А. В. Глушко, С. О. Рыбаков, Асимптотика по времени решения начально-краевой задачи в полупространстве для уравнений динамики вращающейся вязкой сжимаемой жидкости, *Сиб. матем. журн.*, 1992, том 33, номер 4, 42–58

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. 33, № 4 ИЮЛЬ — АВГУСТ 1992

УДК 517.95

А. В. ГЛУШКО, С. О. РЫБАКОВ

АСИМПТОТИКА ПО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Введение

Настоящая работа является продолжением статьи авторов [1]. Как и в [1], здесь исследуется система линейных уравнений с частными производными, описывающая динамику вращающейся жидкости с учетом вязкости и сжимаемости:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\begin{pmatrix}\mathbf{V}\\ P\end{pmatrix} = 0. \tag{1}$$

Оператор-матрица A в (1) имеет вид

$$A\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta & -\omega & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \omega & \frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \alpha^2\frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix}; \tag{2}$$

$\mathbf{V}(t, x) = \{V_1, V_2, V_3\}^\top$, $P(t, x)$ — искомые скорость и давление в жидкости; $\nu > 0$ — кинематический коэффициент вязкости; $\alpha^2 \neq 0$ — коэффициент сжимаемости; $\omega > 0$ характеризует величину вектора угловой скорости вращения системы координат $\boldsymbol{\omega} = \{0, 0, \omega\}^\top$; $\Delta = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$.

В области $R_4^{++} = \{(t, x) \mid t > 0, x = (x', x_3), x' = (x_1, x_2) \in R_2, x_3 > 0\}$ для системы (1) ставится начально-краевая задача

$$\mathbf{V}|_{t=0} = 0, \quad P|_{t=0} = 0, \quad x' \in R_2, \ x_3 > 0; \tag{3}$$

$$\mathbf{V}|_{x_3=0}\mathbf{W}(t, x'), \quad t > 0, \ x' \in R_2, \tag{4}$$

где $\mathbf{W}(t, x') = \{W_1, W_2, W_3\}^\top$ — заданный вектор. Будем предполагать также, что

$$\lim_{x_3\to+\infty} \mathbf{V} = 0, \quad \lim_{x_3\to+\infty} P = 0, \quad t > 0, \ x' \in R_2. \tag{5}$$

Введем необходимые функциональные пространства.

Определение 1. Пусть m, $k \geqslant 0$ целые; $\delta \geqslant 0$. Тогда

$$H^+_{k,m,\delta} = \{V \mid V(t, x', x_3)\, e^{-\delta t} \in L_2(R_4^{++});\ \|V\|^+_{k,m,\delta} < \infty\},$$

где

$$\|V\|^{+}_{k,m,\delta} = \|V\| + \left\|\frac{\partial^k V}{\partial t^k}\right\| + \sum_{j=1}^{3}\left\|\frac{\partial^m V}{\partial x_j^m}\right\|, \tag{6}$$

$\|\cdot\|$ — норма в $L_2(R_4^{++})$.

Замечание 1. При $\delta = 0$ $H^{+}_{k,m,\delta}$ есть анизотропное пространство С. Л. Соболева. Преобразование Лапласа — Фурье позволяет ввести в $H^{+}_{k,m,\delta}$ норму, эквивалентную (6):

$$|||V|||^{+}_{k,m,\delta} = \left\{\sup_{\gamma_1\geqslant\delta}\int\limits_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty}\int\limits_{R_2}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\left(1+|\gamma|^{2k}+|s'|^{2m}\right)|v|^2+\left|\frac{\partial^m v}{\partial x_3^m}\right|^2\right]dx_3\,ds'\,d\gamma_2\right\}^{1/2} \tag{7}$$

где $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 \in \mathbb{C}$; $s' = (s_1, s_2) \in R_2$; $v = v(\gamma, s', x_3) = \mathscr{L}_{t\to\gamma}\mathscr{F}_{x'\to s'}[V]$ —, преобразование Лапласа — Фурье функции $V(t, x', x_3)$ в смысле теории обобщенных функций.

Определение 2. Пусть $\mu, \varkappa \geqslant 0$; $\delta \in R_1$. Тогда

$$H'_{\varkappa,\mu,\delta} = \{W \mid W(t, x')e^{-\delta t} \in L_2(R_1^{+}\times R_2);\ \langle\langle W\rangle\rangle_{\varkappa,\mu,\delta} < \infty\},$$

где

$$\langle\langle W\rangle\rangle_{\varkappa,\mu,\delta} = \left\{\sup_{\gamma_1\geqslant\delta}\int\limits_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty}\int\limits_{R_2}\left(1+|\gamma|^{2\varkappa}+|s'|^{2\mu}\right)|w|^2\,ds'\,d\gamma_2\right\}^{1/2}, \tag{8}$$

$$w = w(\gamma, s') = \mathscr{L}_{t\to\gamma}\mathscr{F}_{x'\to s'}[W(t, x')].$$

В работе авторов [2], в частности, установлено, что при любом $\mathbf{W}(t, x') \in H'_{3/4;3/2;0}$ задача (1), (3)—(5) имеет единственное решение $\{\mathbf{V}, P\}$: $\mathbf{V} \in H^{+}_{1,2,\varepsilon}$, $P \in H^{+}_{1,1,\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ любое). Данное утверждение цитируется также в [1].

Условие 1. Функция $W(t, x') \in L_1(R_1^{+}\times R_2)$ сферически симметрична: $W(t, \Phi x') = W(t, x')$ относительно любого поворота Φ в R_2 и при некотором $\varepsilon_0 > 0$ конечен интеграл

$$\langle W\rangle_{\varepsilon_0} = \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{R_2}(1+|x'|^2)\,|W(t, x')|\,e^{\varepsilon_0 t}\,dx'\,dt. \tag{9}$$

Основной результат работы состоит в следующем.

Теорема 1. *Пусть при некотором* $\varepsilon_0 > 0$ *функции* $W_j \in H'_{3/4;3/2;(-\varepsilon_0)}$, $j = 1, 2, 3$, *удовлетворяют условию 1. Тогда для решения* $\{\mathbf{V}, P\}$: $\mathbf{V} \in H^{+}_{1,2,\varepsilon}$, $P \in H^{+}_{1,1,\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ *любое*) *задачи* (1), (3)—(5) *при* $x' \in \mathbf{R}_2$, $x_3 \geqslant h$ ($h > 0$ *любое*) *справедливо асимптотическое представление* (*при* $t \to \infty$)

$$\begin{pmatrix}\mathbf{V}\\ P\end{pmatrix} = \left(16\pi^{3/2}\nu^{1/4}\right)^{-1}\sum_{k=1}^{3}2^{1-k}\alpha^{k-1/2}\omega^{k/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}\right)t^{-k/2-3/4}\mathscr{G}^{(k)}(x)\times$$

$$\times\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{R_2}\mathbf{W}(t, x')\,dx'\,dt + \widetilde{\mathscr{G}}(t, x)\left[\langle W_1\rangle_{\varepsilon_0};\ \langle W_2\rangle_{\varepsilon_0};\ \langle W_3\rangle_{\varepsilon_0}\right]^{\top}, \tag{10}$$

где матрицы $\mathscr{G}^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, 3$, *и* $\widetilde{\mathscr{G}}(t, x)$ *имеют вид*

$$\begin{gathered}\mathscr{G}^{(1)} = \{\mathscr{G}^{(1)}_{j,l}\},\ j = 1, 2, 3, 4;\ l = 1, 2, 3;\\ \mathscr{G}^{(1)}_{j,l} = 0,\ (j, l) \neq (4, 3);\ \mathscr{G}^{(1)}_{4,3} = \omega\nu^{-1}\mathscr{G}_{4,3};\end{gathered} \tag{11}$$

$$\mathscr{G}^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\mathscr{G}_{1,1} & \mathscr{G}_{1,2} & (2\omega^3\nu^{-3})^{1/2}\mathscr{G}_{1,3}\\ \mathscr{G}_{2,1} & \mathscr{G}_{2,2} & (2\omega^3\nu^{-3})^{1/2}\mathscr{G}_{2,3}\\ 0 & 0 & 2^{3/2}\nu^{-1}\mathscr{G}_{3,3}\\ \mathscr{G}_{4,1} & \mathscr{G}_{4,2} & 0\end{vmatrix},\quad \mathscr{G}^{(3)}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\ \mathscr{G}_{3,1}&\mathscr{G}_{3,2}&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\widetilde{\mathscr{G}}=t^{-7/4-\varepsilon^*}\begin{vmatrix}(1+|x|)O(1) & (1+|x|O(1) & (1+|x'|^2+x_3)O(1)\\ (1+|x|)O(1) & (1+|x|)O(1) & (1+|x'|^2+x_3)O(1)\\ (1+|x|^2)O(t^{-1/2}) & (1+|x|^2)O(t^{-1/2}) & (1+|x'|+x_3^2)O(1)\\ (1+|x'|^2+x_3)O(1) & (1+|x'|^2+x_3)O(1) & (1+|x|)O(t^{1/2})\end{vmatrix}, \tag{13}$$

$\varepsilon^*\in(0,\ 1/4)$ — *любое число; функции* $\mathscr{G}_{j,l}(x)$, $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$; $l=1,\ 2,\ 3$, *имеют вид*

$$\mathscr{G}_{1,l}=(-1)^l+e^{-\sqrt{\omega/2\nu}x_3}\left[(-1)^{l+1}\cos\left(\sqrt{\omega/2\nu}\,x_3\right)+\sin\left(\sqrt{\omega/2\nu}\,x_3\right)\right],$$

$$\mathscr{G}_{2,l}=-1+e^{-\sqrt{\omega/2\nu}x_3}\left[(-1)^l\sin\left(\sqrt{\omega/2\nu}\,x_3\right)+\cos\left(\sqrt{\omega/2\nu}\,x_3\right)\right],$$

$$\mathscr{G}_{3,l}=-1+e^{-\sqrt{\omega/2\nu}x_3}\left[x_1+(-1)^lx_2\right]\left[\sin\left(\sqrt{\omega/2\nu}\,x_3\right)-\cos\left(\sqrt{\omega/2\nu}\,x_3\right)\right],$$

$$\mathscr{G}_{4,l}=-\left[x_1+(-1)^lx_2\right],\qquad l=1,2, \tag{14}$$

$$\mathscr{G}_{1,3}=-x_2-e^{-\sqrt{\omega/2\nu}x_3}\left[x_1\sin\left(\sqrt{\omega/2\nu}\,x_3\right)-x_2\cos\left(\sqrt{\omega/2\nu}\,x_3\right)\right],$$

$$\mathscr{G}_{2,3}=x_1-e^{-\sqrt{\omega/2\nu}x_3}\left[x_1\cos\left(\sqrt{\omega/2\nu}\,x_3\right)+x_2\sin\left(\sqrt{\omega/2\nu}\,x_3\right)\right],$$

$$\mathscr{G}_{3,3}=1+e^{-\sqrt{\omega/2\nu}x_3}\left[\sin\left(\sqrt{\omega/2\nu}\,x_3\right)-\cos\left(\sqrt{\omega/2\nu}\,x_3\right)\right],\quad \mathscr{G}_{4,3}=-1;$$

в (10) *и в дальнейшем* $\Gamma(\cdot)$ *означает гамма-функцию; в* (13) *оценки величин* $O(\cdot)$ *равномерны по* $x'\in R_2$, $x_3\geqslant h$ *и не зависят от вектора* $W(t,\ x')$.

