 3. Следовательно, по теореме 3 справедливо утверждение 2 теоремы 18. Импликация 2 $\Rightarrow$ 3 теоремы 18 — это импликация 1 $\Rightarrow$ 2 в теореме 3 (см. детали в [12]).

Из утверждения 3 теоремы 18 выводим утверждение 4.

Утверждение 5 теоремы 18 доказывается так же, как в теореме 9. $\square$

§ 2. Непрерывные открытые дискретные отображения класса $\mathscr{Q}_{q,p}$, их свойства и аналитическое описание

Наша ближайшая цель — получить свойства отображений $f \in S\mathscr{R}Q_{q,p}(D', D; \omega)$ или $f \in \mathscr{R}Q_{q,p}(D', D; \omega)$, которые можно вывести непосредственно из определения 5.

Для доказательства теорем этого параграфа понадобятся некоторые вспомогательные утверждения, которые докажем в следующем разделе.

2.1. Вспомогательные соотношения. Всякая локально суммируемая функция $\omega : D' \to (0,\infty)$, $D' \subset \mathbb{R}^n$, задает весовую меру измеримого множества

$A \subset D'$ по правилу

$$\omega(A) = \int\limits_A \omega(y)\,dy.$$

Лемма 19. *При $1 \le p < \infty$ для конденсатора $E = (F, U)$ в D' справедлива оценка сверху*

$$\operatorname{cap}\bigl(E; L^1_p(U;\omega)\bigr) \le \frac{\omega(U \setminus F)}{\operatorname{dist}(F, \partial U)^p},$$

где $\operatorname{dist}(F, \partial U)$ — евклидово расстояние между множеством F и границей множества U.

Доказательство. Положим $r = \operatorname{dist}(F, \partial U)$. В качестве допустимой функции для емкости $\operatorname{cap}\bigl(E; L^1_p(U;\omega)\bigr)$ рассмотрим функцию

$$u(y) = \max\left(0, 1 - \frac{\operatorname{dist}(y, F)}{r}\right).$$

Действительно, $u(y) = 1$ в точках $y \in F$, $u(y) = 0$ в точках $y \notin U$ и $|\nabla u(y)| \le r^{-1}$ для п. в. $y \in U$. Следовательно,

$$\operatorname{cap}\bigl(E; L^1_p(U;\omega)\bigr) \le \int\limits_{U\setminus F} |\nabla u(y)|^p \omega(y)\,dy \le r^{-p}\omega(U \setminus F). \quad \square$$

Лемма 20. *Пусть $n-1 < q < \infty$, если $n \ge 3$, или $1 \le q < \infty$, если $n = 2$. Для конденсатора $E = (F, U)$ в D при условии связности множества F имеет место неравенство*

$$\operatorname{cap}^{n-1}\bigl(E; L^1_q(U)\bigr) \ge c_1^{n-1} \frac{(\operatorname{diam} F)^q}{\mathscr{H}^n(U)^{q-(n-1)}}, \tag{18}$$

где c_1 — постоянная в неравенстве Морри (см. ниже (19)), зависящая только от n и q.

Доказательство. В случае $n = 2$, $q = 1$ неравенство (18) является следствием свойства: *1-емкость любого конденсатора $E = (F, U) \subset \mathbb{R}^2$ равна $\operatorname{cap}\bigl(E; L^1_1(U)\bigr) = \inf\limits_{\gamma} \mathscr{H}^1(\gamma)$, где $\mathscr{H}^1(\gamma)$ обозначает $\mathscr{H}^1$-меру (длину) гладкой замкнутой кривой $\gamma \subset U$, у которой ограниченная компонента связности дополнения $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ содержит F, и нижняя грань берется по всем таким кривым γ* [51]. Очевидно, что $\inf\limits_{\gamma} \mathscr{H}^1(\gamma) \ge \operatorname{diam} F$.

Далее применим в модифицированной форме метод из [18, лемма 5]. Поскольку левая и правая части доказываемого неравенства инвариантны относительно движений и имеют одинаковую степень однородности относительно гомотетий, достаточно доказать лемму в том случае, когда $\operatorname{diam} F$ равен расстоянию между точками $0, T \in F$, причем точка T находится на x_n-й оси: $T = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Таким образом, $\operatorname{diam} F = |T| = 1$. Следовательно, любая плоскость P_A размерности $n-1$, перпендикулярная x_n-й оси и проходящая через точку $A = (0, 0, \dots, 0, a_n)$, $0 < a_n < 1$, пересекает F в некоторой точке x_A. Обозначим символом

$$B_A = B(x_A, \operatorname{dist}(x_A, (\mathbb{R}^n \backslash U) \cap P_A))$$

максимальный $(n-1)$-мерный шар с центром в точке x_A, находящийся в пересечении $U \cap P_A$.

Всякая функция $u \in L^1_p(U) \cap \operatorname{Lip}_l(U)$, $u = 1$ на F, носитель которой содержится в U, принимает на сфере

$$S(x_A, \operatorname{dist}(x_A, (\mathbb{R}^n \backslash U) \cap P_A)) \cap P_A$$

значение 0. Поэтому, записывая точку $x \in P_A$ в виде $x = (\xi, a_n)$, воспользуемся для $\mathscr{H}^1$-п. в. $a_n \in (0,1)$ неравенством Морри [50, разд. 4.5.3] в следующем виде:

$$\int\limits_{P_A \cap U} |\nabla u(\xi, a_n)|^q \, d\xi \geq c_1 \mathscr{H}^{n-1}(B_A)^{1-\frac{q}{n-1}}, \tag{19}$$

где мера хаусдорфа $\mathscr{H}^{n-1}(B_A)$ совпадает с $(n-1)$-мерной Лебега шара B_A, а c_1 — постоянная, зависящая лишь от n и q. Применяя ко второму интегралу в первой строки неравенство Гёльдера с показателями $\frac{q}{q-(n-1)}$ и $\frac{q}{n-1}$, выводим

$$(\operatorname{diam} F)^q = \left(\int\limits_0^1 da_n\right)^q = \left(\int\limits_0^1 \mathscr{H}^{n-1}(B_A)^{\frac{q-(n-1)}{q}} \cdot \mathscr{H}^{n-1}(B_A)^{\frac{n-1-q}{q}} \, da_n\right)^q$$

$$\leq \left(\int\limits_0^1 \mathscr{H}^{n-1}(B_A) \, da_n\right)^{q-(n-1)} \left(\int\limits_0^1 \mathscr{H}^{n-1}(B_A)^{1-\frac{q}{n-1}} \, da_n\right)^{n-1} \tag{20}$$

$$\leq \frac{1}{c_1^{n-1}} \mathscr{H}^n(U)^{q-(n-1)} \left(\int\limits_U |\nabla u(x)|^q \, dx\right)^{n-1}. \tag{21}$$

В переходе от (20) к (21) для оценки сверху первого интеграла в (20) применяется формула Кавальери — Лебега. Отсюда получаем (18). $\square$

2.2. Свойства непрерывных открытых дискретных отображений класса $S\mathscr{R}Q_{q,p}$. В этом разделе основная цель — получить свойства отображений $f \in S\mathscr{R}Q_{q,p}(D', D; \omega)$, которые можно вывести непосредственно из определения 5.

Теорема 21. *Пусть $n-1 < q < \infty$, если $n \geq 3$, или $1 \leq q < \infty$, если $n = 2$. Непрерывное открытое дискретное отображение $f : D' \to D$ класса $S\mathscr{R}Q_{q,p}(D', D; \omega)$ при $q \leq p < \infty$ обладает следующими свойствами:*

1) *отображение f дифференцируемо $\mathscr{H}^n$-п. в. в области D';*
2) *f имеет конечное искажение;*
3) *справедливы поточечная оценка*

$$|Df(y)| \leq c_2 \begin{cases} K_p^{n-1} \cdot |\det Df(y)|^{\frac{p-(n-1)}{p}} \omega(y)^{\frac{n-1}{p}} & \text{при } q = p, \\ (\Psi'_{q,p}(y))^{\frac{n-1}{\sigma}} |\det Df(y)|^{\frac{q-(n-1)}{q}} \omega(y)^{\frac{n-1}{p}} & \text{при } q < p \end{cases} \tag{22}$$

для $\mathscr{H}^n$-п. в. $y \in D'$ с постоянной $c_2 = 2^n \alpha(n) c_1^{\frac{1-n}{q}}$, где $\alpha(n) = \mathscr{H}^n(B(0,1)) = \Gamma\big(\frac{1}{2}\big)^n / \Gamma\big(\frac{n}{2}+1\big)$ (здесь $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$), и для любого открытого множества $U \subset D'$ вытекающие из нее соотношения

$$\int\limits_U |Df(y)| \, dy \leq c_3 \cdot \begin{cases} K_p^{n-1} \cdot \mathscr{H}^n(f(U))^{\frac{p-(n-1)}{p}} \cdot \omega(U)^{\frac{n-1}{p}} & \text{при } q = p, \\ \Psi_{q,p}(U)^{\frac{n-1}{\sigma}} \cdot \mathscr{H}^n(f(U))^{\frac{q-(n-1)}{q}} \cdot \omega(U)^{\frac{n-1}{p}} & \text{при } q < p \end{cases} \tag{23}$$

с постоянной $c_3 = c_2 \cdot \mathscr{N}(f, U)^{\frac{q-(n-1)}{q}}$.

Доказательство. **I.** На шаге 1 установим дифференцируемость отображения f. Воспользуемся схемой доказательства из [58] для случая $q = p = n$ ([59, лемма 1] при $n-1 < q < p = n$), $\omega \equiv 1$ (другой способ доказательства получен в [9, теорема 2]). С каждой точкой $y \in D'$ свяжем сферический конденсатор $E_r = (\overline{B(y,r)}, B(y, 2r))$, где $B(y, 2r) \subset D'$. Учитывая определение класса $\mathscr{Q}_{q,p}(D',D;\omega)$ при $q<p$ и лемму 19, получаем (для рассматриваемого класса отображений образ конденсатора тоже конденсатор)

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}^{\frac{1}{q}}\bigl(f(E_r);L^1_q(f(B(y,2r)))\bigr)&\le \Psi_{q,p}(B(y,2r))^{\frac{1}{\sigma}}\operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\bigl(E_r;L^1_p(U;\omega)\bigr)\\&\le \Psi_{q,p}(B(y,2r))^{\frac{1}{\sigma}}\frac{\omega(B(y,2r))^{\frac{1}{p}}}{r}\end{aligned}$$

(при $q=p$ вместо $\Psi_{q,p}(B(y,2r))^{\frac{1}{\sigma}}$ следует написать K_p).

Используя для оценки емкости слева лемму 20:

$$\operatorname{cap}^{\frac{1}{q}}\bigl(f(E_r);L^1_q(f(B(y,2r)))\bigr)\ge c_1^{\frac{1}{q}}\frac{(\operatorname{diam} f(\overline{B(y,r)}))^{\frac{1}{n-1}}}{\mathscr{H}^n(f(B(y,2r)))^{\frac{q-(n-1)}{q(n-1)}}},$$

выводим

$$\begin{aligned}&\frac{\operatorname{diam} f(\overline{B(y,r)})}{r}\\&\qquad\le\frac{2^nc_1^{\frac{1-n}{q}}}{(2r)^n}\Psi_{q,p}(B(y,2r))^{\frac{n-1}{\sigma}}\mathscr{H}^n(f(B(y,2r)))^{\frac{q-(n-1)}{q}}\omega(B(y,2r))^{\frac{n-1}{p}}.\end{aligned}$$

Устремляя $r\to 0$, для $\mathscr{H}^n$-п. в. $y\in D'$ имеем

$$\varlimsup_{z\to y}\frac{|f(z)-f(y)|}{|z-y|}\le 2^n\alpha(n)c_1^{\frac{1-n}{q}}(\Psi'_{q,p}(y))^{\frac{n-1}{\sigma}}\overline{\mathscr{V}}'_n(y)^{\frac{q-(n-1)}{q}}\omega(y)^{\frac{n-1}{p}},\tag{24}$$

где значения $\overline{\mathscr{V}}'_n(y)$ и $\Psi'_{q,p}(y)$, выраженные в (12) и предложении 11, часть **I**, конечны $\mathscr{H}^n$-п. в. в D'. Поскольку правая часть (24) конечна $\mathscr{H}^n$-п. в. в D', по теореме Степанова (см., например, [49, 50]) отображение f дифференцируемо $\mathscr{H}^n$-п. в. в D'. Известно, что в точках дифференцируемости отображения f левая часть в (24) равна $|Df(y)|$, а $\overline{\mathscr{V}}'_n(y)=|\det Df(y)|$ (см., например, [49]).

В неравенствах (24), а также (26) и неравенстве в п. II доказательства (см. ниже) в случае $q=p$ вместо $(\Psi'_{q,p}(\cdot))^{\frac{n-1}{\sigma}}$ следует написать K_p^{n-1}.

II. С учетом вышеизложенного перепишем неравенство (24) следующим образом:

$$|Df(y)|\le c_2(\Psi'_{q,p}(y))^{\frac{n-1}{\sigma}}|\det Df(y)|^{\frac{q-(n-1)}{q}}\omega(y)^{\frac{n-1}{p}},$$

где $c_2=2^n\alpha(n)c_1^{\frac{1-n}{q}}$. Отсюда выводим поточечную оценку (22). Далее, очевидно, верно следующее: $Df(y)=0$ $\mathscr{H}^n$-п. в. на множестве $Z'=\{y\in D':\det Df(y)=0\}$ нулей якобиана $\det Df(y)$. Следовательно, f имеет конечное искажение.

III. Для доказательства неравенства (23) следует проинтегрировать (22) и применить неравенство Гёльдера с учетом $\frac{p-(n-1)}{p}+\frac{n-1}{p}=1$ при $q=p$ или $\frac{n-1}{\sigma}+\frac{q-(n-1)}{q}+\frac{n-1}{p}=1$ при $q<p$:

$$\int\limits_U|Df(y)|\,dy\le c_2\biggl(\int\limits_U|\det Df(y)|\,dy\biggr)^{\frac{q-(n-1)}{q}}\biggl(\int\limits_U\Psi'_{q,p}(y)\,dy\biggr)^{\frac{n-1}{\sigma}}\biggl(\int\limits_U\omega(y)\,dy\biggr)^{\frac{n-1}{p}}.$$

Поскольку $\int\limits_U|\det Df(y)|\,dy\le\mathscr{N}(f,U)\mathscr{H}^n(f(U))$ и $\int\limits_U\Psi'_{q,p}(y)\,dy\le\Psi_{q,p}(U)$ (см. пример 12 и предложение 11), выводим (23).

Таким образом, $|Df(y)|$ локально суммируема в D'. $\square$

Замечание 22. В приведенном выше доказательстве вместо неравенств (9) используются более слабые соотношения

$$\begin{cases} \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\big(f(E_r); L^1_p(D)\big) \leq K_p A(r,\omega), & \text{если } q = p, \\ \operatorname{cap}^{\frac{1}{q}}\big(f(E_r); L^1_q(D)\big) \leq \Psi_{q,p}(B(y,2r)\setminus \overline{B(y,r)})^{\frac{1}{\sigma}} A(r,\omega), & \text{если } q < p, \end{cases}$$

где

$$A(r,\omega) = \Bigg(\int\limits_{B(y,2r)} |\nabla u(y)|^p \omega(y)\,dy\Bigg)^{\frac{1}{p}}, \quad E_r = (\overline{B(y,r)}, B(y,2r)),$$

а $u(y) = \max\big(0, 1 - \frac{\operatorname{dist}(y,\overline{B(y,r)})}{r}\big)$ — тестовая функция для оценки емкости $\operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}(E_r)$ сверху (см. лемму 19).

