А. А. Туганбаев, О квазипроективных модулях, *Сиб. матем. журн.*, 1980, том 21, номер 3, 177–183

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXI МАЙ — ИЮНЬ 1980

УДК 512.553

А. А. ТУГАНБАЕВ

О КВАЗИПРОЕКТИВНЫХ МОДУЛЯХ

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, модули унитарными и правыми. Слова нетерово кольцо, наследственное кольцо и т. п. означают, что соответствующие условия выполнены с обеих сторон.

Пусть M и N — модули. Модуль M называется *N-проективным*, если для любого эпиморфизма $h: N \to \bar{N}$ и произвольного гомоморфизма $f_1: M \to \bar{N}$ найдется гомоморфизм $f: M \to N$ такой, что $f_1 = hf$. *Квазипроективным* модулем называется M-проективный модуль M. Квазипроективные абелевы группы описаны в ([1]), а квазипроективные модули над коммутативными дедекиндовыми областями — в ([2]) (частичное описание было дано в ([3])). Описание квазипроективных модулей над ограниченными наследственными нетеровыми первичными кольцами без собственных идемпотентных идеалов было получено в ([4]).

Основным результатом данной работы является полное описание строения квазипроективных модулей над ограниченными наследственными нетеровыми первичными кольцами (теорема 2).

Модуль M называется *малопроективным*, если для любого эпиморфизма $h: M \to \bar{M}$ и произвольного эндоморфизма $\bar{f}$ модуля $\bar{M}$ найдется эндоморфизм f модуля M такой, что $\bar{f}h = hf$. Квазипроективный модуль всегда малопроективен (надо положить $f_1 = \bar{f}h$), но квазициклическая абелева группа является малопроективной и не квазипроективной. *Специальным кольцом* мы будем называть кольцо матриц над (не обязательно коммутативной) локальной областью главных односторонних идеалов, полной в топологии, определяемой степенями своего радикала Джекобсона. Если M — модуль без кручения (в смысле Леви) над ограниченным наследственным нетеровым первичным кольцом R, то малопроективность (квазипроективность) модуля M равносильна тому, что либо M — проективный модуль, либо R — специальное кольцо и $M = M_1 \oplus M_2$, где M_1 — инъективный конечномерный модуль, а M_2 — проективный модуль конечного ранга.

Через $E(M)$ и $\mathrm{End}(M)$ обозначаются соответственно инъективная оболочка и кольцо эндоморфизмов модуля M, $d(M)$ обозначает длину композиционного ряда артинова и нетерова модуля M. Радикал Джекобсона кольца R обозначается через $J(R)$. Если A — идеал кольца R, то полагаем $A^0 = R$. Подмодуль N модуля M называется *большим*, если $N \cap L \neq 0$ для любого ненулевого подмодуля L из M. Модуль M называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Модуль M называется *цепным* (*однорядным*), если все его подмодули образуют цепь (конечную цепь) по включению. Артиново кольцо R называется *обобщенно-однорядным*, если каждый неразложимый односторонний идеал кольца R является однорядным. Модуль M называется *наследственным*, если все его подмодули проективны. *Подфактором* модуля M называется подмодуль некоторого фактор-модуля

модуля M. Модули M и N называются *эквивалентными*, если существуют эпиморфизмы $f: M \to N$ и $g: N \to M$. Модуль M называется *конечномерным*, если M не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей. В этом случае существует конечная верхняя грань $\dim(M)$ числа ненулевых членов в прямых суммах подмодулей модуля M ([5], с. 260. Конечномерное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов называется *правым кольцом Голди*. Кольцо R называется *ограниченным*, если каждый его большой односторонний идеал содержит ненулевой идеал кольца R. *Регулярным элементом* называется элемент кольца, не являющийся односторонним делителем нуля. Если X — подмножество модуля M, то аннулятор множества X в кольце R обозначим через $r(X)$. Через $Z(M)$ обозначим совокупность всех элементов модуля M, аннуляторы которых содержат регулярные элементы кольца R. Модуль M называется *периодическим* (модулем без кручения), если $Z(M)=M$ ($Z(M)=0$). Если $0 \neq Z(M) \neq M$, то M называется *смешанным модулем*.