§ 1. Формула представления решения

Как уже отмечалось во введении, вопрос о существовании и единственности решения задачи (1), (3)—(5) изучен в [2] (см. также [1, теорема 1]). Для построения асимптотических представлений компонент этого решения нам необходимо специальное асимптотическое представление его компонент, полученное в [1, теорема 2]. Это представление решения может быть записано в следующем виде.

Лемма 1.1. *Пусть* $W_l\in H'_{3/4;3/2;(-\varepsilon_0)}$, $l=1,2,3$, *при некотором* $\varepsilon_0>0$. *Тогда для решения задачи* (1), (3)—(5) $\{\mathbf{V},\ P\}$: $\mathbf{V}\in H^+_{1,2,\varepsilon_1}$, $P\in H^+_{1,1,\varepsilon_1}$ ($\varepsilon_1>0$ *любое*) *при* $x'\in R_2$, $x_3\geqslant h$ ($h>0$ *любое*) *справедливо представление*

$$V_j(t,x',x_3)=-2\nu\sum_{l=1}^{3}D_{j,l}(t,x',x_3)*W_l(t,x'),\quad j=1,2,3; \tag{1.1}$$
$$P(t,x',x_3)=-2\nu\sum_{l=1}^{3}D_{4,l}(t,x',x_3)*W_l(t,x'),$$

где

$$D_{j,l}*W_l=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'(-\varepsilon_1,\delta_0)}e^{\gamma t}\mathscr{F}^{-1}_{s'\to x'}\left[\widetilde{D}_{j,l}(\gamma,s',x_3)\eta_\delta(s')\,w_l(\gamma,s')\right]d\gamma+O\left(e^{-\varepsilon t}\right), \tag{1.2}$$

$$\widetilde{D}_{j,l} = (1-\delta_{3,l})\frac{\partial}{\partial x_3}\mathcal{F}^{-1}_{s_3\to x_3}\left[\frac{\breve{a}_{j,l}(\gamma,s)}{\mathcal{P}(\gamma,s)}\right] + \mathcal{F}^{-1}_{s_3\to x_3}\left[\frac{\breve{a}_{j,3}(\gamma,s)}{\mathcal{P}(\gamma,s)}\right]S_l(\gamma,s'), \quad (1.3)$$

$j=1,\ 2,\ 3,\ 4$; $l=1,\ 2,\ 3$; *числа* $\delta_0\in(0,\ \omega/2)$ *и* $\delta>0$ *произвольны*; $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0)$ *достаточно мало*; $\Gamma'(-\varepsilon,\ \delta_0)$ — *трехсвязный контур в комплексной* γ-*плоскости*: $\Gamma'(-\varepsilon,\delta_0)=\bigcup\limits_{n=1}^{3}\Gamma_n(-\varepsilon,\delta_0)$, *где*

$$\Gamma_n(-\varepsilon,\ \delta_0)=\{\gamma\in\mathbf{C}\,|\,|\gamma-\gamma_n|=\delta_0 \text{ при } \operatorname{Re}\gamma\geqslant 0;$$
$$|\operatorname{Im}\gamma-\operatorname{Im}\gamma_n|=\delta_0 \text{ при } \operatorname{Re}\gamma\in(-\varepsilon,\ 0);\ \gamma_1=i\omega;\ \gamma_2=-i\omega;\ \gamma_3=0\}; \quad (1.4)$$

$\eta_\delta(s')\in C_0^\infty(R_2)$ *сферически симметрична*, $\eta_\delta(s')=1$ *при* $|s'|=\sqrt{s_1^2+s_2^2}\in(0,\ \delta/2)$, $\eta_\delta(s')=0$ *при* $|s'|>\delta$; $\mathcal{F}^{-1}_{s'\to x'}\ \left(\mathcal{F}^{-1}_{s_3\to x_3}\right)$ — *обратное преобразование Фурье в смысле обобщенных функций*; $w_l(\gamma,s')=\mathcal{L}_{t\to\gamma}\mathcal{F}_{x'\to s'}[W_l]$, $l=1,\ 2,\ 3$; $\delta_{3,l}$ — *символ Кронекера*; $s=(s_1,\ s_2,\ s_3)\in R_3$; $\breve{a}_{j,l}(\gamma,\ s)$ — *элементы матрицы* $\breve{A}(\gamma,\ s)$, *ассоциированной матрице* $A(\gamma,\ is)$; $\mathcal{P}(\gamma,\ s)=\det A(\gamma,\ is)$;

$$\mathcal{P}(\gamma,s)=\alpha^2\gamma(\gamma+\nu|s|^2)^3+|s|^2(\gamma+\nu|s|^2)^2+\alpha^2\omega^2\gamma(\gamma+\nu|s|^2)+\omega^2 s_3^2, \quad (1.5)$$

$$S_l(\gamma,s')=e'_{3,l}(\gamma,s',+0)\left(\nu e''_{3,3}(\gamma,s',+0)\right)^{-1},\quad l=1,2,3, \quad (1.6)$$

$$e'_{3,l}(\gamma,s',x_3)=\mathcal{F}^{-1}_{s_3\to x_3}\left[-i\nu s_3\frac{\breve{a}_{3,l}(\gamma,s)}{\mathcal{P}(\gamma,s)}\right],\quad l=1,2, \quad (1.7)$$

$$e'_{3,3}(\gamma,s',x_3)=\mathcal{F}^{-1}_{s_3\to x_3}\left[-i\nu s_3\frac{\breve{a}_{3,3}(\gamma,s)}{\mathcal{P}(\gamma,s)}+\frac{\breve{a}_{3,4}(\gamma,s)}{\mathcal{P}(\gamma,s)}\right], \quad (1.8)$$

$$e''_{3,3}(\gamma,s',x_3)=\mathcal{F}^{-1}_{s_3\to x_3}\left[\frac{\breve{a}_{3,3}(\gamma,s)}{\mathcal{P}(\gamma,s)}\right], \quad (1.9)$$

оценки $O(e^{-\varepsilon t})$ *равномерны по* $x'\in R_2$, $x_3\geqslant h$.

Замечание 1.1. Существование и оценка каждого из интегралов, входящих в (1.1)—(1.3), доказаны в последующих параграфах настоящей работы.

Доказательство леммы 1.1 в существенно более широкой формулировке составляет содержание работы авторов [1]. Предполагая, что интегралы по $\Gamma'(-\varepsilon,\ \delta_0)$ в (1.2) существуют (см. замечание 1.1), можно перейти от неявного представления решения задачи (1), (3)—(5) (см. [1, теорема 2]) к представлению (1.1)—(1.3), используя граничные условия (4) и свойства преобразования Фурье. Лемма доказана.

§ 2. Вспомогательные представления и оценки

Для изучения асимптотических свойств при $t\to\infty$ интегралов (1.2) необходимо построить асимптотические представления λ-корней уравнения

$$\mathcal{R}(\gamma,\ s',\ \lambda)\equiv\det A(\gamma,\ is_1,\ is_2,\ \lambda)=0 \quad (2.1)$$

в окрестностях критических точек $(\gamma,\ s')=(0,\ i\omega)$, $(0,\ -i\omega)$, $(0,\ 0)$, а также y-корней и τ-корней уравнений

$$(\alpha^2\gamma+\nu^{-1})y^3-\gamma\nu^{-1}y^2+(\alpha^2\gamma+\nu^{-1})\omega^2 y-\omega^2(\gamma\nu^{-1}+|s'|^2)=0; \quad (2.2)$$

$$(\alpha^2\gamma+\nu^{-1})(\gamma+\nu|s'|^2-\nu\tau)^3-\gamma\nu^{-1}(\gamma+\nu|s'|^2-\nu\tau)^2+$$
$$+(\alpha^2\gamma+\nu^{-1})\omega^2(\gamma+\nu|s'|^2-\nu\tau)-\omega^2(\gamma\nu^{-1}+|s'|^2)=0, \quad (2.3)$$

получающихся из (2.1) при помощи замен

$$y=\gamma+\nu|s'|^2-\nu\lambda^2, \qquad \tau=\lambda^2. \tag{2.4}$$

Лемма 2.1. *Существуют такие* $\varepsilon>0$, $\sigma>0$ *и* $\delta>0$, *что при* $-\varepsilon\leqslant\leqslant \operatorname{Re}\gamma\leqslant\sigma$, $0\leqslant|s'|\leqslant\delta$ *для корней* y_1 *и* y_2 *уравнения* (2.2), *не обращающихся в нуль при* $|\gamma|+|s'|=0$, *справедливы асимптотические представления при* $|s'|\to 0$

$$y_j=(-1)^{j+1}i\omega-(1/2)\omega\nu|s'|^2(\omega+\alpha^2\omega\nu\gamma+(-1)^{j+1}i\gamma)^{-1}+O(|s'|^4); \tag{2.5}$$

оценка $O(|s'|^4)$ *равномерна по* γ *на каждом компакте из полосы* $-\varepsilon\leqslant\operatorname{Re}\gamma\leqslant\sigma$.