2.3. Свойства регулярности непрерывных открытых дискретных отображений класса $\mathscr{R}Q_{q,p}$. В этом разделе продолжим исследование свойств регулярности отображений класса $\mathscr{R}Q_{q,p}$: будут указаны условия, при выполнении которых отображение $f \in \mathscr{R}Q_{q,p}(D',D;\omega)$ принадлежит классу Соболева. Заметим, что метод доказательства обобщает классический подход и неоднократно применялся многими авторами в частных случаях (см., например, безвесовой случай в [58] при $q = p = n$, [59] при $n-1 < q < p = n$; весовой случай в [60] при $q = p = n = 2$, [61] при $q = p = n$, [62] при $n-1 < q = p < \infty$ и др.).

Теорема 23. *Пусть $n-1 < q < \infty$, если $n \geq 3$, или $1 \leq q < \infty$, если $n = 2$. Всякое непрерывное открытое дискретное отображение $f : D' \to D$ семейства $\mathscr{R}Q_{q,p}(D',D;\omega)$, $q \leq p < \infty$,*

1) *принадлежит классу Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$;*
2) *имеет конечное искажение*;
3) *дифференцируемо $\mathscr{H}^n$-п. в. в области D';*
4) *удовлетворяет оценкам* (22) *и* (23).

Доказательство. Свойства 2–4 отображения $f \in \mathscr{Q}_{q,p}(D',D;\omega)$ при $q \leq p < \infty$, где $n-1 < q < \infty$, если $n \geq 3$, или $1 \leq q < \infty$, если $n = 2$, доказаны в теореме 21.

Остается доказать свойство 1. Проверим, что $f \in \mathrm{ACL}(D')$. С учетом локальной суммируемости частных производных (см. (24)) получим требуемое (см. эквивалентное описание функций $f \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$ в [51, § 1.1.3, теоремы 1, 2]).

Для доказательства $f \in \mathrm{ACL}(D')$ возьмем произвольный n-мерный открытый куб P, $P \Subset D'$, с ребрами, параллельными координатным осям, и покажем, например, что f абсолютно непрерывно на $\mathscr{H}^{n-1}$-п. в. сечениях куба P прямыми, параллельными оси x_j, $j = 1,\dots,n$. Поскольку существует не более чем счетный набор кубов указанного выше вида, докажем абсолютную непрерывность отображения f на пересечении $\mathscr{H}^{n-1}$-п. в. линий, параллельных оси x_j, с областью D'. Так как $j = 1,\dots,n$ произвольно, теорема будет доказана.

Пусть P_j — проекция P на подпространство $y_j = 0$, и I — проекция P на координатную ось y_j. Тогда $P = P_j \times I = \{(z,y_j) : z \in P_j,\ y_j \in I\}$.

Пусть $\Psi_{q,p}$ — квазиаддитивная функция в определении 5 отображения $f \in \mathscr{R}Q_{q,p}(D',D;\omega)$. Она порождает ограниченную квазиаддитивную функцию $\Psi_{q,p}(A,P)$ открытого множества $A \subset \mathscr{O}(P_j)$, $A \times I \in \mathscr{O}(P)$, по правилу: $\mathscr{O}(P_j) \ni A \mapsto \Psi_{q,p}(A,P) = \Psi_{q,p}(A \times I)$ (см. определение 6). В силу предложения 11 для

$\mathscr{H}^{n-1}$-п. в. точек $z \in P_j$ (т. е. для всех точек $z \in P_j \setminus \Sigma_0$, где $\Sigma_0 \subset P_j$ — некоторое множество нулевой $\mathscr{H}^{n-1}$-меры) существует конечная производная

$$\Psi'_{q,p}(z,P) = \lim_{r\to 0} \frac{\Psi_{q,p}\left(B_j(z,r),P\right)}{\mathscr{H}^{n-1}(B_j(z,r))},$$

где $B_j(z,r)) \subset P_j$ обозначает $(n-1)$-мерный шар с центром в точке z радиуса r.

Функция множества $\mathscr{V}_n$: $\mathscr{O}(P) \ni G \mapsto \mathscr{H}^n(f(G))$ является ограниченной монотонной $\varkappa$-квазиаддитивной функцией, определенной на открытых множествах $G \in \mathscr{O}(P)$, и порождает монотонную $\varkappa$-квазиаддитивную функцию

$$\mathscr{O}(P_j) \ni A \mapsto \mathscr{V}_n(A,P) = \mathscr{V}_n(A\times I) = \mathscr{H}^n(f(A\times I))$$

открытого множества $A \subset \mathscr{O}(P_j)$, $A \times I \in \mathscr{O}(P)$, с постоянной $\varkappa = \mathscr{N}(f,P)$. По предложению 11 $\overline{\mathscr{V}}'_n(z,P) < \infty$ для $\mathscr{H}^{n-1}$-п. в. точек $z \in P_j$, так что неравенство $\overline{\mathscr{V}}'_n(z,P) < \infty$ выполняется во всех точках $z \in P_j \setminus \Sigma'$, где $\Sigma' \subset P_j$ — некоторое множество нулевой $\mathscr{H}^{n-1}$-меры.

На сечении $I_z = \{z\} \times I$ куба P возьмем произвольные дизъюнктные отрезки $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ с длинами $b_1, b_2, \dots, b_k$ соответственно, все концевые точки которых рациональны. Очевидно, совокупность всех таких отрезков *счетная*.

Обозначим через U_i открытое множество $\bigcup\limits_{y\in\Delta_i} B(y,r)$. Пусть $r>0$ выбрано так, что открытые множества $U_1, U_2, \dots, U_k$ дизъюнктны и $U_i \subset P$, $i = 1, \dots, k$.

Рассмотрим конденсаторы $E_i = (\Delta_i, U_i)$. Тогда по лемме 19

$$\operatorname{cap}\left(E_i; L^1_p(U_i;\omega)\right) \le \frac{\omega(U_i)}{r^p} = \frac{\int\limits_{U_i} \omega(y)\,dy}{r^p}, \quad i = 1, \dots, k.$$

С другой стороны, при $n-1 < q < \infty$ из леммы 20 вытекает, что

$$\operatorname{cap}^{\frac{n-1}{q}}\left(f(E_i); L^1_q(U_i)\right) \ge c_1^{\frac{n-1}{q}} \frac{\operatorname{diam} f(\Delta_i)}{\mathscr{H}^n(f(U_i))^{\frac{q-(n-1)}{q}}}.$$

Из этих двух неравенств, учитывая условие $f \in \mathscr{R}Q_{q,p}(D',\omega)$, выводим

$$\operatorname{diam} f(\Delta_i) \le \frac{c_1^{\frac{1-n}{q}}}{r^{n-1}} \mathscr{H}^n(f(U_i))^{\frac{q-(n-1)}{q}} \left(\Psi_{q,p}(U_i)\right)^{\frac{n-1}{\sigma}} \omega(U_i)^{\frac{n-1}{p}}.$$

Суммируя по $i = 1, \dots, k$, применяя неравенство Гёльдера и используя свойства квазиаддитивных функций, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^k \operatorname{diam} f(\Delta_i) \\
&\qquad \le \frac{c_1^{\frac{1-n}{q}}}{r^{n-1}} \left(\sum_{i=1}^k \mathscr{H}^n(f(U_i))\right)^{\frac{q-(n-1)}{q}} \left(\sum_{i=1}^k \Psi_{q,p}(U_i)\right)^{\frac{n-1}{\sigma}} \left(\sum_{i=1}^k \omega(U_i)\right)^{\frac{n-1}{p}} \\
&\le c_4 \left(\frac{\mathscr{V}_n(B_j(z,r),P)}{\mathscr{H}^{n-1}(B_j(z,r))}\right)^{\frac{q-(n-1)}{q}} \left(\frac{\Psi_{q,p}(B_j(z,r),P)}{\mathscr{H}^{n-1}(B_j(z,r))}\right)^{\frac{n-1}{\sigma}} \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^k \omega(U_i)}{\mathscr{H}^{n-1}(B_j(z,r))}\right)^{\frac{n-1}{p}},
\end{aligned} \tag{25}$$

где $c_4 = 2^{n-1}\alpha(n-1)c_1^{\frac{1-n}{q}} \cdot \mathscr{N}(f,P)^{\frac{q-(n-1)}{q}}$, а $\alpha(n-1) = \mathscr{H}^{n-1}(B_j(0,1))$.

Устремляя r к 0, получаем следующее неравенство, справедливость которого при $\mathscr{H}^{n-1}$-п. в. $z \in P_j$ обусловлена существованием пределов в трех выражениях в скобках в соотношении (25) для $\mathscr{H}^{n-1}$-п. в. $z \in P_j$ (см. детали после формулы (26)):

$$\sum_{i=1}^{k}\operatorname{diam} f\,(\Delta_i)\le c_4(\overline{\mathscr{V}}'_n(z,P))^{\frac{q-(n-1)}{q}}(\Psi'_{q,p}(z,P))^{\frac{n-1}{\sigma}}\Biggl(\int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{k}\Delta_i}\omega(z,y_n)\,dy_j\Biggr)^{\frac{n-1}{p}}. \tag{26}$$

Первое частное в скобках (см. (25)) имеет конечный верхний предел во всех точках $z\in P_j\setminus\Sigma'$. Второе частное имеет конечный предел во всех точках $z\in P_j\setminus\Sigma_0$ (см. предложение 11) (здесь $\mathscr{H}^{n-1}(\Sigma_0)=\mathscr{H}^{n-1}(\Sigma')=0$). Третье выражение в скобках (см. (25)) тоже имеет конечный предел для $\mathscr{H}^{n-1}$-п. в. точек $z\in P_j$. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим отдельное слагаемое в третьем выражении в скобках в формуле (26), например, с номером i (из существования предела для каждого слагаемого можно получить существование предела и для конечного набора слагаемых). Напомним, что $U_i=\bigcup\limits_{y\in\Delta_i}B(y,r)$. По этой причине

$$U_i\subset(B_j(z,r)\times\Delta_i)\cup(B_j(z,r)\times\alpha)\cup(B_j(z,r)\times\beta), \tag{27}$$

где α, β в (27) суть промежутки на интервале $(\{z\}\times I)\cap U_i$ длины r, дополнительные к Δ_i. Применяя теорему Фубини, запишем выбранное выше слагаемое в следующем виде:

$$\frac{\omega(U_i)}{\mathscr{H}^{n-1}(B_j(z,r))}=\frac{1}{\mathscr{H}^{n-1}(B_j(z,r))}\int\limits_{U_i}\omega(y)\,dy=\int\limits_{\Delta_i}\omega(z,y_j)\,dy_j \tag{28}$$

$$+\frac{1}{\mathscr{H}^{n-1}(B_j(z,r))}\Biggl(\int\limits_{B_j(z,r)}\Biggl(\int\limits_{\Delta_i}\omega(w,y_j)\,dy_j-\int\limits_{\Delta_i}\omega(z,y_j)\,dy_j\Biggr)dw\Biggr)+\Re(r) \tag{29}$$

при $r\to 0$ (по теореме Фубини для всех точек $z\in P_j\setminus D_j$, где $\mathscr{H}^{n-1}(D_j)=0$, существует интеграл $\int\limits_{z\times I}\omega(z,y_j)\,dy_j$, который в тех же точках $z\in P_j$ гарантирует конечность интеграла в правой части (28)). По теореме Лебега о дифференцировании интеграла первое выражение в строке (29) стремится[6] к нулю для $\mathscr{H}^{n-1}$-п. в. $z\in P_j$, т. е. для всех $z\in P_j\setminus\Sigma_i$, за исключением некоторого множества $\Sigma_i\subset P_j$, имеющего $\mathscr{H}^{n-1}$-меру нуль. Остаточный член $\Re(r)$ в строке (29) неотрицательный и содержит два слагаемых, мажорируемых суммой

$$\frac{1}{\mathscr{H}^{n-1}(B_j(z,r))}\Biggl(\int\limits_{B_j(z,r)}\Biggl(\int\limits_{\alpha}\omega(w,y_j)\,dy_j+\int\limits_{\beta}\omega(w,y_j)\,dy_j\Biggr)dw\Biggr),$$

где α, β — промежутки на интервале $(\{z\}\times I)\cap U_i$ длины r, дополнительные к Δ_i. Поскольку интегралы во внутренних круглых скобках стремятся к нулю при $r\to 0$, то $\Re(r)=o(1)$ при $r\to 0$.

С учетом того, что набор отрезков $\{\Delta_i\}$ не более чем счетный, неравенство (26) доказано для всех точек $z\in P_j\setminus\Bigl(D_j\cup\Sigma'\cup\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}\Sigma_i\Bigr)$, где объединение $D_j\cup$

---

[6] Здесь теорема Лебега о дифференцировании интеграла применяется в следующем виде:

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\mathscr{H}^{n-1}(B_j(z,r))}\int\limits_{B_j(z,r)}\Biggl|\int\limits_{\Delta_i}\omega(w,y_j)\,dy_j-\int\limits_{\Delta_i}\omega(z,y_j)\,dy_j\Biggr|\,dw=0$$

для $\mathscr{H}^{n-1}$-п. в. точек $z\in P_j$.

$\Sigma' \cup \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \Sigma_i \subset P_j$ имеет $\mathscr{H}^{n-1}$-меру нуль.

Неравенство (26) показывает также, что абсолютная непрерывность отображения $f : \{z\} \times I \to D$ при фиксированном z обеспечена абсолютной непрерывностью интеграла $\int\limits_{\{z\}\times I} \omega(z, y_j)\, dy_j$ на промежутке I. Следовательно, неравенство (26) можно распространить на произвольный конечный (а следовательно, и счетный) набор отрезков $\{\Delta_i\}$ (не обязательно с рациональными концевыми точками).

Так как j может быть произвольным натуральным числом от 1 до n, абсолютная непрерывность отображения $f : D' \to D$ доказана. Отсюда с учетом (23) доказано также, что $f \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$ (см. детали в [51])[7]. $\square$

§ 3. Новые примеры гомеоморфизмов класса $\mathscr{Q}_{q,p}$

В этом параграфе добавим к теореме 9 новые примеры $\mathscr{Q}_{q,p}(D', D; \omega)$-гомеоморфизмов и установим некоторые их новые свойства.

Пример 24. Пусть $\varphi : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $1 < p < \infty$ при $n \geq 3$ и $1 \leq p < \infty$ при $n = 2$, имеющий конечное искажение. Обратный гомеоморфизм $f = \varphi^{-1} : D' \to D$ принадлежит классу $\mathscr{Q}_{p,p}(D', D; \omega)$ с постоянной $K_p = 1$ и с весовой функцией (30) (см. ниже).

Чтобы проверить справедливость примера 24, докажем несколько свойств, представляющих независимый интерес. Во-первых, справедлива

Теорема 25. *Пусть $\varphi : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $1 \leq p < \infty$, имеющий конечное искажение. Тогда весовая функция, определяемая соотношением*

$$D' \ni y \mapsto \omega(y) = \begin{cases} \frac{|D\varphi(\varphi^{-1}(y))|^p}{|\det D\varphi(\varphi^{-1}(y))|}, & \text{если } y \in D' \setminus (Z' \cup \Sigma'), \\ 1 & \text{иначе} \end{cases} \tag{30}$$

локально суммируема: $\omega \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, и оператор композиции

$$\varphi^* : L^1_p(D'; \omega) \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_p(D), \quad 1 \leq p < \infty, \tag{31}$$

ограничен, причем $\|\varphi^*\| \leq \left\| K^{1,\omega}_{p,p}(\cdot) \mid L_\infty(D) \right\| = 1$.

Доказательство. Пусть $\varphi : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $1 \leq p < \infty$, имеющий конечное искажение. Исследуем условия на вес $\omega : D' \to (0, \infty)$, гарантирующие ограниченность оператора (31).