Пусть R — ограниченное наследственное нетерово первичное кольцо. Тогда через $\mathcal{A}(R)$ обозначим множество всех идеалов кольца R, максимальных в множестве всех собственных обратимых идеалов кольца R. (Обратимость рассматривается в классическом кольце частных кольца R.) Если M — модуль над R и $A \in \mathcal{A}(R)$, то через M_A обозначим A-примарную компоненту модуля M, т. е. подмодуль в M, состоящий из всех элементов, аннулируемых некоторыми степенями идеала A. Элемент a модуля M называется *равномерным*, если aR — равномерный модуль. Через $\mathrm{ex}(M, A)$ обозначим наименьшую степень идеала A, аннулирующую модуль M (если, конечно, M аннулируется какой-нибудь степенью A).

Лемма 1. *Пусть M_1 и M_2 — подмодули малопроективного модуля M, $M_2 \subset M_1$, $f_1: M \to M_1/M_2$ — такой гомоморфизм, что $M_2 \subset T$, где $T = \mathrm{Ker}\, f_1$. Тогда существует гомоморфизм $f: M \to M_1$ такой, что $f_1 = hf$, где $h: M \to M/M_2$ — естественный эпиморфизм.*

Доказательство. Пусть $g: M/M_2 \to M/T$, $t: M \to M/T$ — естественные эпиморфизмы, $f_2: M/T \to M_1/M_2$ — естественный мономорфизм, индуцированный гомоморфизмом f_1, $\bar{f} = f_2 g: M/M_2 \to M_1/M_2$ — эндоморфизм модуля M/M_2. Тогда $t = gh$, $f_1 = f_2 t$. Поскольку M — малопроективный модуль, найдется эндоморфизм f модуля M такой, что $hf = \bar{f}h = f_2 gh = f_2 t = f_1$. Заметим, что из построения f вытекает включение $fM \subset M_1 + M_2 = M_1$.

Лемма 2. *Пусть A — правый идеал кольца R, M — малопроективный R-модуль, M_1 — наследственный подмодуль в MA и существует эпиморфизм $g: M_1 \to M/MA$. Тогда $M = F \oplus M'$, где F — наследственный модуль и $M' = M'A$.*

Доказательство. Пусть $M_2 = \mathrm{Ker}\, g$, $g_1: M_1/M_2 \to M/MA$ — естественный изоморфизм, индуцированный эпиморфизмом g, $h: M \to M/MA$ — естественный эпиморфизм, $f_1 = g_1^{-1}h: M \to M_1/M_2$ — гомоморфизм. Тогда $\mathrm{Ker}\, f_1 = MA \supset M_1 \supset M_2$ и по лемме 1 найдется гомоморфизм $f: M \to M_1$ такой, что $f_1 = fh$. Если $M' = \mathrm{Ker}\, f$, то $M' \subset \mathrm{Ker}\, f_1 = MA$ и M' — прямое слагаемое в M, поскольку fM — проективный модуль (как подмодуль наследственного модуля M_1). Тогда $M = M' \oplus F$, $F \simeq fM \subset M_1$, откуда F — наследственный модуль. Легко видеть, что $MA = M'A \oplus FA$. Поскольку $M' \subset MA$, получаем $M' = M' \cap MA = M' \cap (M'A \oplus FA)$ и по модулярному закону $M' = M'A \oplus M' \cap FA$. Поскольку $M' \cap F = 0$, имеем $M' = M'A$.

Лемма 3. *Пусть N — вполне инвариантный подмодуль малопроективного модуля M_R, $\overline{M} = M/N$. Тогда $\overline{M}$ — малопроективный модуль. Если к тому же R — полупервичное правое кольцо Голди, то $Z(M)$—*

подмодуль в M и $M/Z(M)$ — малопроективный R-модуль без кручения.