Доказательство при $\sigma=0$ проведено в [3], случай $\sigma>0$ не содержит отличий.

Следствие 2.1 (аналог см. в [3]). *В условиях леммы 2.1 справедливы представления при* $|s'|\to 0$

$$y_j=(-1)^{j+1}i\omega+O(|s'|^2),\ j=1,\ 2; \qquad y_3=\gamma(1+\alpha^2\nu\gamma)^{-1}+O(|s'|^2); \tag{2.6}$$

оценки $O(|s'|^2)$ *равномерны по* γ: $-\varepsilon\leqslant\operatorname{Re}\gamma\leqslant\sigma$.

Следствие 2.2. *В условиях леммы 2.1 для корней уравнения* (2.3) *при* $|s'|\to 0$ *справедливы представления*

$$\tau_j=(-1)^j i\omega\nu^{-1}+\gamma\nu^{-1}+O(|s'|^2),\quad j=1,\ 2;\qquad \tau_3= =\alpha^2\gamma^2(1+\alpha^2\nu\gamma)^{-1}+O(|s'|^2); \tag{2.7}$$

оценки $O(|s'|^2)$ *равномерны по* γ: $-\varepsilon\leqslant\operatorname{Re}\gamma\leqslant\sigma$.

Пусть $\arg\tau_j\in(-\pi,\ \pi)$, тогда

$$\tau_j=|\tau_j|e^{i\arg\tau_j},\quad j=1,2,3. \tag{2.8}$$

Свяжем нумерацию τ-корней уравнения (2.3) и λ-корней уравнения (2.1) с неположительной реальной частью следующим образом:

$$\lambda_j=\sqrt{|\tau_j|}\,e^{i((\arg\tau_j)/2+\pi)},\quad j=1,2,3. \tag{2.9}$$

Следствие 2.3. *Существуют* $\delta_0>0$ *и* $\delta>0$ *такие, что при* $0\leqslant|\gamma|\leqslant\leqslant\delta_0$, $0\leqslant|s'|\leqslant\delta$ *и при* $|\gamma|+|s'|\to 0$ *справедливы представления*

$$\lambda_j=\sqrt{\omega\nu^{-1}}e^{i(j/2+1/4)\pi}(1+O(\gamma)+O(|s'|^2)),\ j=1,\ 2;\qquad \lambda_3=O(\gamma)+O(|s'|^2). \tag{2.10}$$

Полагая в (2.3) $\tau=0$, получаем

$$(\gamma+\nu|s'|^2)(\alpha^2\gamma(\gamma+\nu|s'|^2)^2+|s'|^2(\gamma+\nu|s'|^2)+\alpha^2\omega^2\gamma)=0. \tag{2.11}$$

Имеют место представления γ-корней (2.11) (см. [4])

$$\gamma_{j,0}=(-1)^{j+1}i\omega-\nu|s'|^2-(-1)^{j+1}i\frac{1}{2}\alpha^{-2}\omega^{-1}|s'|^2+O(|s'|^4),\ j=1,2;$$
$$\gamma_{3,0}=-\nu\alpha^{-2}\omega^{-2}|s'|^4+O(|s'|^6);\qquad \gamma_{4,0}=-\nu|s'|^2. \tag{2.12}$$

Лемма 2.2 (см. [5, лемма 8.2]). *Существуют такие* $\delta_0>0$ *и* $\delta>0$, *что при* $0\leqslant|\gamma|\leqslant\delta_0$, $0\leqslant|s'|\leqslant\delta$ *и при* $|\gamma|+|s'|\to 0$ *справедливо представление*

$$y_3=(\gamma-\gamma_{4,0})(1-\alpha^2\nu(\gamma-\gamma_{3,0})(1+O(\gamma)+O(|s'|^2))). \tag{2.13}$$

Следствие 2.4. *В условиях леммы 2.2 при* $|\gamma|+|s'|\to 0$ *справедливы асимптотические представления*

$$\tau_3=\alpha^2(\gamma-\gamma_{3,0})(\gamma-\gamma_{4,0})(1+O(\gamma)+O(|s'|^2)); \tag{2.14}$$

$$|\lambda_3|=\alpha|\gamma-\gamma_{3,0}|^{1/2}|\gamma-\gamma_{4,0}|^{1/2}(1+O(\gamma)+O(|s'|^2)). \tag{2.15}$$

Следствие 2.5. *Существуют такие* $\delta_0>0$ *и* $\delta>0$, *что при* $0\leqslant|\gamma+(-1)^k i\omega|\leqslant\delta_0$, $k=1, 2$, $0\leqslant|s'|\leqslant\delta$ *справедливы асимптотические представления* ($j=1, 2$; $k=1, 2$; $\beta=\alpha^2\omega\nu$):

$$\tau_i=O(\gamma+(-1)^k i\omega)+O(|s'|^2);$$
$$\tau_j=(-1)^k 2i\omega\nu^{-1}(1+O(\gamma+(-1)^{k+1}i\omega)+O(|s'|^2));$$
$$\tau_3=\alpha^2\omega^2(1+(-1)^k i\beta)^{-1}(1+O(\gamma+(-1)^{k+1}i\omega)+O(|s'|^2)); \tag{2.16}$$

$$\lambda_j=O\left(\sqrt{|\gamma+(-1)^k i\omega|}\right)+O(|s'|);\quad \lambda_j=(-1)^{k+1}\sqrt{2\omega\nu^{-1}}\,e^{i3\pi/4}\big(1+$$
$$+O\big(\gamma+(-1)^{k+1}i\omega\big)+O(|s'|^2)\big);\quad \lambda_3=\frac{\alpha\omega}{\sqrt[4]{1+\beta^2}}e^{i(3\pi+(-1)^k\operatorname{arctg}\beta)/2}\big(1+$$
$$+O\big(\gamma+(-1)^{k+1}i\omega\big)+O(|s'|^2)\big). \tag{2.17}$$

Представления (2.16) вытекают из (2.7), представления (2.17) — из (2.16) и (2.10).

Лемма 2.3 [5, лемма 8.3]. *Существуют такие* $\delta_0>0$ *и* $\delta>0$, *что при* $0\leqslant|\gamma+(-1)^j i\omega|\leqslant\delta_0$, $0\leqslant|s'|\leqslant\delta$ *имеют место представления*

$$\tau_j=\nu^{-1}(\gamma-\gamma_{j,0})(1+O(\gamma-\gamma_{j,0})+O(|s'|^2)),\quad j=1, 2;$$
$$|\lambda_j|=\nu^{-1/2}|\gamma-\gamma_{j,0}|^{1/2}(1+O(\gamma-\gamma_{j,0})+O(|s'|^2)),\quad j=1, 2. \tag{2.18}$$

Лемма 2.4 [5, лемма 8.4]. *Пусть* $|s'|<\delta$, $\gamma\in\Gamma'(-\varepsilon, \delta_0)$, $\delta_0\in(0, \omega/2)$ *любое*, $\varepsilon>0$ *и* $\delta>0$ *достаточно малы. Тогда для функций* $\lambda_j(\gamma, s')$ (*см.* (2.9)) *справедливы неравенства*

$$\operatorname{Re}\lambda_j<0,\qquad j=1, 2, 3; \tag{2.19}$$
$$\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3;\qquad \lambda_1\neq\lambda_3. \tag{2.20}$$

В дальнейшем потребуются некоторые свойства элементов матрицы $\tilde{D}$ (см. (1.3)). Обозначим $\Gamma_*(s')=\{\gamma\,|\,\gamma=\gamma_3(s', s_3), s_3\geqslant0\}\cup\{\gamma\,|\,\gamma=\gamma_4(s', s_3), s_3\geqslant0\}$, где γ_3 и γ_4 — стремящиеся к нулю при $|s|\to0$ корни уравнения

$$\mathscr{P}(\gamma, s)=0, \tag{2.21}$$

многочлен $\mathscr{P}(\gamma, s)$ введен в лемме 1.1 (см. (1.5)).

Лемма 2.5. *Существуют такие* $\delta_0>0$ *и* $\delta>0$, *что при каждом* s': $|s'|<\delta$ *и* γ: $|\gamma|<\delta_0$, $\gamma\notin\Gamma_*(s')$ *для функции* $e''_{3,3}(\gamma, s', x_3)$, *введенной в* (1.9), *справедливо представление при* $|\gamma|+|s'|\to0$

$$e''_{3,3}(\gamma, s', +0)=(1/4)\omega^{-2}\lambda_3^{-1}\Big[2\alpha^2\omega^2(\gamma_{3,0}-\gamma)(1+O(\gamma)+O(|s'|^2))+$$
$$+\sqrt{2\omega\nu^{-1}}\,\lambda_3(2\alpha^2\nu\gamma(\gamma+\nu|s'|^2)+\nu|s'|^2)(1+O(\gamma)+O(|s'|^2))+$$
$$+\sqrt{2\omega^3\nu^{-3}}\,\lambda_3\alpha^2\nu\gamma(1+O(\gamma)+O(|s'|^2))\Big]. \tag{2.22}$$

Доказательство. Запишем представление для $e''_{3,3}(\gamma, s', +0)$, пользуясь (1.9) и явным видом полинома $\breve{a}_{3,3}(\gamma, s)$. Далее, учитывая представления (2.5) и (2.10), с использованием теории вычетов стандартным способом выводим (2.22). Лемма доказана.

Введем обозначения $\Pi_{\mu,\varepsilon}(|s'|)=\{\gamma\,|\,|\gamma|\leqslant\delta_0;\ |\gamma-\gamma_{3,0}|\leqslant\mu|s'|^{2(1+\varepsilon)}\}$, $\Pi'_{\mu,\varepsilon}(|s'|)=\{\gamma\,|\,|\gamma|\leqslant\delta_0;\ |\gamma-\gamma_{3,0}|\geqslant\mu|s'|^{2(1+\varepsilon)}\}$, $\mu>0$, $\varepsilon>0$, так что $\Pi_{\mu,\varepsilon}(|s'|)\cup\Pi'_{\mu,\varepsilon}(|s'|)=\{\gamma\,|\,|\gamma|\leqslant\delta_0\}$. Детальное исследование правой части представления (2.22) при $\gamma\in\Pi_{\mu,\varepsilon}(|s'|)$, $\gamma\in\Pi'_{\mu,\varepsilon}(|s'|)$ с учетом равенств (2.14) и (2.15) приводит к следующему утверждению.