Пусть существует локально суммируемый вес $\omega : D' \to (0, \infty)$ такой, что отображение φ индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_p(D'; \omega) \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_p(D)$, $1 \leq p < \infty$. Тогда для $\varphi : D \to D'$ выполняются утверждения 1 и 3 теоремы 3 и, следовательно, операторная функция искажения (см. (3))

$$D \ni x \mapsto K^{1,\omega}_{p,p}(x, \varphi) = \begin{cases} \frac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}} \omega^{\frac{1}{p}}(\varphi(x))}, & \text{если } \det D\varphi(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \det D\varphi(x) = 0, \end{cases}$$

[7]В монографии [51, § 1.1.3, теоремы 1, 2] доказано, что локально суммируемая функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ принадлежит классу Соболева $L^1_p(\Omega)$, $p \geq 1$, тогда и только тогда, когда она может быть изменена на множестве нулевой $\mathscr{H}^n$-меры так, что измененная функция абсолютно непрерывна на $\mathscr{H}^{n-1}$-п. в. прямых, параллельных любой координатной оси, и ее обычные частные производные принадлежат $L_p(\Omega)$. При этом слабый градиент ∇u функции u (в смысле теории обобщенных функций) совпадает $\mathscr{H}^n$-п. в. с обычным градиентом.

принадлежит $L_\infty(D)$. Из (4) вытекает оценка нормы оператора композиции: $\|\varphi^*\| \leq \left\|K^{1,\omega}_{p,p}(\cdot) \mid L_\infty(D)\right\|$. Очевидно, условие $\left\|K^{1,\omega}_{p,p}(\cdot) \mid L_\infty(D)\right\| = 1$ обеспечивает для оператора φ^* оценку $\|\varphi^*\| \leq 1$. Другими словами, из приведенных соотношений выводим равенства $K^{1,\omega}_{p,p}(x,\varphi) = 0$ на Z и $K^{1,\omega}_{p,p}(x,\varphi) = 1$ для $\mathscr{H}^n$-п. в. $x \in D \setminus Z$. Следовательно, на множестве $D' \setminus (Z' \cup \Sigma')$ в качестве веса можно взять измеримую функцию

$$\omega(y) = \frac{|D\varphi(\varphi^{-1}(y))|^p}{|\det D\varphi(\varphi^{-1}(y))|}, \tag{32}$$

определенную для $\mathscr{H}^n$-п. в. $y \in D' \setminus (Z' \cup \Sigma')$. В силу формулы (14) имеем

$$\int\limits_{\varphi(W)\setminus(Z'\cup\Sigma')} \omega(y)\,dy = \int\limits_{\varphi(W)\setminus(Z'\cup\Sigma')} \frac{|D\varphi(\varphi^{-1}(y))|^p}{|\det D\varphi(\varphi^{-1}(y))|}\,dy$$
$$= \int\limits_{W\setminus(Z\cup\Sigma)} |D\varphi(x)|^p\,dx < \infty$$

для компактно вложенной области $W \Subset D$. Заметим, что приведенные здесь соотношения не накладывают никаких условий на поведение веса (31) на множестве $Z' = \varphi(\Sigma)$.

С учетом вышеизложенного определим вес в случае $|Z'| > 0$ по формуле (30). При таком выборе вес $\omega : D' \to (0,\infty)$ локально суммируем: $\omega \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, а внешняя операторная функция искажения равна

$$D \ni x \mapsto K^{1,\omega}_{p,p}(x,\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \det D\varphi(x) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следовательно, выполнены условие 3 и тем самым эквивалентное ему условие 1 теоремы 3. Кроме того, имеем оценку $\|\varphi^*\| \leq \left\|K^{1,\omega}_{p,p}(\cdot) \mid L_\infty(D)\right\| = 1$ для оператора композиции. $\square$

В качестве следствия теорем 3 и 9 выводим

Следствие 26. *Пусть $\varphi : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $1 < p < \infty$ при $n \geq 3$ и $1 \leq p < \infty$ при $n = 2$, имеющий конечное искажение. Тогда обратное отображение $f = \varphi^{-1}$ принадлежит семейству $\mathscr{Q}_{p,p}(D', D; \omega)$.*

Доказательство. По теореме 9 отображение $f = \varphi^{-1}$ принадлежит классу $\mathscr{Q}_{p,p}(D', D; \omega)$ при $1 < q$. Заметим, что доказательство импликации $1 \Rightarrow 2$ в теореме 3, полученное в [10, 12] при $1 < q$, работает также и при $n = 2$, $q = 1$. $\square$

Пример 24, теоремы 21, 23, 25 и следствие 26 приводят к следующему утверждению, в котором формулируются свойства регулярности гомеоморфизма, обратный к которому $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$ и имеет конечное искажение.

Теорема 27. *Пусть $\varphi : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $n-1 < p < \infty$ при $n \geq 3$, $1 \leq p < \infty$ при $n = 2$, имеющий конечное искажение. Тогда обратный гомеоморфизм $f = \varphi^{-1} : D' \to D$ обладает следующими свойствами:*

1) *принадлежит классу Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$;*
2) *f имеет конечное искажение;*
3) *гомеоморфизм f дифференцируем $\mathscr{H}^n$-п. в. в области D';*

4) *для $\mathscr{H}^n$-п. в. $y \in D'$ справедлива оценка*

$$|Df(y)| \leq 2^n \alpha(n) c_1 |\det Df(y)|^{\frac{p-(n-1)}{p}} \omega(y)^{\frac{n-1}{p}}, \tag{33}$$

а вместе с ней для любого открытого множества $U \subset D'$ имеет место неравенство

$$\int\limits_U |Df(y)|\,dy \leq c_2 \mathscr{H}^n(f(U))^{\frac{p-(n-1)}{p}} \omega(U)^{\frac{n-1}{p}} \tag{34}$$

с весовой функцией (30) *и постоянной $c_2 = 2^n \alpha(n) c_1$, где $\alpha(n) = \mathscr{H}^n(B(0,1)) = \Gamma\big(\frac{1}{2}\big)^n / \Gamma\big(\frac{n}{2}+1\big)$, а c_1 — постоянная в неравенстве* (20).

Доказательство. Действительно, пример 24 и следствие 26 показывают, что в условиях теоремы 27 обратный гомеоморфизм $f = \varphi^{-1} : D' \to D$ принадлежит классу $\mathscr{Q}_{p,p}(D', D; \omega)$ с весовой функцией (30) и постоянной $K_p = 1$. Следовательно, по теореме 23 выполняются утверждения 1–4 теоремы. $\square$

Замечание 28. Приведенное доказательство теоремы 27 новое, хотя отдельные ситуации были рассмотрены ранее. А именно, утверждения 1, 2 теоремы 27 доказаны в [1, теоремы 3.2, 3.3] при $n = 2$, $p = 1$, и в работе [2, теорема 1.2] при $n \geq 3$, $p > n-1$, утверждение 3 теоремы 27 при $n \geq 3$, $p = n$ можно получить из монографии [6], в которой приведена также подробная библиография. Метод доказательства абсолютной непрерывности и дифференцируемости в теоремах 21 и 23, по существу, восходит к работе Д. Е. Меньшова [4] (см. изложение результатов Д. Е. Меньшова в [63]).

С помощью теоремы 27 покажем справедливость теоремы 3 в случае $1 = q \leq p < \infty$, $n = 2$.

Следствие 29. *Пусть гомеоморфизм $f : D' \to D$, D', D — области в $\mathbb{R}^2$, принадлежит семейству $\mathscr{Q}_{q,p}(D', D; \omega)$, $1 = q \leq p < \infty$. Тогда обратное отображение $\varphi = f^{-1} : D \to D'$ обладает свойствами* 1 *и* 3 *теоремы* 3.

Доказательство. В силу теоремы 23 гомеоморфизм $f : D' \to D$ семейства $\mathscr{Q}_{q,p}(D', D; \omega)$, $1 \leq q \leq p < \infty$, $n = 2$, принадлежит классу Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D') : f \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$ и имеет конечное искажение. Следовательно, по теореме 27, примененной к гомеоморфизму $f : D' \to D$ класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$ с конечным искажением (см. определение в (1)), обратное отображение $\varphi = f^{-1} : D \to D'$ принадлежит классу Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$: $\varphi \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ и имеет конечное искажение. Далее к отображению $\varphi \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ следует применить рассуждения из [12, лемма 2.5 и разд. 2.5], на основании которых выводим[8)], что для отображения $\varphi : D \to D'$ справедливы утверждения 1 и 3 теоремы 3. $\square$

Пример 30. Пусть $n-1 < s < \infty$, а $f : D' \to D$ — гомеоморфизм открытых областей $D', D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, такой, что

1) $f \in W^1_{n-1,\mathrm{loc}}(D')$;

2) отображение f имеет конечное искажение: $Df(y) = 0$ $\mathscr{H}^n$-п. в. на множестве $Z = \{y \in D' \mid \det Df(y) = 0\}$;

3) внешняя операторная функция искажения

$$D' \ni y \mapsto K^{1,1}_{n-1,s}(y, f) = \begin{cases} \frac{|Df(y)|}{|\det Df(y)|^{\frac{1}{s}}}, & \text{если } \det Df(y) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \det Df(y) = 0, \end{cases} \tag{35}$$

[8)] Рассуждения, содержащиеся в упомянутых фрагментах из [12], применимы для всякого гомеоморфизма $\varphi : D \to D'$ класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$, имеющего конечное искажение и удовлетворяющего соотношениям (2).

принадлежит $L_\sigma(D)$, где $\sigma = (n-1)p$, $p = \frac{s}{s-(n-1)}$.

Тогда обратный гомеоморфизм $\varphi = f^{-1} : D \to D'$ обладает свойствами

4) $\varphi \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $p = \frac{s}{s-(n-1)}$;

5) φ имеет конечное искажение,

а прямой гомеоморфизм $f : D' \to D$

6) принадлежит классу $\mathscr{Q}_{p,p}(D', D; \omega)$ с постоянной $K_p = 1$ и с весовой функцией $\omega \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, определяемой по формуле

$$\omega(y) = \begin{cases} \frac{|\operatorname{adj} Df(y)|^p}{|\det Df(y)|^{p-1}}, & \text{если } y \in D' \setminus Z', \\ 1 & \text{иначе}, \end{cases} \tag{36}$$

где $Z' = \{y \in D' : Df(y) = 0\}$.

Доказательство. Известно (см. [20, теорема 4]), что если гомеоморфизм $f : D' \to D$ удовлетворяет сформулированным условиям, то обратный гомеоморфизм $\varphi = f^{-1} : D \to D'$ обладает свойствами

4) $\varphi \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $p = \frac{s}{s-(n-1)}$;

5) φ имеет конечное искажение.

По условию (35) функция $K^{1,1}_{n-1,s}(y, f)$, $n-1 < s < \infty$, принадлежит $L_\sigma(D')$, $\sigma = (n-1)p$, $p = \frac{s}{s-(n-1)}$. Следовательно, функция $K^{1,1}_{n-1,s}(y, f)^\sigma$ суммируема на $D' \setminus Z'$. Далее непосредственно проверяем, что $\frac{(n-1)p}{s} = p - 1$, поэтому с учетом известного неравенства $|Df(y)|^{n-1} \geq |\operatorname{adj} Df(y)|$ получаем

$$K^{1,1}_{n-1,s}(y, f)^\sigma = \frac{(|Df(y)|^{n-1})^p}{|\det Df(y)|^{\frac{(n-1)p}{s}}} \geq \frac{|\operatorname{adj} Df(y)|^p}{|\det Df(y)|^{p-1}} \quad \text{при } y \in D' \setminus Z'. \tag{37}$$

Из суммируемости левой части соотношений (37) выводим суммируемость на множестве $D' \setminus Z'$ правой части (37). Следовательно, весовая функция (36) локально суммируема.

Заметим, что для $\mathscr{H}^n$-п. в. $y \in D' \setminus Z'$ справедливо равенство

$$\frac{|D\varphi(f(y))|^p}{|\det D\varphi(f(y))|} = \frac{|\operatorname{adj} Df(y)|^p}{|\det Df(y)|^{p-1}}. \tag{38}$$

Поэтому функция искажения

$$D \ni x \mapsto K^{1,\omega}_{p,p}(x, \varphi) = \begin{cases} \frac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}} \omega^{\frac{1}{p}}(\varphi(x))}, & \text{если } \det D\varphi(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \det D\varphi(x) = 0, \end{cases} \tag{39}$$

равна единице $\mathscr{H}^n$-п. в. на множестве $\{x \in D : \det D\varphi(x) \neq 0\}$.

С помощью теорем 3 и 9 выводим, что гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ имеет обратный $f = \varphi^{-1} : D' \to D$, принадлежащий классу $\mathscr{Q}_{p,p}(D', D; \omega)$ с весовой функцией (36). $\square$

Замечание 31. Сформулированные в примере 30 и следствиях 33 и 34 (см. ниже) свойства гомеоморфизма f и обратного к нему новые. Близкий к примеру 30 результат при $s = p = n$ и весовой функцией $\omega(y) = K^{1,1}_{n-1,n}(y, f)^{(n-1)n} = \left(\frac{|Df(y)|^n}{|\det Df(y)|}\right)^{n-1}$ в точках $y \in D' \setminus Z'$ вместо правой части (38) сформулирован в [64] на языке модулей семейств кривых.

Пример 32. Пусть $n-1 < s < \infty$, а $f : D' \to D$ — гомеоморфизм открытых областей $D', D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, такой, что

1) $f \in W^1_{n-1,\mathrm{loc}}(D')$;

2) отображение f имеет конечное коискажение: $\operatorname{adj} Df(y) = 0$ $\mathscr{H}^n$-п. в. на множестве $Z = \{y \in D' \mid \det Df(y) = 0\}$;

3) внутренняя операторная функция искажения

$$D' \ni y \mapsto \mathscr{K}^{1,1}_{n-1,s}(y,f) = \begin{cases} \frac{|\operatorname{adj} Df(y)|}{|\det Df(y)|^{\frac{n-1}{s}}}, & \text{если } \det Df(y) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \det Df(y) = 0, \end{cases} \tag{40}$$

принадлежит $L_p(D')$, где $p = \frac{s}{s-(n-1)}$, $n-1 < s < \infty$.

Тогда обратный гомеоморфизм $\varphi = f^{-1} : D \to D'$ обладает свойствами

4) $\varphi \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $p = \frac{s}{s-(n-1)}$;

5) φ имеет конечное искажение,

а прямой гомеоморфизм $f : D' \to D$

6) принадлежит классу $\mathscr{Q}_{p,p}(D', D; \omega)$ с постоянной $K_p = 1$ и с весовой функцией (36);

7) имеет конечное искажение при $n-1 < s < n + \frac{1}{n-2}$.

Доказательство. Известно (см. [20, теорема 3]), что если гомеоморфизм $f : D' \to D$ удовлетворяет сформулированным условиям, то обратный гомеоморфизм $\varphi = f^{-1} : D \to D'$ обладает свойствами

4) $\varphi \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$,

5) φ имеет конечное искажение.

Заметим, что по условию (40) функция $\mathscr{K}^{1,1}_{n-1,s}(y,f)$ принадлежит $L_p(D')$, $n-1 < s < \infty$. Следовательно, функция $\mathscr{K}^{1,1}_{n-1,s}(y,f)^p$ суммируема на $D' \setminus Z'$ Далее непосредственно проверяем, что

$$\mathscr{K}^{1,1}_{n-1,s}(y,f)^p = \left(\frac{|\operatorname{adj} Df(y)|}{|\det Df(y)|^{\frac{n-1}{s}}}\right)^p = \frac{|\operatorname{adj} Df(y)|^p}{|\det Df(y)|^{p-1}} \quad \text{при } y \in D' \setminus Z'. \tag{41}$$

Следовательно, хотя предпосылки в примере 32 отличны от таковых в примере 30, приходим к той же самой весовой функции (36), которая локально суммируема в силу (41) и условия 3 примера 32.

Заметим, что для $\mathscr{H}^n$-п. в. $y \in D' \setminus Z'$ справедливо равенство (38). Поэтому функция искажения $D \ni x \mapsto K^{1,\omega}_{p,p}(x,\varphi)$, определенная в (39), равна единице $\mathscr{H}^n$-п. в. на множестве $\{x \in D : \det D\varphi(x) \neq 0\}$. Тем самым функция искажения $D \ni x \mapsto K^{1,\omega}_{p,p}(x,\varphi)$ определена корректно и $\left\|K^{1,\omega}_{p,p}(\cdot,\varphi)\right\| = 1$.