Доказательство. Пусть $h:\overline{M}\to\overline{M}_1$ — эпиморфизм, $\overline{f}_1\in\in \mathrm{End}\,\overline{M}_1$, $t:M\to\overline{M}$ — естественный эпиморфизм. Тогда $ht:M\to\overline{M}_1$ — эпиморфизм. В силу малопроективности модуля M найдется эндоморфизм f модуля M такой, что $htf=\overline{f}_1ht$. Так как $fN\subset N$, то f индуцирует эндоморфизм $\overline{f}$ модуля $\overline{M}$, причем $h\overline{f}=\overline{f}_1h$. Если R — полупервичное правое кольцо Голди, то $Z(M)$ — подмодуль в M ([5]), с. 489, и очевидно, что $M/Z(M)$ — модуль без кручения. Тогда по вышедоказанному $M/Z(M)$ — малопроективный модуль, поскольку $Z(M)$ является, очевидно, вполне инвариантным подмодулем в M.

Лемма 4. *Пусть R — первичное правое кольцо Голди, F_R — модуль без кручения, T — конечнопорожденный периодический R-модуль. Тогда:* (а) *если T — F-проективный модуль, то $T=0$;* (б) *если $T\neq 0$, то $T\oplus F$ не является малопроективным модулем.*

Доказательство. Если T — F-проективный модуль, $n=\dim R_R$, то ([6]), с. 186, T является B-проективным модулем для любого подмодуля B из $F^{(n)}$. Следовательно, T является R_R-проективным модулем, так как по лемме 1.5 из ([4]) $F^{(n)}$ содержит свободный циклический подмодуль. Тогда ([6]), с. 189, T — проективный модуль, являющийся одновременно периодическим. Отсюда $T=0$.

Если $T\oplus F$ — малопроективный модуль, то по лемме 1.4 из ([4]) T — F-проективный модуль, и тогда по вышедоказанному $T=0$.

Сформулируем для удобства следующие известные факты.

Лемма 5. *Пусть R — наследственное нетерово первичное кольцо, $A\in\mathcal{A}(R)$, t — натуральное число, $\overline{R}=R/A^t$, $\overline{A}=A/A^t$, $\overline{M}$ — модуль над $\overline{R}$. Тогда:* (а) *R/A — полупростое артиново кольцо;* (б) *$\overline{R}$ — обобщенно-однорядное кольцо и $J(\overline{R})=\overline{A}$;* (в) *если $\overline{V}$ — однорядный $\overline{R}$-модуль, $k=\mathrm{ex}(\overline{V},\overline{A})$, то $\{\overline{V}\overline{A}^i:0\leqslant i\leqslant k\}$ — множество всех подмодулей модуля $\overline{V}$, $\overline{V}\overline{A}$ — единственный максимальный подмодуль в $\overline{V}$ и $d(\overline{V})=k$;* (г) *каждый $\overline{R}$-модуль $\overline{M}$ разлагается в прямую сумму однорядных модулей $\overline{M}_i$ ($i\in I=I(M)$) и $d(\overline{M}_i)=\mathrm{ex}(\overline{M}_i,A)$ для всех $i\in I$;* (д) *если R к тому же ограниченное кольцо, то каждый большой односторонний идеал кольца R содержит обратимый идеал и поэтому, если R не является простым артиновым кольцом, то $\mathcal{A}(R)$ непусто;* (е) *R либо ограниченное, либо примитивное кольцо и при выполнении обоих этих условий R является простым артиновым кольцом;* (ж) *из правой примитивности кольца R вытекает его левая примитивность.*

Доказательство. По теореме 6.3 из ([7]) R/A — артиново кольцо, а по теореме 2.6 из ([7]) A является пересечением конечного числа первичных идеалов из R. Отсюда R/A — полупростое артиново кольцо, и пункт (а) доказан. Докажем пункт (б). Из пункта (а) видно, что $J(\overline{R})\subset\overline{A}$, причем обратное включение также справедливо, поскольку $\overline{A}$ — нильпотентный идеал в $\overline{R}$. Так как все собственные фактор-кольца кольца R обобщенно-однорядные ([8]), следствие 3.2, $\overline{R}$ — обобщенно-однорядное кольцо. Пункт (в) вытекает из того, что все модули $\overline{V}\overline{A}^{i+1}/\overline{V}\overline{A}^i$ над полупростым артиновым кольцом R/A являются полупростыми, однорядными, и поэтому простыми. Пункт (г) вытекает из пунктов (б), (в) и того, что каждый модуль над обобщенно-однорядным кольцом является прямой суммой однорядных модулей ([8]), теорема 17. Пункт (е) вытекает из предложения 3.6 из ([9]) и теоремы 4.10 из ([7]). Пункт (ж) вытекает из пункта (е).