Лемма 2.6. *Для любых* $\varepsilon\in(0, 1)$, $\mu>0$ *существуют* $\delta_0>0$ *и* $\delta>0$ *такие, что при любом* $|s'|\in[0, \delta]$ *имеют место оценки*

$$|e''_{3,3}(\gamma, s', +0)|\geqslant c_{2,6}|s'|^2, \quad \gamma\in\Pi_{\mu,\varepsilon}(|s'|), \tag{2.23}$$

$$|e''_{3,3}(\gamma, s', +0)|\geqslant c_{2,6}|\gamma-\gamma_{3,0}|^{\varepsilon}, \quad |e''_{3,3}(\gamma, s', +0)|\geqslant c_{2,6}|s'|^{3},$$
$$\gamma\in\Pi'_{\mu,\varepsilon}(|s'|), \tag{2.24}$$

где постоянная $c_{2,6}>0$ *не зависит от* (γ, s').

Следствие 2.6. *Существуют такие* $\delta_0>0$, $\delta>0$, *что при* $0\leqslant|\gamma|\leqslant\delta_0$, $0\leqslant|s'|\leqslant\delta$ *справедлива оценка* (2.23).

Следствие 2.7. *Для любого* $\mu>0$ *существуют* $\delta_0>0$, $\delta>0$ *такие, что при* $|s'|\in(0, \delta)$, $\gamma\in\Pi'_{\mu,0}(|s'|)$ *справедлива оценка*

$$|e''_{3,3}(\gamma, s', +0)|\geqslant\widehat{c}_{2,7}; \quad \widehat{c}_{2,7}=\widehat{c}_{2,7}(\alpha, \omega, \nu, \mu)>0. \tag{2.25}$$

Введем обозначения: $\Gamma_+(s')=\{\gamma|\gamma=\gamma_1(s', s_3), s_3\geqslant0\}$, $\Gamma_-(s')=\{\gamma|\gamma=\gamma_2(s', s_3), s_3\geqslant0\}$, $\gamma_1(s', s_3)$, $\gamma_2(s', s_3)$ — корни уравнения (2.21), стремящиеся к $i\omega$ и $-i\omega$ соответственно при $|s|\to0$.

Лемма 2.7. *Существуют такие* $\delta_0>0$ *и* $\delta>0$, *что при каждом* s': $|s'|<\delta$ *и* γ: $|\gamma+(-1)^j i\omega|<\delta_0$, $\gamma\notin\Gamma_\pm(s')$ *имеют место асимптотические представления*:

$$e''_{3,3}(\gamma, s', +0)=\frac{\alpha^2\beta\left(\beta+(-1)^{j+1}2i\sqrt{1+\beta^2}\,e^{(-1)^{j+1}\operatorname{arctg}\beta}\right)e^{(-1)^j\operatorname{arctg}\beta}}{2\sqrt[4]{1+\beta^2}\,(1+(1+\beta^2)\gamma^2\omega^{-2}+2\beta\gamma\omega^{-1})}+$$
$$+O\left(\sqrt{\gamma-\gamma_{j,0}}\right)+O(|s'|^2), \quad \beta=\alpha^2\omega\nu, \ j=1, 2. \tag{2.26}$$

Доказательство. Вывод представления (2.26) совершенно аналогичен выводу (2.22). Следует лишь воспользоваться следствием 2.5 и леммой 2.3. Лемма доказана.

Следствие 2.8. *В условиях леммы 2.7 справедлива оценка*

$$|e''_{3,3}(\gamma, s', +0)|\geqslant\widehat{c}_{2,8}; \quad \widehat{c}_{2,8}=\widehat{c}_{2,8}(\alpha, \omega, \nu)>0. \tag{2.27}$$

Лемма 2.8. *Пусть выполнены условия леммы 2.5 или 2.7. Тогда имеют место равенства*

$$e'_{3,3}(\gamma, s', +0)=-1/2; \quad S_3(\gamma, s')=-1/2\nu^{-1}\left(e''_{3,3}(\gamma, s', +0)\right)^{-1}. \tag{2.28}$$

Доказательство. Первое из равенств (2.28) получено с помощью теории вычетов из (1.8) и явного вида полиномов $\breve{a}_{3,3}(\gamma, s)$, $\breve{a}_{3,4}(\gamma, s)$. Второе равенство (2.28) следует из первого и представления (1.6). Лемма доказана.

Лемма 2.9. *Пусть* $|s'|<\delta$, $\gamma\in\Gamma'(-\varepsilon, \delta_0)$, *где* $\delta_0\in(0, \omega/2)$, $\varepsilon>0$ *и* $\delta>0$ — *достаточно малые числа. Тогда функции* $\widetilde{D}_{j,m}(\gamma, s', x_3)$ (*см.* (1.3)) *представимы в виде*

$$\widetilde{D}_{j,m}(\gamma, s', x_3)=\sum_{l=1}^{3}\widetilde{D}_{j,m,l}(\gamma, s', x_3); \quad j=1, 2, 3, 4; \ m=1, 2, 3, \tag{2.29}$$

где

$$\widetilde{D}_{j,m,l}(\gamma, s', x_3)=(1-\delta_{3,m})\frac{\partial}{\partial x_3}e_{j,m,l}(\gamma, s', x_3)+e_{j,3,l}(\gamma, s', x_3)S_m(\gamma, s'), \tag{2.30}$$

$$e_{j,m,l}(\gamma, s', x_3)=\breve{a}_{j,m}(\gamma, s', -i\lambda_l)\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathscr{R}(\gamma, s', \lambda)|_{\lambda=\lambda_l}\right]^{-1}e^{\lambda_l x_3}. \tag{2.31}$$

Доказательство. С учетом леммы 2.4 и представления (2.31) введем функции

$$e_{j,m}(\gamma, s', x_3) = \mathscr{F}^{-1}_{s_3 \to x_3}\left[\frac{\breve{a}_{j,m}(\gamma, s', s_3)}{\mathscr{P}(\gamma, s', s_3)}\right] = \sum_{l=1}^{3} e_{j,m,l}(\gamma, s', x_3). \qquad (2.32)$$

Учитывая (2.30), из (1.3) и (2.32) выводим (2.29). Лемма доказана.

Введем обозначения:

$$\mathscr{D}_l(\gamma, |s'|) = \prod_{k=1;k\neq l}^{3} (y_l - y_k)^{-1}, \quad l = 1, 2, 3, \qquad (2.33)$$

$$\widetilde{d}_{j,m,l}(\gamma, s') = (1 - \delta_{3,m})\,\breve{a}_{j,m,l}(\gamma, s') + \lambda_l^{-1}\breve{a}_{j,3,l}(\gamma, s')\,S_m(\gamma, s'), \qquad (2.34)$$

где $\breve{a}_{j,m,l}(\gamma, s') = \breve{a}_{j,m}(\gamma, s', -i\lambda_l)$; $j = 1, 2, 3, 4$; m, $l = 1, 2, 3$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathscr{R}(\gamma, s', \lambda)|_{\lambda=\lambda_l} = -2(1 + \alpha^2\nu\gamma)\,\lambda_l\mathscr{D}_l^{-1}(\gamma, |s'|), \quad l = 1, 2, 3; \qquad (2.35)$$

$$\widetilde{D}_{j,m,l}(\gamma, s', x_3) = -(2(1 + \alpha^2\nu\gamma))^{-1}\,\mathscr{D}_l(\gamma, |s'|)\,e^{\lambda_l x_3}\widetilde{d}_{j,m,l}(\gamma, s'). \qquad (2.36)$$

Обозначим через $Q_k(-\varepsilon, \delta_0)$ область в γ-плоскости, ограниченную контуром $\Gamma_k(-\varepsilon, \delta_0)$ и отрезком прямой $\mathrm{Re}\,\gamma = -\varepsilon$.

Лемма 2.10. *Существуют такие* $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *и* $\delta_0 \in (0, \omega/2)$, *что функции* $\mathscr{D}_l$ *аналитичны по* γ *в областях* $Q_k(-\varepsilon, \delta_0)$ *при* $0 < |s'| < \delta$ *и справедливы представления*

$$\mathscr{D}_l = (1/2)(-1)^l i\omega^{-1}((-1)^{l+1}i\omega - \gamma(1 + \alpha^2\nu\gamma)^{-1})^{-1}(1 + O(|s'|^2)), \quad l = 1, 2, \qquad (2.37)$$

$$\mathscr{D}_3 = (\omega^2 + \gamma^2(1 + \alpha^2\nu\gamma)^{-2})^{-1}(1 + O(|s'|^2)), \qquad \gamma \in Q_k(-\varepsilon, \delta_0),\ k = 1, 2;$$

при $\gamma \in Q_3(-\varepsilon, \delta_0)$ *справедливы представления*

$$\mathscr{D}_l = -(1/2)\,\omega^{-2}(1 + O(\gamma) + O(|s'|^2)), \quad l = 1, 2;$$
$$\mathscr{D}_3 = -\omega^{-2}(1 + O(\gamma) + O(|s'|^2)). \qquad (2.38)$$

Доказательство. Из следствия 2.1 вытекает, что функции y_l, $l = 1, 2, 3$, как простые корни уравнения (2.2) аналитичны при $\gamma \in Q_k(-\varepsilon, \delta_0)$, $0 < |s'| < \delta$, поэтому из (2.33) следует аналитичность $\mathscr{D}_l$. Представления (2.37), (2.38) получены из (2.6). Лемма доказана.

Следствие 2.9. *В условиях леммы* 2.10 *имеют место оценки*

$$|D_l| \leqslant \widehat{c}_{2,9}; \quad |y_k - y_l| \geqslant \widehat{c}_{2,9}^{-1}; \quad \widehat{c}_{2,9} = \mathrm{const} > 0; \quad k, l = 1, 2, 3. \qquad (2.39)$$

Для дальнейшего необходимо исследовать аналитичность функций $\widetilde{D}_{j,m,l}(\gamma, s', x_3)$.