По утверждению 1 теоремы 3 отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_p(D';\omega) \cap \operatorname{Lip}_l(D') \to L^1_q(D)$. Отсюда выводим, что отображение $f = \varphi^{-1} : D' \to D$ принадлежит классу $\mathscr{Q}_{p,p}(D', D; \omega)$ с весовой функцией (36).

Из соотношения $n-1 < s < n + \frac{1}{n-2}$ имеем $n-1 < p$. Следовательно, по теореме 27 гомеоморфизм $f : D' \to D$ имеет конечное искажение.

Утверждения 6 и 7 также доказаны. $\square$

Следствие 33. *Всякий гомеоморфизм $f : D' \to D$ в примерах 30 и 32 обладает дополнительными свойствами:*

1) *неравенство (9) справедливо для произвольного конденсатора $E = (F_1, F_0)$ в D';*

2) *при $n-1 < s < n + \frac{1}{n-2}$ гомеоморфизм $f : D' \to D$ дифференцируем $\mathscr{H}^n$-п. в. в D'.*

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из замечания 10 и неравенства (4), а утверждение 2 — из теоремы 27 с учетом того, что соотношения $n-1 < s < n + \frac{1}{n-2}$ обеспечивают неравенство $n-1 < p$. $\square$

Следствие 34. *Пусть гомеоморфизм $f : D \to D'$ обладает свойствами* 1–3 *примеров* 30 *и* 32. *Тогда*

1) *при условии $n-1 < s < n + \frac{1}{n-2}$ ограничение гомеоморфизма $f : U' \to U$, где $U' \Subset D'$ — компактно вложенная область, а $U = f(U')$, индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$f^* : L^1_{\frac{p}{p-(n-1)}}(U) \to L^1_1(U'); \tag{42}$$

2) *при условии $n \leq s < n + \frac{1}{n-2}$ гомеоморфизм f обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина;*

3) *при условии $n \leq s < n + \frac{1}{n-2}$ гомеоморфизм f имеет якобиан в D', отличный от нуля $\mathscr{H}^n$-п. в.*

Доказательство. 1. Рассмотрим компактно вложенную область $U' \Subset D'$ и произвольную функцию $u \in \mathrm{Lip}(U)$, где $U = f(U')$.

Из условия $n-1 < s < n + \frac{1}{n-2}$ имеем неравенство $n-1 < p < \infty$ для параметра p. Следовательно, в силу свойств, сформулированных в примерах 30 и 32, обратный гомеоморфизм $\varphi = f^{-1} : D \to D'$ удовлетворяет условиям теоремы 27. Применяя неравенство (33) в последующих оценках, получаем соотношения

$$\int\limits_{U'} |\nabla(u \circ f)(y)|\, dy \leq \int\limits_{U'} |\nabla u|(f(y))|Df(y)|\, dy \tag{43}$$

$$\leq c_2 \int\limits_{U'} |\nabla u|(f(y))|\det Df(y)|^{\frac{p-(n-1)}{p}} \omega(y)^{\frac{n-1}{p}}\, dy$$

$$\leq c_2 \Bigg(\int\limits_{U'} (|\nabla u|(f(y)))^{\frac{p}{p-(n-1)}} |\det Df(y)|\, dy \Bigg)^{\frac{p-(n-1)}{p}} \Bigg(\int\limits_{U'} \omega(y)\, dy \Bigg)^{\frac{n-1}{p}}$$

$$\leq c_2 \Bigg(\int\limits_{U'} \omega(y)\, dy \Bigg)^{\frac{n-1}{p}} \Bigg(\int\limits_{U} |\nabla u(x)|^{\frac{p}{p-(n-1)}}\, dx \Bigg)^{\frac{p-(n-1)}{p}}, \tag{44}$$

где так же, как и в (34), принято сокращение $c_2 = 2^n \alpha(n) c_1$. Неравенство между (43) и (44) означает, что отображение $f : U' \to U$ индуцирует ограниченный оператор композиции (42).

2. Заметим, что из условия $n \leq s < n + \frac{1}{n-2}$ имеем условие $n-1 < p \leq n$ для параметра p. В силу [19, теорема 4] гомеоморфизм f обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина. Для удобства читателей сформулируем цитируемую здесь теорему.

Предложение 35 [19, теорема 4]. *Если измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(D') \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_q(D), \quad 1 \leq q \leq p \leq n,$$

то f обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина.

3. Из [19, следствие 4] выводим, что якобиан гомеоморфизма f отличен от нуля $\mathscr{H}^n$-п. в. в U' (это свойство выводится из свойства 2 следствия с помощью формулы замены переменной (13)). Так как $U' \subset D'$ — произвольная область, следствие доказано. □

Замечание 36. Сформулированные в примере 32 и следствиях 33 и 34 свойства гомеоморфизма f и обратного к нему новые, за исключением дифференцируемости гомеоморфизма f в примере 32 при $s = n$, $n \geq 3$ (случай $s = n$ рассмотрен в [65]).

§ 4. О регулярности гомеоморфизмов на группе Карно, обратных к соболевским

В этом параграфе приведем обобщения утверждений 1 и 2 этой работы для гомеоморфизмов групп Карно. Метод доказательства ACL-свойства квазиконформных отображений на группах Гейзенберга разработан в работах [66, 67] и существенно отличается в деталях от классического метода, известного в евклидовых пространствах. Этот метод был применен позднее для доказательства ACL-свойства более сложных аналитических объектов (см., например, [18] и др.).

Ниже адаптируем новые доказательства утверждений 1 и 2 для демонстрации справедливости их обобщений на группах Карно. По существу, показываем, что на группах Карно можно успешно применить рассуждения, восходящие к классической работе Д. Е. Меньшова [68].

4.1. Определение основных структур на группах Карно.

4.1.1. *Группой Карно* [69–72] называется связная односвязная нильпотентная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли $\mathscr{G}$ которой разлагается в прямую сумму $V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ векторных пространств таких, что $[V_1, V_k] = V_{k+1}$ для $1 \leq k \leq m-1$ и $[V_1, V_m] = \{0\}$, $\dim V_1 \geq 2$. Далее применяем обозначения $x \cdot y$ для произведения двух элементов x, y группы $\mathbb{G}$ и e для нейтрального элемента группы. Подпространство $V_1 \subset \mathscr{G}$ называется *горизонтальным*.

4.1.2. Алгебра Ли группы Карно и экспоненциальное отображение. Пусть $X_{11}, \dots, X_{1n_1}$ — *левоинвариантные векторные поля*, образующие базис пространства V_1. Поскольку они порождают $\mathscr{G}$, для каждого i, $1 < i \leq m$, можно выбрать базис X_{ij}, $1 \leq j \leq n_i = \dim V_i$ в V_i, образованный коммутаторами базисных полей $X_{1k} \in V_1$ порядка $i-1$. Так как алгебра $\mathscr{G}$ нильпотентная, каждый элемент $x \in \mathbb{G}$ можно идентифицировать с точками пространства $\mathbb{R}^{n_1+\dots+n_m}$ посредством экспоненциального отображения:

$$x = \exp\Bigl(\sum_{\substack{1 \leq i \leq m,\\ 1 \leq j \leq n_i}} x_{ij} X_{ij}\Bigr).$$

Диффеоморфизм $\exp : \mathscr{G} \to \mathbb{G}$ — это глобальная система координат: каждому элементу $x \in \mathbb{G}$ соответствует единственный набор чисел $\{x_{ij}\} \in \mathbb{R}^N$, $N = n_1 + \dots + n_m$. Более того, удобно отождествить элементы $\mathscr{G}$ с точками пространства $\mathbb{R}^N$ так, чтобы экспоненциальное отображение $\exp : \mathscr{G} \to \mathbb{G}$ было тождественно [71]. Последнее означает, что элементы алгебры $\mathscr{G}$ и группы $\mathbb{G}$ — это одни и те же точки в $\mathbb{R}^N$, над которыми совершаются операции, зависящие от выбора структуры. При таком выборе системы координат единица e группы — это 0, а обратный x^{-1} к элементу $x \in \mathbb{G}$ — это $-x$.

Растяжения δ_t, определенные как $x \mapsto \delta_t x = (t^i x_{ij})_{1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n_i}$, суть автоморфизмы как алгебры $\mathscr{G}$, так и группы $\mathbb{G}$ для каждого $t > 0$.

4.1.3. Примеры. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с его стандартной структурой является примером абелевой группы: векторные поля $\frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$, не имеют нетривиальных коммутационных соотношений и составляют базис соответствующей алгебры Ли.

Группа Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ является примером неабелевой группы Карно. Алгебра Ли этой группы имеет размерность $2n+1$. Векторные поля

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i \frac{\partial}{\partial t}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, n,$$

образуют базис алгебры Гейзенберга (здесь группа Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ отождествлена с пространством $\mathbb{R}^{2n+1} = \{(x,y,t) : x, y, \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\})$. Единственные нетривиальные коммутационные соотношения суть $[X_i, Y_i] = -4T$, $i = 1, \dots, n$. Таким образом, $V = V_1 \oplus V_2$, где $V_1 = \operatorname{span}\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n\}$ и $V_2 = \operatorname{span}\{T\}$ — одномерное векторное подпространство. Образ $\exp(V_2)$ — это центр группы $\mathbb{H}^n$. Групповая операция определяется формулой

$$(x,y,t) \cdot (x',y',t') = (x + x', y + y', t + t' + 2\langle y, x'\rangle - 2\langle x, y'\rangle).$$

4.1.4. Метрические структуры на группах Карно. *Однородная норма* [70, 71] на группе $\mathbb{G}$ — это непрерывная функция $\rho : \mathbb{G} \to [0, \infty)$, обладающая свойствами:

(a) $\rho(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = e$;

(b) $\rho(x) = \rho\left(x^{-1}\right)$ и $\rho\left(\delta_t(x)\right) = t\rho(x)$;

(c) существует постоянная $C > 0$ такая, что $\rho\left(x \cdot y\right) \le c\left(\rho\left(x\right) + \rho\left(y\right)\right)$ для всех $x, y \in \mathbb{G}$.

Естественно, что однородная норма определяется неоднозначно, однако любые две однородные нормы ρ_1 и ρ_2 *эквивалентны* [70] между собой: существуют числа $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ такие, что $\alpha \le \rho_1(x)/\rho_2(x) \le \beta$ независимо от $x \in \mathbb{G}\backslash\{e\}$.

Однородная норма определяет *однородную квазиметрику*: для двух точек $x, y \in \mathbb{G}$, положим $\rho(x,y) = \rho(x^{-1}y)$. Квазиметрика обладает следующими свойствами, вытекающими из свойств (a)–(c) однородной нормы:

(a_1) $\rho(x,y) \ge 0$; $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

(b_1) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ и $\rho(\delta_t x, \delta_t y) = t\rho(x,y)$;

(c_1) для всех $x, y, z \in \mathbb{G}$ выполняется обобщенное неравенство треугольника $\rho\left(x,y\right) \le C\left(\rho\left(x,z\right) + \rho\left(z,y\right)\right)$ с постоянной $C > 0$ из п. (c).

Из эквивалентности однородных норм ρ_1 и ρ_2 выводим эквивалентность метрик: $\alpha\rho_2(x,y) \le \rho_1(x,y) \le \beta\rho_2(x,y)$ для всех $x, y \in \mathbb{G}$.

Относительно метрики $\rho(x,y)$ задаются сферы $S_\rho(x,t) = \{y \in \mathbb{G} : \rho(x,y) = t\}$ и шары $B_\rho(x,t) = \{y \in \mathbb{G} : \rho(x,y) < t\}$, причем сферы замкнуты, а шары открыты в топологии группы $\mathbb{G}$.

Далее фиксируем однородную норму элемента $x = (x_1; \dots; x_i; \dots; x_m) \in \mathbb{R}^N$, $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in_i}) \in V_i$, определенную по правилу

$$\rho(x) = \max(|x_1|, |x_2|^{\frac{1}{2}}, \dots, |x_m|^{\frac{1}{m}}). \tag{45}$$

где $|x_i| = \left(x_{i1}^2 + \dots + x_{in_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ для $x_i \in V_i$, $i = 1, \dots, m$.

Предполагаем, что в алгебре Ли $\mathscr{G}$ задано скалярное произведение, относительно которого базисные левоинвариантные векторные поля $\{X_{ij}\}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n_i$, ортонормированы.

Расстоянием Карно — Каратеодори $d(x,y)$ между двумя точками $x, y \in \mathbb{G}$ называется нижняя грань длин всех *горизонтальных кривых* с концевыми точками x, y, где длина касательного вектора измеряется выбранной римановой метрикой на группе $\mathbb{G}$, а горизонтальная кривая есть кусочно гладкий путь, касательный вектор к которому принадлежит V_1. Можно показать, что $d(x,y)$ всегда конечная левоинвариантная метрика, относительно которой группа автоморфизмов δ_t является группой растяжений с коэффициентом t: $d\left(\delta_t x, \delta_t y\right) = td\left(x,y\right)$ [69, 70]. По определению полагаем $d(x) = d(0,x)$. Можно показать, что $d(x)$ — однородная норма, поэтому расстояния $d(x,y)$ и $\rho(x,y)$ эквивалентны. Сферы и шары радиуса $t \ge 0$ в метрике Карно — Каратеодори будем обозначать символами $S_c(0,t)$ и $B_c(0,t)$ соответственно.

Эквивалентность метрических функций $d(x,y)$ и $\rho(x,y)$ приводит к тому, что тождественное отображение между метрическими пространствами $(\mathbb{G}, d(\cdot,\cdot))$ и $(\mathbb{G}, \rho(\cdot,\cdot))$ квазиизометрично.

4.1.5. Меры на группах Карно. Фиксируем далее биинвариантную меру Хаара на $\mathbb{G}$ (которая получается в результате переноса меры Лебега с алгебры Ли $\mathscr{G}$ на группу $\mathbb{G}$ посредством экспоненциального отображения, т. е. мера Хаара измеримого множества $A \subset \mathbb{G}$ равна мере Лебега множества $\exp^{-1}(A)$ на алгебре $\mathscr{G}$ [70, предложение 1.2]). Нормируем меру Хаара таким образом, чтобы мера Лебега шара $B_c(0,1)$ была равна 1. Заметим, что нормирующий множитель в определении меры Хаусдорфа $\mathscr{H}^N(A)$ измеримого множества A на пространстве $\mathbb{R}^N$ с евклидовой метрикой можно выбрать таким образом, чтобы мера Хаудорфа $\mathscr{H}^N(A)$ была равна его лебеговой мере. В силу изложенного, говоря в дальнейшем о мере Лебега множества $A \subset \mathbb{G}$, будем иметь в виду меру Хаудорфа $\mathscr{H}^N(A)$.

Отсюда имеем соотношение $\mathscr{H}^N(\delta_t A) = t^\nu \mathscr{H}^N(A)$ для измеримого множества $A \subset \mathbb{G}$, где число $\nu = \sum\limits_{i=1}^{m} i n_i$ называется *однородной размерностью* группы $\mathbb{G}$.

Аналогично определенной в пространстве $\mathbb{R}^n$ мере Хаусдорфа (см. § 1) рассмотрим меру Хаусдорфа на метрическом пространстве $(\mathbb{G}, d)$. Для $k \geq 0$, $\delta \in (0,\infty]$ и множества $A \subset \mathbb{G}$ зададим величину

$$\mathscr{H}^k_\delta(A) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam} A_i)^k : \operatorname{diam} A_i < \delta, A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big\},$$

где ω_k — нормирующий множитель, $\operatorname{diam} A_i = \sup\{d(x,y) : x,y \in A_i\}$, а инфимум берется по всем счетным покрытиям $\{A_i\}$ множества A. Если A не может быть покрыто счетным набором множеств указанного размера, то полагаем $\mathscr{H}^k_\delta(A) = \infty$. Предел $\mathscr{H}^k(A) = \lim\limits_{\delta\to 0} \mathscr{H}^k_\delta(A)$ существует и называется *k-мерной мерой Хаусдорфа* множества A на $(\mathbb{G}, d)$.