Лемма 6. *Пусть M — модуль без кручения над наследственным нетеровым первичным кольцом R, $A\in\mathcal{A}(R)$, $N_1\subset N$ — подмодули в MA такие, что $N/N_1=\sum_{i\in I}\oplus m_i'R$, $m_i'=m_i+N_1$, $m_i\in N$,* причем $r(m_i')=$ $=A$ *для всех $i\in I$. Тогда* (а) *если $M_1=\sum_{i\in I}m_iR$, то M_1 — наследствен-*

ный модуль; (б) *если существует эпиморфизм* $g_1: N/N_1 \to M/MA$ *и* M — *малопроективный модуль, то* $M = F \oplus M'$, *где* F — *проективный модуль и* $M' = M'A$.

Доказательство. Пункт (а). Так как все циклические R-модули без кручения проективны ([10]), теорема 2.1, и, следовательно, наследственны, то достаточно показать, что сумма $\sum_{i\in I} m_iR$ является прямой. Допустим противное. Тогда $m_1r_1 + \ldots + m_dr_d = 0$ для некоторых $r_1, \ldots, r_d$ из R, причем все элементы m_ir_i не равны нулю. Положим $A^0 = R$. По лемме 4.1 из ([7]) $\bigcap_{n=0}^{\infty} A^n = 0$, поэтому найдется целое неотрицательное число n такое, что все r_i лежат в A^n и хотя бы один из r_i (пусть r_1) не лежит в A^{n+1}. Тогда $r_iA^{-n} \subset R$ для всех r_i и $r_1A^{-n} \not\subset A$. Поэтому найдется $t \in A^{-n}$ такое, что $s_i = r_it \in R$ для всех i и $s_1 = r_1t \notin A$. Тогда $m_1s_1 + \ldots + m_ds_d = 0$, $m_1's_1 + \ldots + m_d's_1 = 0$. Так как сумма $\sum m_i'R$ является прямой, то $s_1 \in r(m_1') \subseteq A$, что противоречит тому, что $s_1 \notin A$. Докажем пункт (б). Так как $N/N_1 = (M_1 + N_1)/N_1 \simeq M_1/M_1 \cap N_1$ и g_1 — эпиморфизм, существует эпиморфизм $g_2: M_1/M_1 \cap N_1 \to M/MA$. Если $h: M_1 \to M_1/M_1 \cap N_1$ — естественный эпиморфизм, то $g = g_2h: M_1 \to M/MA$ — эпиморфизм и пункт (б) вытекает из леммы 2 и пункта (а).

Во всех следующих ниже леммах R обозначает ограниченное наследственное нетерово первичное кольцо, не являющееся простым артиновым кольцом.

Лемма 7. *Пусть* M — *периодический* R-*модуль. Тогда* (а) *примарность модуля* M *равносильна тому, что модули* $E(xR)$ *и* $E(yR)$ *эквивалентны для всех равномерных элементов* x *и* y *из* R (*в частности, любой равномерный периодический* R-*модуль примарен*); (б) *если* N — *подмодуль в* M, *то* $N_A = N \cap M_A$ — *вполне инвариантный подмодуль в* N *для каждого* $A \in \mathcal{A}(R)$ *и* $N = \sum_{A\in\mathcal{A}(R)} \oplus N_A$; (в) *малопроективность модуля* M *равносильна малопроективности всех его примарных компонент.*

Доказательство. По лемме 5 (е), (ж) можно считать, что R не является примитивным справа кольцом. Тогда пункт (а) см. в ([11]), лемма 2.11, пункт (б) вытекает из леммы 9 из ([12]), поскольку очевидно, что $N_A = N \cap M_A$ и N_A — вполне инвариантный подмодуль в N. Пункт (в) доказывается ввиду пункта (б) непосредственно.