Лемма 2.11 (см. [5, лемма 10.2]). *Существуют такие* $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *и* $\delta_0 \in (0, \omega/2)$, *что при* $0 < |s'| < \delta$ *функции* λ_l, $l = 1, 2, 3$, *аналитичны по* γ *в областях* $Q_k(-\varepsilon, \delta_0)$; $k = 1, 2, 3$; $k \neq l$.

Множество значений $\gamma \in \mathbf{C}$, при которых функции λ_l теряют аналитичность, описывается $\gamma(s)$-корнями полинома $\mathscr{P}(\gamma, s)$ (см. [4]). Приведем без доказательства результаты работ [3, 4], касающиеся асимптотических представлений γ-корней $\mathscr{P}(\gamma, s)$ при $|s| \to 0$.

Для не обращающихся в нуль при $|s| = 0$ корней уравнения $\mathscr{P}(\gamma, s) = 0$ имеем (см. [4])

$$\gamma_j = (-1)^{j+1}i(\omega + (2\alpha^2\omega)^{-1}|s'|^2) - \nu|s|^2 + O(|s|^4), \qquad j = 1, 2. \qquad (2.40)$$

Контуры в комплексной γ-плоскости, определяемые отображениями $s_3 \to \gamma_j$, $j = 1, 2$, при малых $|s|$ лежат в $Q_j(-\varepsilon, \delta_0)$, $j = 1, 2$. Два других корня — γ_3 и γ_4 — обращаются в нуль при $|s| = 0$. При s: $0 < |s| < \delta$, $s_3|s|^{-1} > \delta_1 > 0$ справедливы представления [4]

$$\gamma_j = (-1)^{j+1}i\alpha^{-1}s_3 - \nu|s|^2/2 + O(|s|^3), \qquad j = 3, 4, \qquad (2.41)$$

где оценка $O(|s|^3)$ равномерна в указанном секторе изменения переменной s. При $s_3|s|^{-1}<\delta_1$ введем обозначения

$$s_3|s|^{-1}=\rho\cos\sigma;\quad |s|=\rho\sin\sigma;\quad 0<\rho<\delta_2=\sqrt{\delta^2+\delta_1^2};\quad 0\leqslant\sigma\leqslant\pi/2. \tag{2.42}$$

При $0\leqslant\cos\sigma\leqslant\delta_3$ ($\delta_3>0$ достаточно мало) имеют место представления [4]

$$\gamma_3=-\nu\alpha^{-2}\omega^{-2}\rho^4-\alpha^{-2}\nu^{-1}\rho^2\cos^2\sigma+O(\rho^6)+O(\rho^4\cos^2\sigma)+O(\rho^2\cos^4\sigma), \tag{2.43}$$
$$\gamma_4=-\nu\rho^2+O(\rho^4)+O(\rho^2\cos^2\sigma).$$

При $0\leqslant\sin\sigma\leqslant\delta_4$ ($\delta_4>0$ достаточно мало) справедливы представления [4]

$$\gamma_j=(-1)^{j+1}i\alpha^{-1}\rho^2\sin\sigma-\frac{1}{2}\nu\rho^2\sin^2\sigma+O(\rho^2\sin^3\sigma),\quad j=3,4. \tag{2.44}$$

Если $0<\delta_4\leqslant\sin\sigma\leqslant\sqrt{1-\delta_3^2}$, то при $j=3, 4$ [4]

$$\gamma_j=(1/2)\rho^2\sin^2\sigma(-\nu+(-1)^{j+1}\sqrt{(4+\alpha^2\nu^2)\alpha^{-2}-(4\alpha^{-2}+O(\rho^2))\sin^{-2}\sigma})+ +O(\rho^4), \tag{2.45}$$

$$\operatorname{Re}\gamma_3\leqslant-(1/2)\nu^*\rho^2\sin^2\sigma+O(\rho^4),\quad 0<\nu^*<\nu;$$
$$\operatorname{Re}\gamma_4\leqslant-(\nu/2)\rho^2\sin^2\sigma+O(\rho^4). \tag{2.46}$$

Замечание 2.1. Из (2.41)—(2.46) следует, что

$$|\gamma_j(s)|\leqslant\hat{c}_{2,1}|s|,\quad j=3,\ 4;\quad 0\leqslant|s|\leqslant\delta;\quad \hat{c}_{2,1}=\mathrm{const}>0. \tag{2.47}$$

Лемма 2.12 [3, лемма 4.1]. *При $s'\in(0,\delta)$, где $\delta>0$ достаточно мало, существуют такие $\gamma^*\in(\gamma_{4,0},\gamma_{3,0})$, $\overset{*}{s}_3(s')>0$ и $\delta^*(s')>\overset{*}{s}_3$, что при $s_3\in[0,\overset{*}{s}_3)$ корни γ_3 и γ_4 вещественные различные; при $s_3=\overset{*}{s}_3$ $\gamma^*=\gamma_3(s',\overset{*}{s}_3)=\gamma_4(s',\overset{*}{s}_3)$; при $s_3\in(\overset{*}{s}_3,\delta^*]$ $\gamma_3(s',s_3)=\overline{\gamma_4(s',s_3)}$.*

Следствие 2.10. *В условиях леммы 2.12 существуют числа $s_3^{(k)}(s')$, $k=1, 2, 3$: $0<s_3^{(1)}<\overset{*}{s}_3<s_3^{(2)}<s_3^{(3)}$ такие, что при $0\leqslant s_3\leqslant s_3^{(1)}$ имеют место представления (2.43), при $s_3^{(1)}\leqslant s_3\leqslant s_3^{(2)}$ — представления (2.45) и оценки (2.46), при $s_3^{(2)}\leqslant s_3\leqslant s_3^{(3)}$ — (2.41) или (2.44), причем $s_3^{(k)}\to0$, $|s'|\to0$.*

Из приведенных результатов вытекает

Лемма 2.13. *Существуют $\varepsilon>0$, $\delta>0$ и $\delta_0\in(0,\omega/2)$ такие, что при $0<|s'|<\delta$ функция λ_k, $k=1, 2, 3$, аналитична по γ в $Q_k(-\varepsilon,\delta_0)$, за исключением точек контура $\gamma=\gamma_k(s',s_3)$ при $k=1, 2$ и контуров $\gamma=\gamma_3(s',s_3)$ и $\gamma=\gamma_4(s',s_3)$ при $k=3$.*

Лемма 2.14. *Существуют такие $\varepsilon>0$, $\delta>0$, $\delta_0\in(0,\omega/2)$, что при $0<|s'|<\delta$, $\gamma\in Q_k(-\varepsilon,\delta_0)$, $k=1, 2, 3$, функции $S_m(\gamma,s')$, $m=1, 2, 3$, (см. (1.6)) теряют аналитичность лишь в том случае, когда неаналитична хотя бы одна из функций $\lambda_l(\gamma,s')$, $l=1, 2, 3$.*

Доказательство. Из (1.6) и (2.28) следует, что S_m могут терять аналитичность лишь в тех случаях, когда функции $e'_{3,m}(\gamma,s',+0)$, $m=1, 2$; $e''_{3,3}(\gamma,s',+0)$ теряют аналитичность либо $e''_{3,3}(\gamma,s',+0)$ обращается в нуль. Выражая $e'_{3,m}(\gamma,s',+0)$, $m=1, 2$; $e''_{3,3}(\gamma,s',+0)$ через $\mathscr{D}_l$, λ_l, $\tilde{a}_{3,m,l}$ и учитывая следствия 2.6, 2.8, приходим к требуемому утверждению. Лемма доказана.

Из (2.34) и (2.36) вытекает

Следствие 2.11. *В условиях леммы 2.14 функции $\widetilde{D}_{j,m,l}(\gamma,s',x_3)$ при $x_3>0$ теряют аналитичность по γ тогда и только тогда, когда теряет аналитичность хотя бы одна из функций λ_l, $l=1, 2, 3$.*

При вычислении главного члена асимптотики решения нам потребуется более точная информация о поведении функции λ_3. Пусть $\nu_0 \in (0, \nu/2)$, $\gamma_0 = -\nu_0|s'|^2$. Из лемм 2.12, 213 и следствия 2.10 вытекает, что на отрезке действительной оси $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_{3,0}] \subset \mathbf{C}$ функция λ_3 неаналитична. Определим функцию λ_3^+ (λ_3^-) как непрерывное продолжение λ_3 по переменной γ на отрезок $[\gamma_0, \gamma_{3,0}]$ из верхней (нижней) полуокрестности этого отрезка $(0 < |s'| < \delta)$. Аналогично определим функции $e^{\pm}_{j,m,l}$, $S^{\pm}_m$ и др. Введем вместо переменных (γ, s') новые переменные (z, ξ, φ):

$$\gamma = -z; \quad s_1 = \xi \cos\varphi; \quad s_2 = \xi \sin\varphi; \qquad (z, \xi, \varphi) \in \mathbf{C} \times [0, \infty) \times [0, 2\pi) \quad (2.48)$$

— и обозначим $z_0 = -\gamma_0$; $z_{3,0} = -\gamma_{3,0}$; $z_{4,0} = -\gamma_{4,0}$.

Лемма 2.15 [5, лемма 10.6]. *Существует такое $\delta > 0$, что при $z_{3,0} \leqslant z \leqslant z_0$, $0 < \xi < \delta$ справедливо представление*

$$\lambda_3^{\pm} = \mp i\alpha (z - z_{3,0})^{1/2} (z_{4,0} - z)^{1/2} (1 + O(\xi^2)). \quad (2.49)$$

§ 3. Построение асимптотического разложения решения

Из леммы 1.1 следует, что главная часть асимптотики при $t \to \infty$ матрицы $D(t, x', x_3)$ содержится в составляющих этой матрицы вида

$$D^{(k)}(t, x', x_3) = \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int\limits_{|s'|<\delta} \int\limits_{\Gamma_k(-\varepsilon, \delta_0)} e^{\gamma t + i(s', x')} \widetilde{D}(\gamma, s', x_3)\, d\gamma\, ds', \ k = 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

где контуры Γ_k определены в (1.4). Для исследования элементов матриц $D^{(k)}$ при $t \to \infty$ достаточно изучить асимптотику интегралов

$$D^{(k)}_{j,m,l}(t, x) = \frac{(-1)}{(2\pi)^3 i} \int\limits_{|s'|<\delta} \int\limits_{\Gamma_k(-\varepsilon, \delta_0)} \frac{e^{\gamma t + i(s', x')}}{2(1 + \alpha^2 \nu\gamma)} \mathscr{D}_l e^{\lambda_l x_3} \widetilde{d}_{j,m,l}\, d\gamma\, ds', \quad (3.2)$$

$j = 1, 2, 3, 4$; $m, l = 1, 2, 3$; $\widetilde{d}_{j,m,l}$ и $\mathscr{D}_l$ введены в (2.33), (2.34).