Выберем нормирующий множитель ω_ν в определении меры Хаусдорфа так, что $\mathscr{H}^\nu(B_c(0,1)) = 1$, где $B_c(0,1)$ — шар в метрике Карно — Каратеодори. Тогда $\mathscr{H}^\nu(B_c(0,r)) = r^\nu$. Более того, если $E \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество, то $\mathscr{H}^\nu(\delta_t E) = t^\nu \mathscr{H}^\nu(E)$. Отметим, что однородная размерность ν группы $\mathbb{G}$ равно размерности Хаусдорфа пространства $(\mathbb{G}, d)$.

Из-за подходяще выбранных нормирующих множителей ν-мерная мера Хаусдорфа $\mathscr{H}^\nu(A)$ измеримого множества $A \subset \mathbb{G}$ равна его мере Лебега $\mathscr{H}^N(A)$.

4.1.6. Горизонтальные слоения на группах Карно. Фиксируем $1 \leq j \leq n_1$ и рассмотрим семейство кривых Γ_j, образующих гладкое слоение открытого множества $A \subset \mathbb{G}$. Роль слоя $\gamma \in \Gamma_j$ играют интегральные кривые горизонтального векторного поля $X_{1j} \in V_1$. Если соответствующий этому полю поток обозначить символом g_s, то слой имеет вид $\gamma(s) = g_s(p) = p \exp sX_{1j}$, где p принадлежит поверхности P, трансверсальной к векторному полю X_{1j}, а параметр s — интервалу $I \subset \mathbb{R}$. Предполагается, что слоение Γ_j множества A снабжено мерой $d\gamma_j$, удовлетворяющей соотношениям

$$c_7 r^{\nu-1} \leq \int\limits_{\gamma\in\Gamma_j,\, \gamma_j\cap B_c(x,r)\neq\varnothing} d\gamma \leq c_8 r^{\nu-1} \tag{46}$$

для достаточно малых шаров $B_c(x,r) \subset \mathbb{G}$ с постоянными c_7 и c_8, не зависящими от $B_c(x,r)$. Для слоения, определяемого векторным полем $X_{1j} \in V_1$, мера $d\gamma_j$

может быть получена как внутреннее произведение $i(X_{1j})$ векторного поля X_{1j} с биинвариантной формой объема dx (см. [67])[9)].

Горизонтальные слоения на группах Карно — удобное понятие при определении абсолютно непрерывных функций (или отображений) на группах Карно: аналогом известного в евклидовом пространстве выражения «отображение абсолютно непрерывно на почти всех линиях параллельных координатным осям» на группах Карно будет выражение «отображение абсолютно непрерывно на $d\gamma_j$-почти всех линиях горизонтального слоения Γ_j, $1 \le j \le n_1$».

4.1.7. Дифференцируемость на группах Карно. Пусть заданы две группы Карно $\mathbb{G}$, $\widetilde{\mathbb{G}}$ и D — область в $\mathbb{G}$. Отображение $\varphi : D \to \widetilde{\mathbb{G}}$ называется *$\mathscr{P}$-дифференцируемым* [69] в точке $x \in D$, если существует гомоморфизм $L : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ групп Карно такой, что $L(\exp V_1) \subset \exp \widetilde{V}_1$ и «разностное отношение»

$$\tilde{\delta}_t^{-1}(\varphi(x)^{-1}\varphi(x\delta_t u)) \quad \text{сходится к } L(u) \tag{47}$$

при $t \to 0+$ равномерно по $u \in B_c(0,1)$. Здесь $\tilde{\delta}_t$ — однопараметрическая группа растяжений на $\widetilde{\mathbb{G}}$, а $\widetilde{V}_1$ — горизонтальное подпространство алгебры Ли $\widetilde{\mathscr{G}}$ группы $\widetilde{\mathbb{G}}$.

Пансю доказал [69], что всякое определенное на открытом множестве D липшицево отображение $\varphi : D \to \widetilde{\mathbb{G}}$ *$\mathscr{P}$-дифференцируемо* $\mathscr{H}^\nu$-п. в. в D.

Специализируя сходимость в (47) в других топологиях, приходим к различным понятиям дифференцируемости. Так, сходимость в (47) по мере на шаре $B_c(0,1)$ приводит к понятию *аппроксимативной* дифференцируемости (см. [73]), а сходимость в топологии пространства Соболева — к дифференцируемости в топологии пространства Соболева (см. [56]).

4.2. Классы Соболева на группах Карно. Пусть D — область в $\mathbb{G}$. Локально суммируемая функция $f : D \to \mathbb{R}$ принадлежит классу Соболева $L^1_p(D)$, $p \in [1,\infty]$, если обобщенные производные $X_{1j}f$, $j = 1,\dots,n$, вдоль векторных полей X_{1j} принадлежат $L_p(D)$. Пространство $L^1_p(D)$, $p \in [1,\infty]$, рассматривается с полунормой

$$\|f \mid L^1_p(D)\| = \left(\int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}} f|^p(x)\, d\mathscr{H}^\nu(x)\right)^{\frac{1}{p}},$$

где вектор $\nabla_{\mathscr{L}} f(x) = (X_{11}f(x),\dots,X_{1n_1}f(x)) \in V_1$ называется *субградиентом* функции f.

Пусть заданы две группы Карно $\mathbb{G}$, $\mathbb{G}'$ и D — область в $\mathbb{G}$. Отображение $\varphi : D \to \mathbb{G}'$ называется *абсолютно непрерывным на линиях* ($\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$), если для любой области U, $\overline{U} \subset D$, и слоения Γ_j, определяемого левоинвариантным векторным полем X_{1j}, $j = 1,\dots,n_1$, отображение φ абсолютно непрерывно на $\gamma \cap U$ относительно $\mathscr{H}^1$-меры Хаусдорфа для $d\gamma_j$-п. в. кривых $\gamma \in \Gamma_j$. Для такого отображения $\mathscr{H}^\nu$-п. в. в D существуют [69, предложение 4.1] производные $X_{1j}\varphi$ вдоль векторных полей X_{1j}, $j = 1,\dots,n_1$, такие, что $X_{1j}\varphi(x) \in V_1(x)$.

Матрица $D_h\varphi(x) = (X_{1i}\varphi_{1j}(x))$, $i = 1,\dots,n_1$, $j = 1,\dots,n'_1$, определенная п. в. в D, определяет линейный оператор $D_h\varphi(x) : V_1 \to V'_1$, $\dim V'_1 = n'_1$, горизонтального пространства V_1 в горизонтальное пространство V'_1 группы $\mathbb{G}'$, назы-

[9)] Если dx — форма объема на $\mathbb{G}$ (степени N), то $i(X_{1j})$ — форма степени $N-1$, которая на гладких векторных полях $Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1}$, определенных на $\mathbb{G}$, принимает значение $i(X_{1j})(Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1}) = dx(X_{1j}, Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1})$.

ваемый *горизонтальным дифференциалом* отображения φ в точке x; $|D_h\varphi(x)|$ обозначает норму этого оператора.

Алгебраически-аналитическая специфика группы Карно проявляется в том, что горизонтальный дифференциал $D_h\varphi(x) : V_1 \to V_1'$ порождает [73, теорема 1.2] гомоморфизм $D\varphi(x) : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ групп Карно, называемый $\mathscr{P}$-дифференциалом (см. разд. 4.1.7), при этом их нормы оцениваются одна через другую: $|D_h\varphi(x)| \le |D\varphi(x)| \le C|D_h\varphi(x)|$, где C зависит только от алгебраической структуры группы $\mathbb{G}$. Известно [73, теорема 1.2], что для п. в. $x \in D$ гомоморфизм $D\varphi(x)$ является аппроксимативным дифференциалом отображения $\varphi : D \to \mathbb{G}'$, если $\varphi \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$.

Отображение $\varphi : D \to \mathbb{G}'$ принадлежит классу Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $p \in [1,\infty)$, если $\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$ и на каждой области $U \subset D$, $\overline{U} \subset D$, величина

$$\|\varphi \mid W^1_p(U)\| = \|\rho(\varphi(\cdot)) \mid L_p(U)\| + \left(\int\limits_U |D_h\varphi(x)|^p \, d\mathscr{H}^\nu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

конечная. Описания отображений классов Соболева, эквивалентные вышеприведенному, см. в [73].

4.3. Замена переменной для отображений ACL-классов на группах Карно. Далее рассматриваем совпадающие группы $\mathbb{G}$ и $\mathbb{G}'$ и отображение $\varphi : D \to \mathbb{G}$, $D \subset \mathbb{G}$, принадлежащее классу Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $p \in [1,\infty)$.

Определитель $\det D\varphi(x)$ матрицы гомоморфизма $D\varphi(x)$ называется так же, как и в $\mathbb{R}^n$, *якобианом отображения* φ в точке x. Геометрический смысл якобиана аналогичен (11): если $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{G}$, — гомеоморфизм класса Соболева, то

$$D \ni x \mapsto \lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}^\nu(\varphi(B_c(x,r)))}{\mathscr{H}^\nu(B_c(x,r))} = \lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}^N(\varphi(B_c(x,r)))}{\mathscr{H}^N(B_c(x,r))} = |\det D\varphi(x)| \tag{48}$$

для $\mathscr{H}^\nu$-п. в. $x \in D$. Равенства (48) можно получить с помощью приводимой ниже формулы замены переменной (50) и теоремы Лебега о дифференцировании интеграла на группе Карно (см., например, [47, следствие 3]).

Определение 37. Для отображения $\varphi : D \to \mathbb{G}$ на группе Карно класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$ определим борелевское множество $Z = \{x \in D : \det D\varphi(x) = 0\}$ нулей якобиана и множество сингулярности

$$\Sigma = D \setminus \{x \in D : \text{определен аппроксимативный дифференциал } D\varphi(x)\} \tag{49}$$

меры нуль, которое можно считать борелевским. Очевидно $Z \cap \Sigma = \varnothing$.

Аналогично определению 17 зададим множества $Z' = \varphi(\Sigma)$ и $\Sigma' = \varphi(Z)$.

Формулы замены переменной в интеграле Лебега на группе Карно можно доказать, повторяя дословно рассуждения доказательства предложения 15 из [52] с той лишь разницей, что применяемые в этом доказательстве утверждения из [49] следует заменить соответствующими теоремами из [73].

Приведем здесь лишь одну простую формулу из [73, следствие 5.1], используемую ниже.

Предложение 38. *Если гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{G}$, принадлежит классу Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ (или классу $\mathrm{ACL}(D)$), то вне борелевского множества $\Sigma \subset D$ (см. (49)) нулевой меры отображение $\varphi : D \setminus \Sigma \to \mathbb{G}$ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина и для любой интегрируемой функции $u : D' \to \mathbb{R}$ верна* формула

$$\int\limits_D u(\varphi(x))|\det D\varphi(x)|\,d\mathscr{H}^\nu(x) = \int\limits_{D'\setminus Z'} u(y)\,d\mathscr{H}^\nu(y), \quad \text{где } Z' = \varphi(\Sigma). \tag{50}$$

4.4. Свойства регулярности гомеоморфизмов классов Соболева на группах Карно. Будем говорить, что отображение $\varphi : D \to \mathbb{G}$ на группе Карно, принадлежащее классу Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ или $\mathrm{ACL}(D)$, имеет *конечное искажение*, если $D\varphi(x) = 0$ п. в. на множестве $Z = \{x \in D : \det D\varphi(x) = 0\}$ нулей якобиана.

4.4.1. Гомеоморфизм класса Соболева на группе Карно как оператор композиции. В следующем утверждении обобщаем на группы Карно утверждение 1.

Утверждение 39. *Пусть D, D' — области на группе Карно $\mathbb{G}$, а $\varphi : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $1 \le p < \infty$, имеющий конечное искажение. Тогда весовая функция, определяемая соотношением*

$$D' \ni y \mapsto \omega(y) = \begin{cases} \frac{|D\varphi(\varphi^{-1}(y))|^p}{|\det D\varphi(\varphi^{-1}(y))|}, & \text{если } y \in D' \setminus (Z' \cup \Sigma'), \\ 1 & \text{иначе} \end{cases} \tag{51}$$

локально суммируема: $\omega \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, и $\Sigma' = \varphi(z)$, оператор композиции

$$\varphi^* : L^1_p(D';\omega) \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_p(D), \quad 1 \le p < \infty, \tag{52}$$

ограничен, причем $\|\varphi^*\| \le \left\|K^{1,\omega}_{p,p}(\cdot) \mid L_\infty(D)\right\| = 1$, где операторная функция искажения $K^{1,\omega}_{p,p}(\cdot)$ определена ниже в (53).

Доказательство. Проверим, что весовая функция (51) локально суммируема, операторная функция искажения $K^{1,\omega}_{p,p}(\cdot)$ (см. ниже (53)) принадлежит $L_\infty(D)$ и оператор композиции (52) ограничен.

Применяя формулы замены переменной (50), выводим

$$\int\limits_{\varphi(W)\setminus(Z'\cup\Sigma')} \omega(y)\,d\mathscr{H}^\nu(y) = \int\limits_{\varphi(W)\setminus(Z'\cup\Sigma')} \frac{|D\varphi(\varphi^{-1}(y))|^p}{|\det D\varphi(\varphi^{-1}(y))|}\,d\mathscr{H}^\nu(y)$$

$$= \int\limits_{W\setminus(Z\cup\Sigma)} |D\varphi(x)|^p\,d\mathscr{H}^\nu(x) < \infty$$

для компактно вложенной области $W \Subset D$. Таким образом, $\omega \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$.

Операторная функция искажения

$$D \ni x \mapsto K^{1,\omega}_{p,p}(x,\varphi) = \begin{cases} \frac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}\,\omega^{\frac{1}{p}}(\varphi(x))}, & \text{если } \det D\varphi(x) \ne 0, \\ 0, & \text{если } \det D\varphi(x) = 0, \end{cases} \tag{53}$$

принадлежит $L_\infty(D)$. Более того, $\left\|K^{1,\omega}_{p,p}(\cdot) \mid L_\infty(D)\right\| = 1$.

Для оценки нормы оператора композиции (52) применяем формулу замены переменной (50) (см. ниже интеграл (54)):

$$\begin{aligned}\big\|u\circ\varphi \mid L^1_p(D)\big\|^p &\le \int\limits_D |\nabla_{\mathscr L}(u\circ\varphi)(x)|^p\,d\mathscr{H}^\nu(x)\\ &\le \int\limits_D |\nabla_{\mathscr L}u(\varphi(x))|^p\frac{|D\varphi(x)|^p}{|\det D\varphi(x)|}|\det D\varphi(x)|\,d\mathscr{H}^\nu(x)\\ &\le \int\limits_{D'} |\nabla_{\mathscr L}u(y)|^p\frac{|D\varphi(\varphi^{-1}(y))|^p}{|\det D\varphi(\varphi^{-1}(y))|\omega(y)}\omega(y)\,d\mathscr{H}^\nu(y) \qquad (54)\\ &\le \big\|K^{1;\omega}_{p,p}(\cdot)\mid L_\infty(D)\big\|^p\cdot\big\|u\mid L^1_p(D';\omega)\big\|^p, \qquad (55)\end{aligned}$$

справедливую для любой функции $u\in L^1_p(D';\omega)\cap \mathrm{Lip}_l(D')$. Отсюда $\|\varphi^*\|\le \big\|K^{1;\omega}_{p,p}(\cdot)\mid L_\infty(D)\big\|=1$. $\square$

4.4.2. Гомеоморфизмы классов Соболева на группе Карно и регулярность обратных к ним. В следующем утверждении обобщаем на группы Карно утверждение 2.