Лемма 8. *Пусть* T — *ненулевой неразложимый инъективный периодический* R-*модуль. Тогда* (а) *все подмодули модуля* T *образуют счетную бесконечную цепь* $0 = T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_i \subset$ *с простыми факторами* $S_i = T_i/T_{i-1}$; (б) *существует натуральное число* $n = n(T)$ (*называемое периодом модуля* T) *такое, что* $S_i \simeq S_j \Leftrightarrow i \equiv j \pmod n$; (в) *если* M — *подфактор модуля* T *и* $d(M) \geqslant n$, *то* M *имеет подфакторы, изоморфные* $S_1, \ldots, S_n$; (г) T *является* A-*примарным модулем для некоторого* $A \in \mathcal{A}(R)$ *и каждый неразложимый* A-*примарный* R-*модуль изоморфен некоторому подфактору модуля* T; (д) *если* $D = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$, *то для некоторого натурального числа* k $D^{(k)}$ *имеет прямое слагаемое, изоморфное* R/A; (е) *существует натуральное число* t *такое, что если* $W_1, \ldots, W_t$ — *подфакторы модуля* T *и* $d(W_i) \geqslant n$ *для всех* W_i, *то модуль* $W' = W_1 \oplus \ldots \oplus W_t$ *имеет подфактор, изоморфный модулю* R/A.

Доказательство. По лемме 5 (е), (ж) можно считать, что кольцо R не примитивно справа. Пункты (а), (б) вытекают из следствия 2.9 из ([11]). Пункт (в) вытекает из пункта (б). Пункт (г). По лемме 7 (а) T — A-примарный модуль для некоторого $A \in \mathcal{A}(R)$, поскольку неразложимый инъективный модуль всегда равномерен ([5]), с. 223. Пусть N — неразложимый A-примарный модуль, $T' = E(N)$. По теореме 10 из ([12]) N — равномерный модуль и, следовательно, T' — неразложимый инъективный модуль и поэтому является A-примарным модулем, поскольку

T' содержит ненулевой A-примарный подмодуль. Тогда $T \oplus T'$ — A-примарный модуль и по лемме 7 (а) модули T и T' эквивалентны, т. е. T' и, следовательно, его подмодуль N изоморфны подфактору модуля T. Пункт (д). По лемме 5 (а) R/A является прямой суммой конечного числа A-примарных простых модулей, изоморфных по пункту (г) некоторым из $S_1, \ldots, S_n$. Следовательно, если $k = d(R/A)$, то $D^{(k)} \simeq R/A \oplus D_1$. Пункт (е). Пусть $k = d(R/A)$, $t = nk$, $W_1, \ldots, W_t$ — подфакторы модуля T, причем $d(W_i) \geqslant n$ для всех i. По пункту (в) каждый из модулей W_i содержит в качестве подфакторов копии всех модулей $S_1', \ldots, S_n$. Поэтому каждая из прямых сумм $W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$, $W_{n+1} \oplus \ldots \oplus W_{2n}, \ldots$ содержит подфактор, изоморфный $D = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$. Отсюда W' содержит подфактор, изоморфный $D^{(k)}$, и по пункту (д) W' имеет подфактор, изоморфный R/A.

Лемма 9. *Пусть $A \in \mathscr{A}(R)$, T — неразложимый A-примарный инъективный модуль, n — период модуля T (см. лемму 8 (б)), $\{W_j;\ j \in J\}$ — бесконечное множество циклических подфакторов модуля T таких, что $d(W_j) \geqslant n$ для всех $j \in J$, $W = \Sigma_{j \in J} \oplus W_j$. Тогда W содержит подфактор $\overline{W}$, изоморфный прямой сумме J экземпляров модуля R/A.*

Доказательство. Пусть число t выбрано согласно лемме 8 (е). Поскольку J — бесконечное множество, разложим W в прямую сумму модулей W_j' $(j \in J)$, каждый из которых есть прямая сумма некоторых t модулей из $\{W_j\}$. По лемме 8 (е) каждый модуль W_j' имеет подфактор, изоморфный R/A, и поэтому W имеет искомый подфактор $\overline{W}$.