Теорема 3.1. *Существуют такие $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $\delta_0 \in (0, \omega/2)$, что для интегралов $D^{(k)}_{j,m,l}(t, x)$, $j = 1, 2, 3, 4$; $m, l = 1, 2, 3$; $k = 1, 2$, справедливы следующие оценки при $t \to \infty$, равномерные по $x \in R_3^+$:*

$$|D^{(k)}_{j,m,l}| \leqslant c_{3,1} t^{-2}, \ j = 1, 2; \quad |D^{(k)}_{j,m,l}| \leqslant c_{3,1} t^{-5/2}, \ j = 3, 4. \quad (3.3)$$

Доказательство. На основании лемм 2.10, 2.11, 2.13, 2.14 перейдем в (3.2) к интегрированию по контуру $\widetilde{\Gamma}_k(s')$, $k = 1, 2$. Контур $\widetilde{\Gamma}_1(s')$ $(\widetilde{\Gamma}_2(s'))$ состоит из отрезка $c^{(1)}_\varepsilon$ $(c^{(2)}_\varepsilon)$ прямой $\operatorname{Re}\gamma = -\varepsilon$ $(|\operatorname{Im}\gamma(\mp)\omega| < \delta_0)$, берегов разреза $\Gamma^{1,\pm}_\varepsilon$ $(\Gamma^{2,\pm}_\varepsilon)$ вдоль кривой $\gamma = \gamma_1(s', s_3)$ $(\gamma = \gamma_2(s', s_3))$ и замыкающей их дуги окружности $S^{(1)}_r$ $(S^{(2)}_r)$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $\gamma = \gamma_{1,0}$ $(\gamma = \gamma_{2,0})$.

Введем обозначение

$$D_{j,m,l}(t, x, C) = \frac{(-1)}{(2\pi)^3 i} \int\limits_{|s'|<\delta} \int\limits_{C} \frac{e^{\gamma t + i(s', x')}}{2(1 + \alpha^2 \nu\gamma)} \mathscr{D}_l e^{\lambda_l x_3} \widetilde{d}_{j,m,l}\, d\gamma\, ds' \quad (3.4)$$

(C — кусочно-гладкая кривая в γ-плоскости) и заметим, что существует такое $\delta > 0$, что при любых $(t, x) \in R_4^{++}$

$$\lim_{r \to 0} D_{j,m,l}(t, x, S^{(k)}_r) = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4; \ m, l = 1, 2, 3; \ k = 1, 2. \quad (3.5)$$

Действительно, с помощью замены переменной $\gamma = \gamma_{k,0} + re^{i\theta}$ на основании представлений (2.9), (2.12), (2.34), (1.6), (2.18) может быть получена оценка

$$|D_{j,m,l}(t,x,S_r^{(k)})| \leqslant c'_{3,1} \int\limits_{|s'|<\delta} \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{r}\, d\theta\, ds', \tag{3.6}$$

из которой следует равенство (3.5). Пользуясь (3.5), запишем

$$D^{(k)}_{j,m,l}(t,x) = D_{j,m,l}(t,x,C_\varepsilon^{(k)}) + D_{j,m,l}(t,x,\Gamma_\varepsilon^{(k)}). \tag{3.7}$$

Очевидна оценка

$$|D_{j,m,l}(t,x,C_\varepsilon^{(k)})| \leqslant c''_{3,1} e^{-\varepsilon t}, \quad j=1,2,3,4;\ m,l=1,2,3;\ k=1,2. \tag{3.8}$$

Для завершения доказательства необходимо установить неравенства

$$|D_{j,m,l}(t,x,\Gamma_\varepsilon^{(k)})| \leqslant c'''_{3,1} t^{-2},\ j=1,2; \quad |D_{j,m,l}(t,x,\Gamma_\varepsilon^{(k)})| \leqslant c'''_{3,1} t^{-5/2},\ j=3,4; \tag{3.9}$$

m, $l=1, 2, 3$; $k=1, 2$. Для этого представим исследуемые величины в виде сумм $D_{j,m,l}(t,x,\Gamma_\varepsilon^{k,+}) + D_{j,m,l}(t,x,\Gamma_\varepsilon^{k,-})$ и параметризуем контур $\Gamma_\varepsilon^{k,\pm}$ с помощью замены переменной γ на переменную s_3 по формуле $\gamma=\gamma_k(s', s_3)$. Используя далее формулы (2.39), (2.40), следствия 2.5, 2.8, оценки (2.26), (2.27), а также известную лемму Ватсона [6], после несложных преобразований приходим к (3.9). Теорема доказана.

В дальнейшем нам понадобятся асимптотические представления ряда эталонных интегралов, которые мы приведем здесь без доказательства. Введем обозначения:

$$\eta(z-z_{3,0},\ \xi) = [\alpha^2(z-z_{3,0}) + (1/2)\omega^{-3}\nu^2\xi^6]^{-1}, \quad z\in\mathbf{C}, \quad \xi\geqslant 0, \tag{3.10}$$

$$T_\mu(t) = \int\limits_0^\delta \int\limits_{z_{3,0}}^{z_0} e^{-zt}\lambda_3^+ \eta\, dz\, \xi^\mu\, d\xi, \quad \mu\geqslant 1, \tag{3.11}$$

$$\widehat{T}_\mu(t) = \int\limits_0^\delta \int\limits_{z_{3,0}}^{z_0} e^{-zt}\lambda_3^+ \eta\, \frac{z-z_{3,0}}{\tau_3}\, dz\, \xi^{\mu+2}\, d\xi, \quad \mu\geqslant 1, \tag{3.12}$$

$$\widehat{\widehat{T}}_\mu(t) = \int\limits_0^\delta \int\limits_{z_{3,0}}^{z_0} e^{-zt}\lambda_3^+ \eta\, \frac{(z-z_{3,0})^2}{\tau_3}\, dz\, \xi^{\mu+2}\, d\xi, \quad \mu\geqslant 1, \tag{3.13}$$

$$J^j_\mu(t,x) = \int\limits_0^{\theta_0} \int\limits_0^\delta e^{\gamma_j(\lambda,\theta)t} f(\lambda,\theta,x)\, \lambda^\mu\, d\lambda\, d\theta, \quad j=3,4;\ x\in R_3^+, \tag{3.14}$$

$$\widehat{J}^j_\mu(t,x) = \int\limits_0^{\sigma_0} \int\limits_0^\delta e^{\gamma_j(\rho,\sigma)t} \widehat{f}(\rho,\sigma,x)\, \rho^\mu \sin^{\mu-1}\sigma\, d\rho\, d\sigma, \quad j=3,4;\ x\in R_3^+. \tag{3.15}$$

В (3.14) $\theta_0\in(0, \pi/2)$; $\mu\geqslant 0$ целое; $\gamma_j(\lambda, \theta)$ — корни полинома $\mathscr{P}(\gamma, s)$ после замены переменных

$$s_1=\lambda\cos\varphi\sin\theta; \quad s_2=\lambda\sin\varphi\sin\theta; \quad s_3=\lambda\cos\theta; \quad \lambda\geqslant 0; \tag{3.16}$$
$$\varphi\in[0, 2\pi);\ \theta\in[0,\pi].$$

В (3.15) $\sigma_0\in(0, \pi/2)$; $\mu\geqslant 1$ целое; $\gamma_j(\rho, \sigma)$ — корни полинома $\mathscr{P}(\gamma, s)$ после замены переменных (2.42).

Теорема 3.2 [5, леммы 12.1—12.3]. *Существует такое* $\delta>0$, *что для интегралов* (3.11)—(3.13) *при* $t\to\infty$ *справедливы асимптотические* *представления*

$$T_\mu(t) = (1/4i)\Gamma(1/2)\Gamma(1/2+\mu/4)(\alpha^2\omega^2\nu^{-1}t^{-1})^{\mu/4}\omega t^{-1}(1+O(t^{-\varepsilon})), \quad (3.17)$$

$$\widehat{T}_\mu(t) + \alpha^{-2}\nu^{-1}T_\mu(t) = O(t^{-3/2-\mu/4}), \quad (3.18)$$

$$\widehat{\widehat{T}}_\mu(t) = O(t^{-2-\mu/4}), \quad \varepsilon \in (0, 1/4). \quad (3.19)$$

Лемма 3.1 [5, лемма 12.4]. *Пусть в* (3.14) $f(\lambda, \theta, x) \in C^1([0, \delta]) \times \times C([0, \theta_0] \times R_3^+;$ $|f(\lambda, \theta, x)| \leqslant \mathrm{const}$. *Тогда при всех целых* $\mu \geqslant 0$ *и любом* $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что справедлива оценка*

$$|J_\mu^j(t, x)| \leqslant \widehat{c}_{3,1} t^{-1/2-\mu/2}, \quad j = 3, 4. \quad (3.20)$$

Лемма 3.2 [5, лемма 12.5]. *Пусть в* (3.15) $\widehat{f}(\rho, \sigma, x) \in C^1([0, \delta] \times [0\ \sigma_0]) \times C(R_3^+)$; $|\widehat{f}(\rho, \sigma, x)| \leqslant \mathrm{const}$. *Тогда при всех целых* $\mu \geqslant 1$ *существуют такие* $\delta > 0$ *и* $\sigma_0 \in (0, \pi/2)$, *что справедлива оценка*

$$|\widehat{J}_\mu^j(t, x)| \leqslant \widehat{c}_{3,2} t^{-1/2-\mu/2+\varepsilon}, \quad j = 3, 4, \quad (3.21)$$

с произвольным $\varepsilon \in (0, 1/2 + \mu/2)$.