Утверждение 40. *Пусть D,D' — области на группе Карно $\mathbb{G}$, а $\varphi:D\to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $\nu-1<p<\infty$, имеющий конечное искажение.*

Тогда обратный гомеоморфизм $f=\varphi^{-1}:D'\to D$ обладает следующими свойствами:

1) *f дифференцируем $\mathscr{H}^\nu$-п. в. в области D';*

2) *f имеет конечное искажение;*

3) *для $\mathscr{H}^\nu$-п. в. $y\in D'$ справедлива оценка*

$$|Df(y)|\le c_9|\det Df(y)|^{\frac{p-(\nu-1)}{p}}\omega(y)^{\frac{\nu-1}{p}}; \qquad (56)$$

4) *для любого открытого множества $U\subset D'$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_U |Df(y)|\,d\mathscr{H}^\nu(y)\le c_9\mathscr{H}^\nu(f(U))^{\frac{p-(n-1)}{p}}\omega(U)^{\frac{\nu-1}{p}} \qquad (57)$$

с весовой функцией (51) и постоянной $c_9=2^\nu\big(\frac{1}{c_{10}}\big)^{\frac{\nu-1}{p}}$ (последнее равенство обеспечено нормировкой $\mathscr{H}^\nu(B(0,r))=r^\nu$), где величина c_{10} определена ниже в неравенстве (59).

5) *принадлежит классу Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$.*

Утверждение 40 можно доказать, следуя схеме доказательств теорем 21 и 23. Ниже приведем основные рассуждения доказательства утверждения 40, акцентируя внимание на специфику геометрии групп Карно.

4.4.3. Оценки емкости на группах Карно. В основе доказательства утверждения 40 лежат оценки для емкости двух конденсаторов на группе Карно, аналогичные рассмотренным в разд. 2.1.

Непрерывная функция $u:D\to\mathbb{R}$ класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ называется *допустимой для конденсатора* $E=(F,U)$, если $u\equiv1$ на F и $u\equiv0$ вне U. Применяем символ $\mathscr{A}(E)$ для совокупности допустимых для конденсатора $E=(F,U)$ функций.

Далее обобщаем на группы Карно понятие емкости, определенное в (6) в евклидовых пространствах.

Емкость конденсатора $E=(F,U)$ в пространстве $L^1_q(D)$, $q\in[1,\infty)$, на группе Карно определим как величину
$$\operatorname{cap}\big(E;L^1_q(D)\big)=\inf_{u\in\mathscr{A}(E)\cap L^1_q(D)}\big\|u\mid L^1_q(D)\big\|^q,$$
где инфимум берется по всем функциям пересечения $\mathscr{A}(E)\cap L^1_q(D)$.

Весовые функции, весовые пространства Соболева $L^1_p(D';\omega)$ и пространство локально липшицевых функций $\operatorname{Lip}_l(D')$ на области D' метрического пространства $(\mathbb{G},d)$ определяются по аналогии с евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$ (см. (5)).

Весовая емкость конденсатора $E=(F,U)\subset D'$ в пространстве $L^1_p(D';\omega)$ на группе Карно — это величина
$$\operatorname{cap}\big(E;L^1_p(D';\omega)\big)=\inf_{u\in\mathscr{A}(E)\cap\operatorname{Lip}_l(D')}\big\|u\mid L^1_p(D';\omega)\big\|^p,$$
где инфимум берется по всем функциям $u\in\mathscr{A}(E)\cap\operatorname{Lip}_l(D')$.

Расстояние между двумя непустыми множествами $A_1,A_2\subset\mathbb{G}$ на группе Карно равно $\operatorname{dist}(A_1,A_2)=\inf\{d_c(x,y):x\in A_1,\ y\in A_2\}$.

Ниже применяется обозначение $\omega(E)=\int\limits_E\omega(y)\,d\mathscr{H}^\nu(y)$ для измеримого множества $E\subset\mathbb{G}$.

Лемма 41. *При* $1\le p<\infty$ *для весовой емкости конденсатора* $E=(F,U)$ *в* D' *справедлива оценка сверху*
$$\operatorname{cap}\big(E;L^1_p(U;\omega)\big)\le\frac{\omega(U\setminus F)}{\operatorname{dist}(F,\partial U)^p}.\tag{58}$$

Доказательство этого свойства аналогично доказательству леммы 19 с той лишь разницей, что вместо евклидова расстояния надо использовать расстояние Карно — Каратеодори.

Лемма 42 [18, лемма 5]. *Пусть* $\nu-1<q<\infty$. *Для конденсатора* $E=(F,U)$ *в* D *при условии связности множества* F *имеет место неравенство*
$$\operatorname{cap}^{\nu-1}\big(E;L^1_q(U)\big)\ge c_{10}^{\nu-1}\,\frac{(\operatorname{diam}F)^q}{\mathscr{H}^\nu(U)^{q-(\nu-1)}},\tag{59}$$
где c_{10} *— постоянная, зависящая только от* q *и геометрии группы.*

4.4.4. Доказательство утверждения 40. **I.** На этом шаге установим дифференцируемость отображения f. Воспользуемся схемой доказательства теоремы 21. С каждой точкой $y\in D'$ свяжем сферический конденсатор $E_r=(\overline{B_c(y,r)},B_c(y,2r))$, где $B_c(y,2r)\subset D'$, т. е. конденсатор, у которого граница состоит из двух компонент связности: двух концентрических сфер. Учитывая норму оператора $\|\varphi^*\|\le1$, имеем
$$\operatorname{cap}\big(f(E_r);L^1_p(f(B_c(y,2r)))\big)\le\operatorname{cap}\big(E_r;L^1_p(U;\omega)\big)\le\frac{\omega(B_c(y,2r))}{r^p}.$$
Используя для оценки емкости слева неравенство (59) при $q=p$:
$$c_{10}\frac{(\operatorname{diam}f(\overline{B_c(y,r)}))^{\frac{p}{\nu-1}}}{\mathscr{H}^\nu(f(B_c(y,2r)))^{\frac{p-(\nu-1)}{\nu-1}}}\le\operatorname{cap}\big(f(E_r);L^1_p(f(B_c(y,2r)))\big),$$
выводим
$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{diam}f(\overline{B(y,r)})}{r}&\le\frac{2^\nu c_{10}^{\frac{1-\nu}{p}}}{(2r)^\nu}\mathscr{H}^\nu(f(B(y,2r)))^{\frac{p-(\nu-1)}{p}}\omega(B(y,2r))^{\frac{\nu-1}{p}}\\&=2^\nu c_{10}^{\frac{1-\nu}{p}}\left(\frac{\mathscr{H}^\nu(f(B(y,2r)))}{\mathscr{H}^\nu(B(y,2r))}\right)^{\frac{p-(\nu-1)}{p}}\left(\frac{\omega(B(y,2r)}{\mathscr{H}^\nu(B(y,2r))}\right)^{\frac{\nu-1}{p}}.\end{aligned}$$

Устремляя r к 0, для $\mathscr{H}^\nu$-п. в. $y \in D'$ получаем

$$\varlimsup_{z\to y} \frac{d(f(z), f(y))}{d(z, y)} \le 2^\nu \left(\frac{1}{c_{10}}\right)^{\frac{\nu-1}{p}} \mathscr{V}'_\nu(y)^{\frac{p-(\nu-1)}{p}} \omega(y)^{\frac{\nu-1}{p}}, \tag{60}$$

где значение $\mathscr{V}'_\nu(y) = \lim\limits_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}^\nu(f(B(y,r)))}{\mathscr{H}^\nu(B(y,r))}$, равное объемной производной, конечно $\mathscr{H}^\nu$-п. в. в D' (см. (48)). По теореме Лебега о дифференцируемости интеграла $\lim\limits_{r\to 0} \frac{\omega(B(y,2r)}{\mathscr{H}^\nu(B(y,2r))} = \omega(y)$ для $\mathscr{H}^\nu$-п. в. $y \in D'$ (см., например, [72, гл. 1, § 3.1, следствие; 46; 47, следствие 3]).

Поскольку правая часть (60) конечна $\mathscr{H}^\nu$-п. в. в D', по теореме типа Степанова на группах Карно (см. [73, теорема 3.1]) отображение f дифференцируемо $\mathscr{H}^\nu$-п. в. в D'. Известно, что в точках дифференцируемости отображения f левая часть в (60) равна $|Df(y)|$ (см., например, [73, следствие 2.1]), а $\mathscr{V}'_\nu(y) = |\det Df(y)|$ (48).

II, III. С учетом вышеизложенного перепишем неравенство (60) следующим образом:

$$|Df(y)| \le c_9 |\det Df(y)|^{\frac{p-(\nu-1)}{p}} \omega(y)^{\frac{\nu-1}{p}},$$

где $c_9 = 2^\nu \left(\frac{1}{c_{10}}\right)^{\frac{\nu-1}{p}}$. Отсюда получаем поточечную оценку (56). Далее, очевидно, верно следующее: $Df(y) = 0$ на множестве $Z' = \{y \in D' : \det Df(y) = 0\}$ нулей якобиана $\det Df(y)$ всюду, за исключением множества нулевой $\mathscr{H}^\nu$-меры. Следовательно, f имеет конечное искажение.

IV. Для доказательства неравенства (57) следует проинтегрировать (56) и применить неравенство Гёльдера с учетом $\frac{p-(\nu-1)}{p} + \frac{\nu-1}{p} = 1$:

$$\int\limits_U |Df(y)|\, d\mathscr{H}^\nu(y) \le c_9 \Biggl(\int\limits_U |\det Df(y)|\, d\mathscr{H}^\nu(y)\Biggr)^{\frac{p-(\nu-1)}{p}} \Biggl(\int\limits_U \omega(y)\, d\mathscr{H}^\nu(y)\Biggr)^{\frac{\nu-1}{p}}.$$

Поскольку $\int\limits_U |\det Df(y)|\, d\mathscr{H}^\nu(y) \le \mathscr{H}^\nu(f(U))$ (см. (50)), выводим (57). Таким образом, $|Df(y)|$ локально суммируема в D'.

V. Остается доказать свойство 5. Для этого достаточно проверить, что $f \in \mathrm{ACL}(D')$. С учетом локальной суммируемости горизонтальных производных (см. (57)) получим требуемое (см. эквивалентное описание отображений $f \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$ на группах Карно в [73, предложение 4.2]).

Отметим, что приводимое ниже доказательство абсолютной непрерывности отображений на группах Карно новое и существенно отличается от такового в евклидовом пространстве (см. доказательство теоремы 23).

Шаг 1. Напомним, что символ $B_\rho(y,t)$ обозначает шар в метрическом пространстве $(\mathbb{G}, \rho)$ (см. (45)) с центром в точке y радиуса t.

Для доказательства $f \in \mathrm{ACL}(D')$ фиксируем $1 \le j \le n$. Для некоторого числа[10] $M \in (0, \infty)$ определим множества

$$\begin{gathered} P_{j0}(0,t) = \{y \in B_\rho(0,t) :\ y_j = 0\}, \quad t \in (0, M), \\ P_j(0,t) = \{z = y \exp y_j X_{1j} : y \in P_{j0}(0,t),\ |y_j| < t,\}, \quad t \in (0, M), \\ P_j(w,t) = wP_j(0,t) \subset D' \quad \text{для } w \in D' \text{ и } t \in (0, M). \end{gathered} \tag{61}$$

[10] Значение числа M обусловлено необходимостью обеспечить справедливость оценок (65)–(67); точное значение числа M для доказательства не требуется.

Заметим, что множество $P_j(0,t)$ является шаром в метрике $\rho_j(x,y)$, определяемой ниже: $y\in P_j(0,t)$ тогда и только тогда, когда $\rho_j(y)<t$, где однородная норма ρ_j определена условием:

$$\mathscr{G}\ni y\mapsto \rho_j(y)=\max(\{\rho(y):y_j=0\},|y_j|) \tag{62}$$

на алгебре Ли $\mathscr{G}$, а на группу переносится посредством глобальной системы координат $\exp(y)=\exp\left(\sum y_{ik}X_{ij}\right)\cdot\exp(y_jX_{1j})$, где индексы суммирования изменяются в пределах $1\le i\le m$, $1\le k\le n_1$, $k\ne j$ при $i=1$, $1\le k\le n_i$ при $i\ge 2$. Следовательно, квазиметрика $\rho_j(x,y)$ эквивалентна в смысле п. 4.1.4 как квазиметрике $\rho(x,y)$, так и метрике $d_c(x,y)$.

Применяя лемму о покрытии из [70, лемма 1.66] в случае $D'=\mathbb{G}$ или из [72, § 3.1, лемма 2] в случае $D'\ne\mathbb{G}$, выводим существование не более чем счетного семейства

$$\{P_j(w_k,t_k):P_j(0,t_k)\Subset P_j(0,M)\},\quad k\in\mathbb{N}, \tag{63}$$

множеств, указанного в (61) вида, покрывающих D': $D'=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}P_j(w_k,t_k)$.

Поэтому достаточно доказать абсолютную непрерывность отображения f на пересечении $\mathscr{H}^{\nu-1}$-п. в. интегральных линий горизонтального векторного поля X_{1j} с шаром $P_j(w_k,t_k)$ (здесь $\mathscr{H}^{\nu-1}$ — мера Хаусдорфа на поверхности $w_kP_{j0}(0,t_k)$, трансверсальной к слоению Γ_j, см. (46)). Так как $k\in\mathbb{N}$ и $j=1,\dots,n$ произвольные, ACL-свойство отображения f на области D' будет доказано.

Шаг 2. Фиксируем произвольное множество $P_j(w_k,t_k)$ из семейства (63). Изучение вопроса об абсолютной непрерывности отображения $f:P_j(w_k,t_k)\to D'$ сводим к изучению вопроса об абсолютной непрерывности композиции $f\circ l_{w_k}:P_j(0,t_k)\to D'$, где l_{w_k} — левый сдвиг: $\mathbb{G}\ni x\mapsto w_k\cdot x$.

Во избежание громоздких формул введем следующие обозначения:

$$Q_0=P_{j0}(0,t_k),\quad Q=P_j(0,t_k). \tag{64}$$

Очевидно, часть плоскости $Q_0\subset\{y\in\mathbb{G}:y_{1j}=0\}$ трансверсальна слоению Γ_j.

Рассмотрим ограничение $\tilde\rho=\rho|_{Q_0}$ метрики ρ на Q_0. Отметим применяемые ниже свойства метрической структуры $(Q_0,\tilde\rho)$ и мер $\mathscr{H}^{\nu-1}$, $\mathscr{H}^{N-1}$ на Q_0.

1. *Метрическая функция $\tilde\rho$ является квазиметрикой в смысле п.* 4.1.4, *т. е. функция $\tilde\rho:Q_0\times Q_0\to[0,\infty)$ обладает свойствами (a_1)–(c_1) п.* 4.1.4 *для всех точек $x,y\in Q_0$.*

2. *Мера Хаусдорфа $\mathscr{H}^{\nu-1}$* (*см. п.* 4.1.5) *удовлетворяет условию удвоения: для шара $B_{\tilde\rho}(y,t)$ и меры Хаусдорфа $\mathscr{H}^{\nu-1}$ на Q_0 справедливо соотношение*

$$\mathscr{H}^{\nu-1}(B_{\tilde\rho}(y,2t))\le\mu\mathscr{H}^{\nu-1}(B_{\tilde\rho}(y,t)) \tag{65}$$

для любой точки $y\in Q_0$ и шаров $B_{\tilde\rho}(y,2t)\subset Q_0$ с некоторой постоянной $\mu\in(0,\infty)$, не зависящей от точки $y\in Q_0$ и шара $B_{\tilde\rho}(y,2t)\subset Q_0$.

3. *Существуют постоянные $c_{11},c_{12}\in(0,\infty)$ такие, что*

$$c_{11}\mathscr{H}^{\nu-1}(A)\le\mathscr{H}^{N-1}(A)\le c_{12}\mathscr{H}^{\nu-1}(A) \tag{66}$$

для любого измеримого множества $A\subset Q_0$.

4. *Квазиметрическое пространство $(Q_0,\tilde\rho)$ с мерой Хаусдорфа $\mathscr{H}^{\nu-1}$, удовлетворяющей условию* (65), *является пространством однородного типа* (*см. определение, например, в* [72, 74]).