Теорема 1. *Если M — модуль без кручения над ограниченным наследственным нетеровым первичным кольцом R, то равносильны условия*

(а) *M — квазипроективный модуль;*

(б) *M — малопроективный модуль;*

(в) *либо M — проективный модуль, либо R — специальное кольцо и $M = M_1 \oplus M_2$, где M_1 — конечномерный инъективный модуль без кручения, а M_2 — проективный модуль конечного ранга.*

Доказательство. Импликация (а)$\Rightarrow$(б) верна всегда. Заметим, что по теореме 2.13 и лемме 1.5 из ([4]) можно считать, что R не является специальным кольцом и M — редуцированный модуль. Тогда импликация (в)$\Rightarrow$(а) очевидна. Пусть M — малопроективный модуль и R не является простым артиновым кольцом. Тогда по лемме 5 (д) существует $A \in \mathscr{A}(R)$. По предложению 2.10 (б) из ([4]) $M \neq MA$. Пусть T — неразложимый A-примарный инъективный модуль, n — период модуля T (см. лемму 8 (б)), $t = n + 1$, $\overline{M} = M/MA^t$. По лемме 5 (г) $\overline{M}$ — прямая сумма ненулевых однорядных модулей $\overline{M}_j$ $(j \in J)$ и $d(\overline{M}_j) = \mathrm{ex}(\overline{M}_j, A) \leqslant t$. Если J — конечное множество, то $\overline{M}$ — конечнопорожденный модуль и по предложению 2.10 (в) из ([4]) M — проективный модуль. Пусть J бесконечно. Допустим, что $\mathrm{ex}(\overline{M}_1, A) \leqslant t - 1$. Если $\bar{f}$ — проекция $\overline{M}$ на $\overline{M}_1$, то $\bar{f} = \bar{f}^t$ и, поскольку M — малопроективный модуль, найдется $f \in \operatorname{End} M$ такое, что $\bar{f}h = hf$, где $h : M \to \overline{M}$ — естественный эпиморфизм. Тогда $(f^t - f)M \subset MA^t$, поскольку $(\bar{f}^t - \bar{f})\overline{M} = \overline{0}$, откуда $fM \subset f^tM + MA^t$. Так как $\overline{M}_1\bar{A}^{t-1} = \overline{0}$, то $M_1A^{t-1} \subset MA^t$ и отсюда $M_1 \subset (MA^{t-1})A^{-(t-1)} \subset MA$. Поскольку $\bar{f}\overline{M} = \overline{M}_1$, то $fM \subset M_1 + MA^t \subset MA + MA^t = MA$. Тогда легко видеть, что $f^tM = f^{t-1}(fM) \subset f^{t-1}(MA) \subset \ldots \subset MA^t$. Выше было доказано, что $fM \subset f^tM + MA^t$. Следовательно, $fM \subset MA^t$, откуда $\bar{f}\overline{M} = \overline{M}_1 = 0$. Противоречие. Поэтому $d(\overline{M}_j) = \mathrm{ex}(\overline{M}_j, A) = t$ для всех $j \in J$. Пусть теперь $W = \overline{M}A$, $W_j = \overline{M}_jA$ $(j \in J)$. Тогда по лемме 5 (в) $d(W_j) = t - 1 = n$ для всех $j \in J$ и $W = \sum_{j \in J} \oplus W_j$. Так как все W_j являются неразложимыми A-примарными модулями, они изоморфны по лемме 8 (г) подфакторам некоторого неразложимого инъективного модуля T. (Модуль T можно, например, выбрать так: $T=E(S)$, где S — некоторый простой подмодуль модуля R/A). По лемме 9 модуль W содержит подфактор $\overline{W}$, изоморфный прямой сумме J экземпляров модуля R/A. Ясно, что $\overline{W}$ является подфактором модуля MA. Пусть $N_1 \subset N \subset MA, \overline{W} \simeq N/N_1 = \sum_{j\in J}\oplus m'_jR$, $r(m'_j)=A$ для всех $j\in J$. Заметим, что $M/MA \simeq \overline{M}/\overline{M}A \simeq \sum_{j\in J}\oplus \overline{M}_j/\overline{M}_jA$. Поскольку каждый модуль $\overline{M}_j/\overline{M}_jA$ является циклическим и $(\overline{M}_j/\overline{M}_jA)A = 0$, существует эпиморфизм $f_j: m'_jR \to \overline{M}_j/\overline{M}_jA$. Поэтому существует эпиморфизм $g_1 = \Sigma \oplus f_j: \overline{W} \to \overline{M}/\overline{M}A = M/MA$. Тогда по лемме 6 (б) $M = F \oplus M'$, где F — проективный модуль и $M' = M'A$. Если $M' = 0$, то все доказано. Допустим, что $M' \neq 0$. Тогда M' — малопроективный модуль без кручения и $M' = M'A$, что противоречит предложению 2.10 (б) из [4].