Переходим к исследованию интегралов (3.2) при $k = 3$.

Теорема 3.3. *Существуют такие* $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\delta_0 \in (0, \omega/2)$, $\varepsilon^* \in \in (0, 1/4)$, *что для интегралов* $D_{j,m}^{(3)}(t, x) = \sum_{l=1}^{3} D_{j,m,l}^{(3)}(t, x)$, $j = 1, 2, 3, 4$; $m = 1, 2, 3$, *справедливы асимптотические представления при* $t \to \infty$

$$D_{j,m}^{(3)}(t, x) = \frac{\alpha^{3/2}\omega\nu^{-1/4}}{32\sqrt{2}\pi^2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\mathcal{G}_{j,m}(x)t^{-7/4} + (1+|x|)O\left(t^{-7/4-\varepsilon^*}\right),$$
$$j, m = 1, 2,$$

$$D_{3,m}^{(3)}(t, x) = \frac{\alpha^{5/2}\omega^{3/2}\nu^{-1/4}}{64\pi^2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\mathcal{G}_{3,m}(x)t^{-9/4} + (1+|x|^2)O\left(t^{-9/4-\varepsilon^*}\right),$$
$$m = 1, 2,$$

$$D_{4,m}^{(3)}(t, x) = \frac{\alpha^{3/2}\omega\nu^{-1/4}}{32\sqrt{2}\pi^2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\mathcal{G}_{4,m}(x)t^{-7/4} + (1+|x'|^2+x_3)O\left(t^{-7/4-\varepsilon^*}\right),$$
$$m = 1, 2, \quad (3.22)$$

$$D_{j,3}^{(3)}(t, x) = \frac{\alpha^{3/2}\omega^{3/2}\nu^{-7/4}}{32\pi^2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\mathcal{G}_{j,3}(x)t^{-7/4} + (1+|x'|^2+x_3)O\left(t^{-7/4-\varepsilon^*}\right)$$
$$j = 1, 2,$$

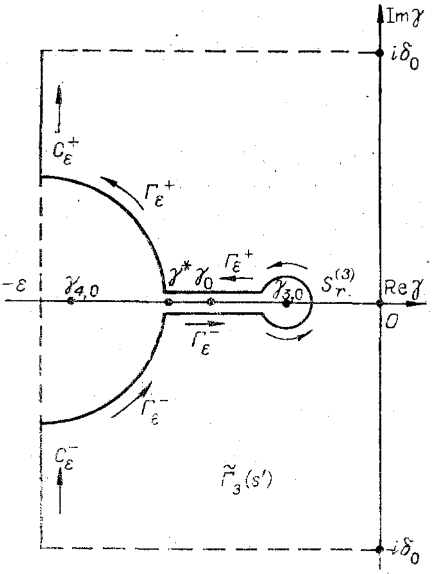
$$D_{3,3}^{(3)}(t, x) = \frac{\alpha^{3/2}\omega\nu^{-5/4}}{16\sqrt{2}\pi^2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\mathcal{G}_{3,3}(x)t^{-7/4} + \left(1+|x'|+x_3^2\right)O\left(t^{-7/4-\varepsilon^*}\right),$$

$$D_{4,3}^{(3)}(t, x) = \frac{\alpha^{1/2}\omega^{3/2}\nu^{-5/4}}{16\pi^2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\mathcal{G}_{4,3}(x)t^{-5/4} + (1+|x|)O\left(t^{-5/4-\varepsilon^*}\right),$$

где функции $\mathcal{G}_{j,m}(x)$ *определены в* (14), *оценки* $O(\cdot)$ *равномерны по* $x \in R_3^+$.

Доказательство. В силу лемм 2.10, 2.11, 2.13, 2.14 в (3.2) (при $k = 3$) возможен переход к интегрированию по контуру $\widetilde{\Gamma}_3(s')$ (см. рисунок), состоящему из отрезков $C_\varepsilon^\pm$ прямой $\mathrm{Re}\,\gamma = -\varepsilon$, отрезков кривых $\gamma = \gamma_3(s', s_3)$, $\gamma = \gamma_4(s', s_3)$ и берегов разреза $\Gamma_\varepsilon^\pm$ вдоль отрезка действительной оси $[\gamma^*, \gamma_{3,0}]$, а также замыкающей их дуги окружности $S_r^{(3)}$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $\gamma = \gamma_{3,0}$. Рассуждая так же, как при выводе (3.5), (3.8), получаем, что справедливо представление

$$D_{j,m}^{(3)}(t, x) = \sum_{l=1}^{3} D_{j,m,l}(t, x, \Gamma_\varepsilon) + O\left(e^{-\varepsilon t}\right), \quad \varepsilon > 0, \quad (3.23)$$



где $\Gamma_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon^-$, оценка $O(e^{-\varepsilon t})$ равномерна по $x \in R_3^+$. Обозначим через Γ_0^+ (Γ_0^-) верхний (нижний) берег разреза вдоль отрезка $[\gamma_0, \gamma_{3,0}]$, $\gamma_0 = -\nu_0|s'|^2$, $0 < \nu_0 < \nu/2$; пусть $\Gamma_0 = \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$; $G_{j,m,l}^0(t, x) = D_{j,m,l}(t, x, \Gamma_0)$; $G_{j,m,l}^1(t, x) = D_{j,m,l}(t, x, \Gamma_\varepsilon \setminus \Gamma_0)$. Тогда

$$D_{j,m,l}(t, x, \Gamma_\varepsilon) = G_{j,m,l}^0(t, x) + G_{j,m,l}^1(t, x) \tag{3.24}$$

Докажем теперь, что существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что интегралы $G_{j,m}^1(t, x) = \sum_{l=1}^{3} G_{j,m,l}^1(t, x)$ при всех $(t, x) \in R_4^{++}$ любом $\varepsilon' \in (0, 2)$ удовлетворяют оценкам

$$\begin{gathered}
|G_{j,m}^1(t, x)| \leqslant c_{3,3}'' t^{-2}, \ (j, m) \in \{1; 2\} \times \{1; 2; 3\} \cup \{4\} \times \{1; 2\}, \\
|G_{3,m}^1(t, x)| \leqslant c_{3,3}'' t^{-5/2+\varepsilon'}, \quad m = 1, 2, \\
|G_{3,3}^1(t, x)| \leqslant c_{3,3}'' t^{-2+\varepsilon'}; \ |G_{4,3}^1(t, x)| \leqslant c_{3,3}'' t^{-3/2}.
\end{gathered} \tag{3.25}$$

Для доказательства оценок (3.25) необходимо разбить контур $\Gamma_\varepsilon \setminus \Gamma_0$ на части Λ_μ, $\mu = 1, 2, 3$; $\Lambda_1 = \Lambda_1^+ \cup \Lambda_1^-$ $(\Lambda_1^+ (\Lambda_1^-)$ — верхний (нижний) берег разреза $[\gamma^*, \gamma_0]$, который параметризуется функцией $\gamma_3(s', s_3)$, $s_3^{(1)} \leqslant s_3 \leqslant s_3^*$ (см. лемму 2.12 и следствие 2.10)); $\Lambda_2 = \Lambda_2^+ \cup \Lambda_2^-$ $(\Lambda_2^+ = \{\gamma \mid \gamma = \gamma_3(s', s_3), s_3^* \leqslant s_3 \leqslant s_3^{(2)}\}$; $\Lambda_2^- = \{\gamma \mid \gamma = \gamma_4(s', s_3), s_3^* \leqslant s_3 \leqslant s_3^{(2)}\})$; $\Lambda_3 = \Lambda_3^+ \cup \Lambda_3^-$ $(\Lambda_3^+ = \{\gamma \mid \gamma = \gamma_3(s', s_3), s_3^{(2)} \leqslant s_3 \leqslant s_3^{(3)}\}$; $\Lambda_3^- = \{\gamma \mid \gamma = \gamma_4(s', s_3), s_3^{(2)} \leqslant s_3 \leqslant s_3^{(3)}\})$.

После параметризации контуров интегрирования и оценок, использующих асимптотические представления подынтегральных функций (см. леммы 2.1, 2.2, 2.10, следствия 2.1—2.4, 2.9), задача доказательства (3.25) сводится к оценке эталонных интегралов (3.14), (3.15). Оценки (3.25) позволяют записать соотношение (3.23) в виде

$$D_{j,m}^{(3)}(t, x) = \sum_{l=1}^{3} G_{j,m,l}^0(t, x) + \begin{Vmatrix} O(t^{-2}) & O(t^{-2}) & O(t^{-2}) \\ O(t^{-2}) & O(t^{-2}) & O(t^{-2}) \\ O(t^{-5/2+\varepsilon'}) & O(t^{-5/2+\varepsilon'}) & O(t^{-2+\varepsilon'}) \\ O(t^{-2}) & O(t^{-2}) & O(t^{-3/2}) \end{Vmatrix}, \tag{3.26}$$

причем оценки $O(\cdot)$ равномерны по $x \in R_3^+$.