5. *Пространством однородного типа является также и метрическое пространство $(Q_0,\tilde\rho)$ с определенной на Q_0 мерой $\mathscr{H}^{N-1}$.*

Доказательство. Так как ограничение квазиметрики на произвольное множество наследует свойства квазиметрики, утверждение 1 доказано.

Свойство удвоения меры вытекает из [75, теорема 3.17], где доказано, что $\mathscr{H}^{\nu-1}(B_{\tilde\rho}(z,r)) \sim r^{\nu-1}$ равномерно[11)] по всем $z \in Q_0$ и $B_{\tilde\rho}(z,r) \subset Q$.

Более того, из [75, теоремы 3.7, 3.17] выводим, что мера Хаусдорфа $\mathscr{H}^{\nu-1}(A)$ множества $A \subset Q_0$ сравнима с мерой Хаусдорфа $\mathscr{H}^{N-1}(A)$: неравенства (66) вытекают из эквивалентностей

$$\mathscr{H}^{\nu-1}(B_{\tilde\rho}(z,r)) \sim r^{\nu-1} \quad \text{и} \quad \mathscr{H}^{N-1}(B_{\tilde\rho}(z,r)) \sim r^{\nu-1}, \tag{67}$$

равномерных по $z \in Q_0$ и $B_{\tilde\rho}(z,r) \subset Q_0$ (см. [75, теоремы 3.7, 3.17]).

Свойство 5 выводим из (66) и свойства 4. $\square$

Шаг 3. Отображение $h : Q_0 \times I_k \mapsto Q$, где $I_k = (-t_k, t_k)$ (см. (64)), определенное по правилу

$$Q_0 \times I_k \ni (z, y_j) \mapsto h(z, y_j) = (z, z \exp y_j X_{1j}), \tag{68}$$

является диффеоморфизмом. Можно подобрать $M > 0$ в (63) такое, чтобы неравенства

$$0 < \varkappa_1 \leq |\det h(z, y_j)| \leq \varkappa_2 < \infty \tag{69}$$

выполнялись для всех точек $(z, y_j) \in Q_0 \times I_k$ с постоянными $\varkappa_1$, $\varkappa_2 \in (0, \infty)$, не зависящими от $k \in \mathbb{N}$, где k из (63).

С помощью отображения (68) интегрирование по области Q можно перенести на открытое множество $Q_0 \times I_k$. Рассмотрим на $Q_0 \times I_k$ тензорное произведение Λ меры $\mathscr{H}^{\nu-1}$ на Q_0 с мерой $\mathscr{H}^1$ на I_k. В силу соотношений (66) мера Λ сравнима с мерой $\mathscr{H}^N$:

$$\varkappa_3 \Lambda(E) \leq \mathscr{H}^N(E) \leq \varkappa_4 \Lambda(E)$$

для любого измеримого множества $E \subset Q_0 \times I_k$. Постоянные $\varkappa_3$, $\varkappa_4 \in (0, \infty)$ не зависят от выбора множества $E \subset Q_0 \times I_k$. Следовательно, меры Λ и $\mathscr{H}^N$ абсолютно непрерывны одна относительно другой. Поэтому существует производная Радона — Никодима $\mathfrak{D}(x)$ меры $\mathscr{H}^N$ по мере Λ, удовлетворяющая соотношениям

$$\varkappa_3 \leq \mathfrak{D}(x) = \frac{d\mathscr{H}^N}{d\Lambda}(x) \leq \varkappa_4 \quad \text{для } \mathscr{H}^N\text{-п. в. } x \in Q_0 \times I_k. \tag{70}$$

Для функции $v(x) = |\det Dh(x)| \cdot \mathfrak{D}(x)$ из (69), (70) имеем оценки

$$\varkappa_1 \cdot \varkappa_3 \leq v(x) \leq \varkappa_2 \cdot \varkappa_4 \quad \text{для } \mathscr{H}^N\text{-п. в. } x \in Q_0 \times I_k. \tag{71}$$

Если $u \in L_1(Q)$ — неотрицательная функция, то в силу (71) тем же свойством обладает произведение $u \cdot v$. Из вышеизложенного с помощью формулы

[11)] В контексте настоящей работы величина $\mathscr{H}^{\nu-1}(B_{\tilde\rho}(z,r))$ эквивалентна $r^{\nu-1}$ на Q_0 тогда и только тогда, когда существуют положительные числа ζ_1 и ζ_2 такие, что неравенство $\zeta_1 r^{\nu-1} \leq \mathscr{H}^{\nu-1}(B_{\tilde\rho}(z,r)) \leq \zeta_2 r^{\nu-1}$ выполняется для всех $z \in Q_0$ и всех r таких, что $B_{\tilde\rho}(z,r) \subset Q_0$.

замены переменной (13) выводим

$$\int\limits_{Q} u(y)\,d\mathscr{H}^\nu(y) = \int\limits_{Q_0\times I_k} u(h(x))|\det Dh(x)|\,d\mathscr{H}^\nu(x)$$

$$= \int\limits_{Q_0\times I_k} u(h(x))|\det Dh(x)|\cdot \mathfrak{D}(x)\,d\Lambda(x) = \int\limits_{Q_0} dz \int\limits_{I_k} u(h(x))v(z,t)\,dt$$

$$= \int\limits_{Q_0} dz \int\limits_{I_k} u(z,\gamma_z(\tau))v(h^{-1}(z,\gamma_z(\tau)))\,d\mathscr{H}^1(\tau), \quad (72)$$

где кривая $\gamma_z : I_k \to \mathbb{G}$, определенная условием $\gamma_z(\tau) = z\exp\tau X_{1j}$, имеет касательный вектор $|\dot\gamma_z(\tau)| = 1$, $\tau \in I_k$. (Здесь точки $Q_0\times I_k$ записаны как пары (z,t), $z_0\in Q_0$, $t\in I_k$, а точки Q — как пары $(z,\gamma_z(\tau))$, $z_0\in Q_0$, $\tau\in I_k$.)

Шаг 4. С каждой точкой $z\in Q_0$ (см. (64)) и числом $r\in(0,t_k)$ таким, что $B_{\tilde\rho}(z,r)\subset Q_0$, ассоциируем трубчатую окрестность

$$E(z,r) = \bigcup_{\tau\in(-t_k,t_k)} B_c(z\exp\tau X_{1j}, r).$$

Нас интересует поведение отношения

$$\frac{\mathscr{H}^\nu(f(E(z,r)))}{r^{\nu-1}}$$

при $r\to 0$. В [67, основная лемма] ([76, лемма 3]) на группах Гейзенберга (Карно) доказано, что верхний предел этого отношения конечен для п. в. $z\in Q_0$:

$$\overline{\mathscr{V}}'(z) = \varlimsup_{r\to 0}\frac{\mathscr{H}^\nu(f(E(z,r)))}{r^{\nu-1}} < \infty \quad (73)$$

для $\mathscr{H}^{\nu-1}$-п. в. точек $z\in Q_0$ (здесь и далее $\mathscr{V}(z,r) = \mathscr{H}^\nu(f(E(z,r)))$). Таким образом, неравенство $\overline{\mathscr{V}}'(z)<\infty$ выполняется во всех точках $z\in Q_0\setminus T'$, где $T'\subset Q_0$ — некоторое множество нулевой $\mathscr{H}^{\nu-1}$-меры.

Шаг 5. На интервале $I_k = (-t_k,t_k)$ (см. (64)) возьмем произвольные дизъюнктные отрезки $\Delta_1 = [a_1,b_1]$, $\Delta_2 = [a_2,b_2],\dots,\Delta_l = [a_l,b_l]$ с длинами $b_1,b_2,\dots,b_l$ такими, что и $b_1+b_2+\dots+b_l<2t_k$.

Фиксируем достаточно малое положительное число $r\in(0,t_k)$ такое, что $B_{\tilde\rho}(z,r)\subset Q_0$. С точкой z и интервалом Δ_i ассоциируем открытое множество

$$U_i(z,r) = \bigcup_{\tau\in\Delta_i} B_c(z\exp\tau X_{1j}, r). \quad (74)$$

Пусть $r>0$ выбрано настолько малым, что открытые множества $U_1(z,r),\dots,U_l(z,r)$ дизъюнктны и $U_i(z,r)\subset Q$, $i=1,\dots,l$ (см. (63) и (64)).

Рассмотрим континуум $F_i = \{z\exp\tau X_{1j} : \tau\in\Delta_i\}$ и конденсатор $E_i = (F_i, U_i(z,r))$. По лемме 41 верна оценка

$$\operatorname{cap}\bigl(E_i; L^1_p(U_i(z,r);\omega)\bigr) \le \frac{\omega(U_i(z,r))}{r^p} = \frac{\int\limits_{U_i(z,r)}\omega(y)\,dy}{r^p}, \quad i=1,\dots,l.$$

С другой стороны, при $\nu-1<p<\infty$ из леммы 42 вытекает, что

$$c_{10}^{\frac{\nu-1}{p}}\frac{\operatorname{diam} f(F_i)}{\mathscr{H}^\nu(f(U_i(z,r)))^{\frac{p-(\nu-1)}{p}}} \le \operatorname{cap}^{\frac{\nu-1}{p}}\bigl(f(E_i); L^1_p(U_i)\bigr).$$

Из последних двух соотношений, учитывая неравенство (55), выводим, что

$$\operatorname{diam} f(F_i)) \leq \left(\frac{1}{c_{10}}\right)^{\frac{\nu-1}{p}} \frac{1}{r^{\nu-1}} \mathscr{H}^\nu(f(U_i(z,r)))^{\frac{p-(\nu-1)}{p}} \omega(U_i(z,r))^{\frac{\nu-1}{p}}. \tag{75}$$

Суммируя неравенство (75) по $i = 1,\dots,l$, применяя неравенство Гёльдера и используя свойства квазиаддитивных функций, приходим к соотношениям

$$\sum_{i=1}^{l} \operatorname{diam} f(F_i) \leq \left(\frac{1}{c_{10}}\right)^{\frac{\nu-1}{p}} \frac{1}{r^{\nu-1}} \left(\sum_{i=1}^{l} \mathscr{H}^\nu(f(U_i(z,r)))\right)^{\frac{p-(\nu-1)}{p}} \left(\sum_{i=1}^{l} \omega(U_i(z,r))\right)^{\frac{\nu-1}{p}}$$

$$\leq c_{13} \cdot c_{14} \left(\frac{\mathscr{V}_\nu(z,r)}{r^{\nu-1}}\right)^{\frac{q-(\nu-1)}{q}} \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{l} \omega(U_i(z,r))}{r^{\nu-1}}\right)^{\frac{\nu-1}{p}}, \tag{76}$$

где $c_{13} = \left(\frac{1}{c_{10}}\right)^{\frac{\nu-1}{p}}$, $c_{14} = (\beta_\nu(2\alpha)^\nu)^{\frac{\nu-1}{p}}$, а постоянная $\beta_\nu(2\alpha)^\nu$ будет определена ниже в (81).

Заметим, что левая часть (76) не зависит от r. Поэтому перейти к пределу в правой части (76) можно по любой последовательности $r_p \to 0$ при $p \to \infty$. Устремляя $r \to 0$, докажем следующее неравенство, справедливость которого при $\mathscr{H}^{\nu-1}$-п. в. $z \in Q_0$ обусловлена существованием пределов в двух скобках выражения (76) для $\mathscr{H}^{\nu-1}$-п. в. $z \in Q_0$ (см. детали после формулы (77)):

$$\sum_{i=1}^{l} \operatorname{diam} f(F_i) \leq l c_{13} \cdot c_{14} (\overline{\mathscr{V}}'(z))^{\frac{p-(\nu-1)}{p}} \left(\int\limits_{\bigcup_{i=1}^{l} \Delta_i} \omega(z,\tau)\, d\gamma_z(\tau) \right)^{\frac{\nu-1}{p}}, \tag{77}$$

где $\Delta_i \ni \tau \mapsto \gamma_z(\tau) = z \exp(\tau X_{1j})$. Первое частное в скобках (см. (76)) имеет конечный предел (73) во всех точках $z \in Q_0 \setminus T'$, где T' имеет $\mathscr{H}^{\nu-1}$-меру нуль (это оговорено на шаге 4).

Докажем, что второй сомножитель выражения (76) имеет конечный предел, указанный в выражении (77), при $\mathscr{H}^{\nu-1}$-п. в. $z \in Q_0$ для некоторой последовательности $r_p \to 0$ при $p \to \infty$.

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим отдельное слагаемое во втором сомножителе формулы (76), например, с номером i (из существования предела для каждого слагаемого получаем существование предела и для конечного набора слагаемых). Вспоминая определение множества $U_i(z,r)$ в (74), имеем

$$\omega(U_i(z,r)) = \int\limits_{U_i(z,r)} \omega(y)\, dy.$$

Для достаточно малого $r > 0$ положим $\tau_m = a_i + mr$ при $m = 0,1,\dots,m_r$, где m_r — наименьшее натуральное число такое, что $\tau_{m_r} \geq b_i$. Для произвольного $\zeta \in (\tau_{m-1}, \tau_m)$ и некоторого $\zeta_m \in (\tau_{m-1}, \tau_m)$, выбираемого ниже в формуле (79), получаем включения

$$B_c(z \exp \zeta X_{1j}, r) \subset B_c(z \exp \zeta_m X_{1j}, 2r) \subset B_\rho(z \exp \zeta_m X_{1j}, 2\alpha r), \tag{78}$$

где α — положительная постоянная такая, что $B_c(y,r) \subset B_\rho(y,\alpha r)$ для всех $y \in \mathbb{G}$ и $\rho > 0$.

При фиксированном r для любого $m = 1,2,3,\dots,m_r$ имеем равенства

$$\frac{1}{r} \int\limits_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \omega(B_\rho(z \exp \tau X_{1j}, 2\alpha r))\, d\tau = \omega(B_\rho(z \exp \zeta_m X_{1j}, 2\alpha r)), \tag{79}$$

поскольку функция $\tau \mapsto \omega(B_\rho(z \exp \tau X_{1j}, 2\alpha r))$ непрерывна ($\zeta_m \in (\tau_{m-1}, \tau_m)$ — число, существование которого обусловлено теоремой о среднем). При таком выборе $\{\zeta_m\}$, $m = 1, 2, \dots, m_r$, из (74) и (78) выводим включение

$$U_i(z, r) \subset \bigcup_m B_\rho(z \exp \zeta_m X_{1j}, 2\alpha r),$$

где объединение идет по m, указанным выше. Отсюда с учетом (79) приходим к соотношениям

$$\omega(U_i(z,r)) \leq \sum_m \omega(B_\rho(z \exp \zeta_m X_{1j}, 2\alpha r)) = \frac{1}{r} \int_{a_i}^{\tau_{m_r}} \omega(B_\rho(z \exp \tau X_{1j}, 2\alpha r))\, d\tau. \tag{80}$$

Из (80) выводим

$$\frac{\omega(U_i(z,r))}{r^{\nu-1}} \leq \beta_\nu (2\alpha)^\nu \int_{a_i}^{\tau_{m_r}} \frac{\omega(B_\rho(z \exp \tau X_{1j}, 2\alpha r))}{\mathscr{H}^N(B_\rho(e, 2\alpha r))}\, d\tau, \tag{81}$$

где $\beta_\nu = \mathscr{H}^N(B_\rho(e,1))$ — объем шара $B_\rho(e,1)$. Подынтегральное выражение в (81) представляет собой значение функции

$$\omega_r(y) = \frac{1}{\mathscr{H}^N(B_\rho(e, 2\alpha r))} \int_{B_\rho(y, 2\alpha r)} \omega(w)\, dw$$

в точке $y = z \exp \tau X_{1j}$, а сама функция $\omega_r(y)$ — это аналог среднего по Стеклову функции $\omega(y)$ на группе Карно. Известно (см., например, [70, предложение 1.20]), что

$$\|\omega_r(\cdot) - \omega(\cdot) \mid L_1(Q)\| \to 0 \quad \text{при } r \to 0.$$

Более того, применяя формулу (72), приходим к сходимости

$$\int_{I_k} |\omega_{r_p}(z \exp \tau X_{1j}) - \omega(z \exp \tau X_{1j})|\, d\tau \to 0 \tag{82}$$

для некоторой последовательности $r_p \to 0$, когда $p \to \infty$, для всех $z \in Q_0 \setminus \Sigma_j$, где $\mathscr{H}^{\nu-1}(\Sigma_j) = 0$. Отсюда, в частности, имеем, что функция $I_k \ni \tau \mapsto \omega(z \exp \tau X_{1j})$ суммируема на I_k для всех $z \in Q_0 \setminus \Sigma_j$.