Следствие. *Если M — малопроективный (квазипроективный) модуль без кручения над ограниченным наследственным нетеровым первичным кольцом R и либо M — редуцированный модуль, либо R не является специальным кольцом, то M — проективный модуль.*

Лемма 10. *Пусть M — смешанный R-модуль. Тогда* (а) *если M — малопроективный модуль, то $M = Z \oplus F$, где $Z = Z(M)$ — ненулевой инъективный малопроективный периодический модуль, а F — ненулевой проективный модуль*; (б) *M не является квазипроективным модулем.*

Доказательство. Можно считать, что R не является специальным кольцом. По лемме 3 M/Z — малопроективный модуль без кручения, откуда по теореме 1 M/Z — проективный модуль и, следовательно, $M = Z \oplus F$, где F — проективный модуль. Допустим, что Z не является инъективным модулем. Тогда по теореме 10 из [12] Z имеет ненулевое конечнопорожденное прямое слагаемое Z_1, причем $Z_1 \oplus F$ — малопроективный модуль, как прямое слагаемое модуля M. По лемме 4 (б) получаем противоречие. Модуль M не может быть квазипроективным, поскольку в противном случае Z было бы ненулевым квазипроективным инъективным периодическим R-модулем, что противоречило бы теореме 2.12 из [11].

Теорема 2. *Если M — модуль над ограниченным наследственным нетеровым первичным кольцом R, то квазипроективность модуля M равносильна тому, что либо M — периодический модуль, каждая примарная компонента которого M_A является проективным $R/r(M_A)$-модулем, либо M — проективный модуль, либо R — специальное кольцо и $M = M_1 \oplus M_2$, где M_1 — инъективный конечномерный модуль без кручения, M_2 — проективный модуль конечного ранга.*

Доказательство. Если M — периодический модуль или модуль без кручения, то результат вытекает соответственно из теоремы 2.13 из [11] и теоремы 1. Если M — смешанный модуль, то по лемме 10 (б) M не может быть квазипроективным модулем.

Автор благодарен А. В. Михалеву за внимание к работе.

Москва,
Московский государственный университет

Статья поступила
27 июня 1978 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Fuchs L., Rangaswamy K. M.* Ouasi — projective abelian groups.— Bull. Soc. Math. France, 1970, v. 98, № 1, p. 5—8.

[2] *Bonnard G.* Sur un probleme d'algebre commutative: modules scidants et modules coscidants.— J. Algebra, 1975, 35, № 1, 72—85.

[3] *Rangaswamy K. M., Vanaya N.* Quasi-projectives in Abelian and module categories.— Pacific. J. Math., 1972, v. 43, № 1, p. 221—238.

[4] *Туганбаев А. А.* Строение модулей, близких к проективным.— Мат. сб., 1978, т. 106, № 4, с. 554—565.

[5] *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. I. М., Мир, 1977.

[6] *Anderson F. M., Fuller K. R.* Rings and categories of modules. Berlin e. a., Springer — Verlag, 1974.

[7] *Eichbud D., Robson J. C.* Hereditary Noetherian prime rings.— J. Algebra, 1970, v. 16, № 1, p. 86—104.

[8] *Eisenbud D., Giriffith P.* Scrial rings.— J. Algebra, 1971, v. 17, № 3, p. 389—400.

[9] *Lenagan T. H.* Bounded hereditary Noetherian prime rings.— J. London Math. Soc., 1973, v. 6, № 2, p. 241—246.

[10] *Eisenbud D., Robson J. C.* Modules over Dedekind prime rings.— J. Algebra, 1970, v. 16, № 1, p. 67—85.

[11] *Singh S.* Modules over hereditary Noetherian prime rings II. Canad. J. Math., 1976, v. 28, № 1, p. 73—82.

[12] *Singh S.* Modules over heredirary Noctherian prime rings. Can. J. Math., 1975, v. 27, № 4, p. 867—883.