Очевидно, что сходимость (82) имеет место также на любом интервале $(a_i, b_i + \delta_i) \subset I_k$ (здесь δ_i — произвольное число из промежутка $(0, t_k - b_i)$), а функция $(a_i, b_i + \delta_i) \ni \tau \mapsto \omega(z \exp \tau X_{1j})$ суммируема на $(a_i, b_i + \delta_i)$ для всех $z \in Q_0 \setminus \Sigma_j$.

На основании изложенного из (81), (82) для всех $z \in Q_0 \setminus \Sigma_j$ получаем

$$\begin{aligned}\varlimsup_{p\to\infty} \frac{\omega(U_i(z, r_p))}{r_p^{\nu-1}} &\leq \beta_\nu (2\alpha)^\nu \lim_{p\to\infty} \int_{a_i}^{b_i+\delta} \omega_{r_p}(z \exp \tau X_{1j})\, d\tau \\ &= \beta_\nu (2\alpha)^\nu \int_{a_i}^{b_i+\delta} \omega(z \exp \tau X_{1j})\, d\tau \end{aligned} \tag{83}$$

для любого числа $\delta \in (0, \delta_i)$ (здесь принято во внимание, что $\tau_{m_r} \geq b_i$ и $\tau_{m_r} \to b_i$ при $r \to 0$). Учитывая произвол в выборе $\delta > 0$ и абсолютную непрерывность интеграла Лебега, из (83) выводим

$$\varlimsup_{p\to\infty}\frac{\omega(U_i(z,r_p))}{r_p^{\nu-1}}\le\beta_\nu(2\alpha)^\nu\int\limits_{a_i}^{b_i}\omega(z\exp\tau X_{1j})\,d\tau.$$

С учетом того, что количество слагаемых во втором сомножителе (76) конечное, неравенство (77) доказано для всех точек $z\in Q_0\setminus(T'\cup\Sigma_j)$, где объединение $T'\cup\Sigma_j\subset Q_0$ имеет $\mathscr{H}^{\nu-1}$-меру нуль.

Шаг 6. Неравенство (77) показывает также, что абсолютная непрерывность отображения $f:\gamma_z\to D$ при фиксированном z обеспечена абсолютной непрерывностью интеграла

$$\int\limits_{I_k}\omega(z\exp\tau X_{1j})\,d\tau$$

на промежутке $\{z\exp tX_{1j}:\ t\in I_k\}$ интегральной линии векторного поля X_{1j}. Следовательно, неравенство (77) можно распространить на произвольный счетный дизъюнктный набор отрезков $\Delta_i\subset I_k$.

Так как j может быть произвольным натуральным числом от 1 до n, абсолютная непрерывность отображения $f:D'\to D$ доказана. Отсюда с учетом (57) доказано также, что $f\in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$ (см. детали в [73, предложение 4.2]).

4.5. Применения. В работе [18] сформулирована следующая

Теорема 43 [18, теорема 9]. *Пусть D и D' — области на группе Карно. Предположим, что гомеоморфизм $\varphi:D\to D'$ индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi^*:L^1_p(D')\cap\mathrm{Lip}_l(D')\to L^1_q(D)$, $\nu-1<q\le p<\infty$. Тогда обратное отображение $\varphi^{-1}:D'\to D$ индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi^{-1*}:L^1_r(D)\cap\mathrm{Lip}_l(D)\to L^1_s(D')$, где $r=\frac{q}{q-(\nu-1)}$ и $s=\frac{p}{p-(\nu-1)}$.*

Однако ее доказательство, приведенное в [18], содержит пробелы, перешедшие из [17], которые устранимы с помощью результатов § 4. (Пробел из [17] устранен и в [20, теорема 6] и, другим методом, в теореме 23 настоящей работы.)

Действительно, если гомеоморфизм $\varphi:D\to D'$ индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi^*:L^1_p(D')\cap\mathrm{loc}_l(D')\to L^1_q(D)$, то $\varphi\in L^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$ и φ имеет конечное искажение (см. [18, предложение 1, теорема 2]). В силу утверждения 40 обратное отображение φ^{-1} принадлежит $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$ и имеет конечное искажение. Последнее свойство является необходимым для того, чтобы $\varphi^{-1}:D'\to D$ индуцировало ограниченный оператор композиции $\varphi^{-1*}:L^1_r(D)\cap\mathrm{Lip}_l(D)\to L^1_s(D')$, где $r=\frac{q}{q-(\nu-1)}$ и $s=\frac{p}{p-(\nu-1)}$. В [18] доказательство конечности искажения φ^{-1} не приводится.

4.6. Обобщение. Метод из § 4 применим также для обобщения теорем 21 и 23 на непрерывные открытые дискретные отображения групп Карно.

Благодарность. Выражаю искреннюю благодарность рецензенту за критическое рассмотрение рукописи и комментарии, которые помогли улучшить первоначальный вариант работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hencl S., Koskela P.* Regularity of the inverse of a planar Sobolev homeomorphism // Arch. Rat. Mech. Anal. 2006. V. 180. P. 75–95.

2. *Onninen J.* Regularity of the inverse of spatial mappings with finite distortion // Calc. Var. and PDE. 2006. V. 26, N 3. P. 331–341.
3. *Ball J. M.* Global invertibility of Sobolev functions and the interpenetration of matter // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1981. V. 88, N 3–4. P. 315–328.
4. *Menchoff D.* Sur les différentielles totales des fonctions univalentes // Math. Ann. 1931. V. 105, N 1. P. 75–85.
5. *Gehring F. W., Lehto O.* On the total differentiability of functions of a complex variable // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. 1959. V. 272. P. 1–9.
6. *Martio O., Ryazanov O. , Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. New York: Springer-Verl., 2008.
7. *Водопьянов С. К.* Основы квазиконформного анализа двухиндексной шкалы пространственных отображений // Докл. АН. 2019. Т. 484, № 2. С. 142–146.
8. *Водопьянов С. К.* Основы квазиконформного анализа двухиндексной шкалы пространственных отображений // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 5. С. 1020–1056.
9. *Водопьянов С. К.* О дифференцируемости отображений класса Соболева W^1_{n-1} с условиями на функцию искажения // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 6. С. 1240–1267.
10. *Водопьянов С. К.* Операторы композиции в весовых пространствах Соболева и теория $\mathscr{Q}_p$-гомеоморфизмов .. Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 494, № 5. С. 21–25. DOI: 10.31857/S268695432005046X.
11. *Водопьянов С. К.* Об аналитических и геометрических свойствах отображений в теории $\mathscr{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмов // Мат. заметки. 2020. Т. 108, № 6. С. 924–928.
12. *Водопьянов С. К., Томилов А. О.* Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа // Изв. РАН. Сер. мат. 2021. Т. 85. DOI: 10.4213/im9082.
13. *Водопьянов С. К.* Формула Тейлора и функциональные пространства. Новосибирск: НГУ, 1988.
14. *Водопьянов С. К.* Отображения однородных групп и вложения функциональных пространств. // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 25–41.
15. *Водопьянов С. К.* Весовые пространства Соболева и теория отображений // Всесоюз. математическая шк. «Теория потенциала» Кацивели, 26 июня – 3 июля 1991 г. Тез. докл. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. С. 7.
16. *Водопьянов С. К.* Геометрические аспекты пространств обобщенно-дифференцируемых функций. Автореф. дис. … докт. физ.-мат. наук. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1992.
17. *Ухлов А. Д.* Отображения, порождающие вложения пространств Соболева // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 1. С. 185–192.
18. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Пространства Соболева и (P,Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 776–795.
19. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Операторы суперпозиции в пространствах Соболева // Изв. вузов. Математика. 2002. № 10. С. 11–33.
20. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 10. С. 3–32.
21. *Соболев С. Л.* О некоторых группах преобразований n-мерного пространства // Докл. АН. 1941. Т. 32, № 6. С. 380–382.
22. *Мазья В. Г.* Классы множеств и теоремы вложения функциональных классов. Некоторые проблемы теории эллиптических операторов. Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. Л.: Ленингр. ун-т, 1961.
23. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
24. *Mostow G. D.* Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1968. V. 34, N 1. P. 53–104.
25. *Reiman M.* Über harmonishe Kapazität und quasikonforme Abbildungen in Raum // Comm. Math. Helv. 1969. V. 44. P. 284–307.
26. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin: Springer-Verl., 1971. (Lecture Notes in Math.; V. 229).
27. *Gehring F. W.* Lipschitz mappings and the p-capacity of rings in n-space // Advances in the theory of Riemann surfaces. Princeton: Princeton Univ. Press, 1971. P. 175–193.
28. *Lelong-Ferrand J.* Etude d'une classe d'applications liées à des homomorphismes d'algèbres de fonctions et généralisant les quasi-conformes // Duke Math. 1973. V. 40. P. 163–186.

29. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Структурные изоморфизмы пространств W_n^1 и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 224–246.
30. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Функциональные характеристики квазиизометрических отображений // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 4. С. 768–773.
31. *Романов А. С.* О замене переменной в пространствах потенциалов Бесселя и Рисса // Функциональный анализ и математическая физика. Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1985. С. 117–133.
32. *Водопьянов С. К.* L_p-теория потенциала и квазиконформные отображения на однородных группах // Современные проблемы геометрии и анализа. Новосибирск: Наука, 1989. С. 45–89.
33. *Vodopyanov S. K.* Composition operators on Sobolev spaces // Complex analysis and dynamical systems. II: A conf. in honor of Professor Lawrence Zalcman's Sixtieth Birthday, June 9–12, 2003, Nahariya, Israel. Eds: M. Agranovsky, L. Karp, D. Shoikhet. Ann Arbor: Amer. Math. Soc., 2005. P. 327–342. (AMS Contemp. Math.; V. 382).
34. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиизометрические отображения // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1001–1039.
35. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и метрические свойства отображений // Докл. АН. 2015. Т. 464, № 2. С. 131–135.
36. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 5. С. 989–1029.
37. *Водопьянов С. К.* О допустимых заменах переменных для функций классов Соболева на (суб)римановых многообразиях // Докл. АН. 2016. Т. 468, № 6. С. 609–613.
38. *Водопьянов С. К.* Допустимые замены переменных для функций классов Соболева на (суб)римановых многообразиях // Мат. сб. 2019. Т. 210, № 1. С. 63–112.
39. *Водопьянов С. К.* Изоморфизмы соболевских пространств на римановых многообразиях и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 996–1034.
40. *Molchanova A., Vodop'yanov S.* Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity // Calculus of Variations and PDE. 2020. V. 59, N 1. P. DOI: 10.1007/s00526-019-1671-4 (on-line first).
41. *Байкин А. Н., Водопьянов С. К.* Емкостные оценки, теоремы типа Лиувилля и об устранении особенностей для отображений с ограниченным (p, q)-искажением // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 2. С. 290–321.
42. *Ukhlov A. D., Vodop'yanov S. K.* Mappings associated with weighted Sobolev spaces // Complex analysis and dynamical systems. III. Ann Arbor; Providence: Amer. Math. Soc., 2008. P. 369–382. (AMS Contemp. Math; V. 455).
43. *Koskela P., Panka P., Zhang Yi Ru-Ya.* Ahlfors reflection theorem for p-morphisms. arXiv: 1912.09200v2.
44. *Ambrosio L., Tilli P.* Topics on analysis in metric spaces. New York: Oxford Univ. Press, 2004.
45. *Rado I., Reichelderfer P. V.* Continuous transformations in analysis with an introduction to algebraic topology. Berlin: Springer-Verl., 1955.
46. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Операторы суперпозиции в пространствах Лебега и дифференцируемость квазиаддитивных функций множества // Владикавказ. мат. журн. 2002. Т. 4, № 1. С. 11–33.
47. *Vodop'yanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I // Sib. Adv. Math. 2004. V. 14, N 4. P. 78–125.
48. *Rickman S.* Quasiregular mappings. Berlin etc.: Springer-Verl., 1993. (Universitext).
49. *Federer H.* Geometric measure theory. New York: Springer-Verl., 1960.
50. *Эванс Л. К., Гариепи Р. Ф.* Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск: Науч. книга, 2002.
51. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
52. *Vodopyanov S. K.* Moduli inequalities for $W^1_{n-1,\mathrm{loc}}$-mappings with weighted bounded (q, p)-distortion // Complex Variables and Elliptic Equations. 2020. V. 65. https://doi.org/10.1080/17476933.2020.1825396.
53. *Hajłasz P.* Change of variables formula under minimal assumptions // Colloquium mathematicum. 1993. V. LXIV, N 1. P. 93–101.
54. *Решетняк Ю. Г.* Некоторые геометрические свойства функций и отображений с обобщенными производными // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7, № 4. С. 886–919.

55. *Martio O., Malý J.* Lusin's condition (N) and mappings of the class $W^{1,n}$ // J. Reine Angew. Math. NN. 1995. V. 48, N 5. P. 19–36.
56. *Водопьянов С. К.* О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 6. С. 67–86.
57. *Шварцман П. А.* Теоремы продолжения для пространств функций, определяемых локальными приближениями. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ярославль: Яросл. ун-т, 1983.
58. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1969. V. 448. P. 1–40.
59. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб. 1986. Т. 130, № 2. С. 185–206.
60. *Brakalova M. A., Jenkins J. A.* On solutions of the Beltrami equation // J. d'Anal. Math. 1998. V. 76. P. 67–92.
61. *Салимов Р. Р.* Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений // Изв. РАН. Сер. мат. 2008. Т. 72, № 5. С. 141–148.
62. *Salimov R., Sevost'yanov E.* ACL and differentiability of open discrete ring (p, Q)-mappings // Mat. Studii. 2011. V. 35. P. 28–36.
63. *Трохимчук Ю. Ю.* Непрерывные отображения и условия моногенности. М.: Физматгиз, 1963.
64. *Afanas'eva O. S., Ryazanov V. I., Salimov R. R.* Toward the theory of the Sobolev classes with critical exponent // Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2019. V. 8. P. 3–8.
65. *Tengvall V.* Differentiability in the Sobolev space $W^{1,n-1}$ // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. 2014. V. 51, N 12. P. 381–399.
66. *Mostow G. D.* Quasi-conformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1968. V. 34. P. 53–104.
67. *Korányi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111. P. 1–87.
68. *Menshoff D.* Sur les conditions suftisantes pour qu'une fonction univalente soit holomorphe // Мат. сб. 1933. V. 40, N 1. P. 3–23.
69. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espacies symétriques de rang un // Ann. Math. 1989. V. 129, N 2. P. 1–60.
70. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1982. (Math. Notes; V. 28).
71. *Bonfiglioli A., Lanconelli E. Uguzzoni F.* Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2007. (Universitext).
72. *Stein E. M.* Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993. (Universitext).
73. *Vodop'yanov S. K.* $\mathscr{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Proc. on analysis and geometry. Novosibirsk: Sobolev Inst. Press, 2000. P. 603–670.
74. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978.
75. *Karmanova M., Vodopyanov S.* A coarea formula for smooth contact mappings of Carnot–Carathéodory spaces // Acta Appl. Math. 2013. V. 128. P. 67–111.
76. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* Аналитические свойства квазиконформных отображений на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 6. С. 1317–1327.

Поступила в редакцию 18 июля 2020 г.
После доработки 26 сентября 2020 г.
Принята к публикации 9 октября 2020 г.

Водопьянов Сергей Константинович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`vodopis@math.nsc.ru`