Обозначим $G_{j,m,l}^{0,\pm}(t, x) = D_{j,m,l}(t, x, \Gamma_0^\pm)$ и с учетом леммы 2.15 запишем с помощью переменных (2.48)

$$G_{j,m,l}^{(0)}(t, x) = G_{j,m,l}^{0,+} + G_{j,m,l}^{0,-} = \frac{1}{2(2\pi)^3 i} \int_0^{2\pi} \int_0^{\delta} \int_{z_{3,0}}^{z_0} \frac{e^{-zt+i\rho\xi}}{1 - \alpha^2 \nu z} \mathscr{D}_l \Phi_{j,m,l} \xi \, dz \, d\xi \, d\varphi. \tag{3.27}$$

В (3.27) использованы обозначения

$$\Phi_{j,m,l} = \Phi_{j,m,l}(z, \xi, \varphi, x_3) = \sum_{k=1}^{2} \Phi_{j,m,l}^{(k)}(z, \xi, \varphi, x_3), \tag{3.28}$$

$$\Phi^{(1)}_{j,m,l} = (1-\delta_{3,m})\left(\breve{a}^{+}_{j,m,l}e^{\lambda_l^{+}x_3} - \breve{a}^{-}_{j,m,l}e^{\lambda_l^{-}x_3}\right), \tag{3.29}$$

$$\Phi^{(2)}_{j,m,l} = \frac{1}{\lambda_l^{+}}\breve{a}^{+}_{j,3,l}S^{+}_{m}e^{\lambda_l^{+}x_3} - \frac{1}{\lambda_l^{-}}\breve{a}^{-}_{j,3,l}S^{-}_{m}e^{\lambda_l^{-}x_3}, \tag{3.30}$$

$$\rho = \rho(x', \varphi) = x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi.$$

В силу леммы 2.11 при $j = 1, 2, 3, 4$; $m = 1, 2, 3$ находим

$$\Phi^{(1)}_{j,m,l} \equiv 0,\ l = 1, 2;\quad \Phi^{(2)}_{j,m,l} = \frac{1}{\lambda_l}\breve{a}_{j,3,l}\left(S^{+}_{m} - S^{-}_{m}\right)e^{\lambda_l x_3},\quad l = 1, 2. \tag{3.31}$$

Вследствие свойств четности (нечетности) функций $\breve{a}_{j,m}(\gamma, s', -i\lambda)$ по переменной λ получаем

$$\Phi^{(1)}_{j,m,3} = \breve{a}^{+}_{j,m,3}\left(e^{\lambda_3^{+}x_3} + (-1)^{1+\delta_{j,3}}e^{\lambda_3^{-}x_3}\right),\quad \Phi^{(1)}_{j,3,3} = 0,\quad m = 1, 2; \tag{3.32}$$

$$\Phi^{(2)}_{j,m,3} = \frac{\breve{a}^{+}_{j,3,3}}{\lambda_3^{+}}\left(S^{+}_{m}e^{\lambda_3^{+}x_3} + (-1)^{1+\delta_{j,3}}S^{-}_{m}e^{\lambda_3^{-}x_3}\right),\quad m = 1, 2, 3. \tag{3.33}$$

С помощью представления $e^{\lambda_3^{\pm}x_3} = 1 + \lambda_3^{\pm}x_3\int\limits_0^1 e^{\lambda_3^{\pm}x_3\varkappa}\,d\varkappa$ функции (3.33) запишем в виде

$$\Phi^{(2)}_{j,m,3}(z, \xi, \varphi, x_3) = \sum_{k=1}^{2}\Phi^{(2,n)}_{j,m,3}(z, \xi, \varphi, x_3), \tag{3.34}$$

$$\Phi^{(2,1)}_{j,m,3} = \frac{1}{\lambda_3^{+}}\breve{a}^{+}_{j,3,3}\left(S^{+}_{m} + (-1)^{1+\delta_{j,3}}S^{-}_{m}\right), \tag{3.35}$$

$$\Phi^{(2,2)}_{j,m,3} = x_3\breve{a}^{+}_{j,3,3}\left(S^{+}_{m}\int\limits_0^1 e^{\lambda_3^{+}x_3\varkappa}\,d\varkappa + (-1)^{2+\delta_{j,3}}S^{-}_{m}\int\limits_0^1 e^{\lambda_3^{-}x_3\varkappa}\,d\varkappa\right). \tag{3.36}$$

Введем обозначения

$$G^{0,k}_{j,m,l}(t, x) = \frac{1}{2(2\pi)^3 i}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\delta}\int\limits_{z_{3,0}}^{z_0}\frac{e^{-zt+i\rho\xi}}{1-\alpha^2\nu z}\mathscr{D}_l\Phi^{(k)}_{j,m,l}\xi\,dz\,d\xi\,d\varphi,\quad k = 1, 2, \tag{3.37}$$

$$G^{0,2,n}_{j,m,3}(t, x) = \frac{1}{2(2\pi)^3 i}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\delta}\int\limits_{z_{3,0}}^{z_0}\frac{e^{-zt+i\rho\xi}}{1-\alpha^2\nu z}\mathscr{D}_l\Phi^{(2,n)}_{j,m,3}\xi\,dz\,d\xi\,d\varphi,\quad n = 1, 2, \tag{3.38}$$

и заметим, что в силу (3.31), (3.32)

$$G^{0,1}_{j,m,l} \equiv 0;\quad G^{0,1}_{j,3,3} \equiv 0;\quad j = 1, 2, 3, 4;\quad m = 1, 2, 3;\quad l = 1, 2. \tag{3.39}$$

Так же, как при выводе оценок (3.8), (3.26), находим, что при достаточно малом $\delta > 0$ для всех $(t, x) \in R_4^{++}$ справедливы неравенства

$$\left|G^{0,1}_{j,m,3}\right| \leqslant \tilde{c}_{3,3}t^{-5/2};\quad \left|G^{0,1}_{4,m,3}\right| \leqslant \tilde{c}_{3,3}t^{-9/4};\quad j = 1, 2, 3;\quad m = 1, 2;$$

$$\left|G^{0,2,2}_{j,m,3}\right| \leqslant \tilde{c}_{3,3}t^{-2};\quad \left|G^{0,2,2}_{4,3,3}\right| \leqslant \tilde{c}_{3,3}x_3t^{-7/4};\quad (j, m) \in \{1; 2\}\times\{1; 2; 3\}\cup\{4\}\times$$

$$\times\{1; 2\}; \tag{3.40}$$

$$\left|G^{0,2,2}_{3,m,3}\right| \leqslant \tilde{c}_{3,3}(1 + |x|)x_3t^{-11/4};\quad \left|G^{0,2,2}_{3,3,3}\right| \leqslant \tilde{c}_{3,3}(1 + x_3)x_3t^{-9/4};\quad m = 1, 2.$$

Введем обозначение: $\widehat{G}^{0,2}_{j,m}(t,x)=\sum\limits_{l=1}^{2}G^{0,2}_{j,m,l}(t,x)$. В силу (3.34), (3.37)—(3.40) равенство (3.26) можно записать в виде

$$D^{(3)}_{j,m}=\widehat{G}^{0,2}_{j,m}+G^{0,2,1}_{j,m,3}+$$
$$+\begin{bmatrix}(1+x_3)O(t^{-2}) & (1+x_3)O(t^{-2}) & (1+x_3)O(t^{-2})\\ (1+x_3)O(t^{-2}) & (1+x_3)O(t^{-2}) & (1+x_3)O(t^{-2})\\ (1+|x|^2)O(t^{-5/2+\varepsilon'}) & (1+|x|^2)O(t^{-5/2+\varepsilon'}) & (1+x_3^2)O(t^{-2+\varepsilon'})\\ (1+x_3)O(t^{-2}) & (1+x_3)O(t^{-2}) & (1+x_3)O(t^{-3/2})\end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Пусть $p_j=\begin{cases}1, & j=1,2\\ 2, & j=3,4\end{cases}$, $q_j=\begin{cases}2, & j=1,2\\ 1, & j=3,4\end{cases}$, $\mu_j=\begin{cases}3, & j=1,2,4\\ 5, & j=3\end{cases}$, $\nu_j=$ $=\begin{cases}3, & j=1,2,3\\ 1, & j=4\end{cases}$. С помощью приведенных в § 2 асимптотических разложений функций λ_l, τ_l, y_l, $e'_{3,m}(\gamma,s',+0)$, $e''_{3,3}(\gamma,s',+0)$ запишем представления интегралов $\widehat{G}^{0,2}_{j,m}(t,x)$, $G^{0,2,1}_{j,m,3}(t,x)$ через эталонные интегралы (3.11), (3.13) при достаточно малом $\delta>0$

$$\widehat{G}^{0,2}_{j,m}=\frac{1}{2(2\pi)^2 i}2^{-1/2}\nu^{1/2}\omega^{-3/2}e^{-\varkappa x_3}\widehat{g}_{j,m}(x)T_{2p_j+1}(t)+\widehat{f}_{j,m}(t,x), \quad (3.42)$$

$$\widehat{G}^{0,2}_{j,3}=\frac{1}{2(2\pi)^2 i}\omega^{-1}\nu^{-1}e^{-\varkappa x_3}\widehat{g}_{j,3}(x)T_3(t)+\widehat{f}_{j,3}(t,x), \quad (3.43)$$

где $\varkappa=\omega^{1/2}2^{-1/2}\nu^{-1/2}$, $j=1,2,3,4$, $m=1,2$,

$$G^{0,2,1}_{j,m,3}=\frac{1}{2(2\pi)^2 i}\nu^{1/2}2^{-1/2}\omega^{-3/2}g_{j,m,3}(x')T_{\mu_j}(t)+f_{j,m,3}(t,x), \quad (3.44)$$

$$G^{0,2,1}_{j,3,3}=\frac{1}{2(2\pi)^2 i}\omega^{-1}\nu^{-1}g_{j,3,3}(x')T_{\nu_j}(t)+f_{j,3,3}(t,x), \quad (3.45)$$

$j=1,2,3,4$, $m=1,2$. Функции $\widehat{g}_{j,m}(x)$, $g_{j,m,3}(x')$ в (3.42)—(3.45) имеют вид

$$\widehat{g}_{1,m}=(-1)^m\cos(\varkappa x_3)-\sin(\varkappa x_3),\quad \widehat{g}_{2,m}=(-1)^{m+1}\sin(\varkappa x_3)-\cos(\varkappa x_3),$$
$$m=1,2,$$
$$\widehat{g}_{3,m}=\frac{1}{2}\varkappa^{-1}\left(x_1+(-1)^m x_2\right)(\cos(\varkappa x_3)-\sin(\varkappa x_3)),$$
$$\widehat{g}_{4,m}=-\nu\left(x_1+(-1)^m x_2\right)\sin(\varkappa x_3),\quad m=1,2,$$
$$\widehat{g}_{1,3}=x_1\sin(\varkappa x_3)-x_2\cos(\varkappa x_3),\quad \widehat{g}_{2,3}=x_1\cos(\varkappa x_3)+x_2\sin(\varkappa x_3),$$
$$\widehat{g}_{3,3}=\varkappa^{-1}(\cos(\varkappa x_3)-\sin(\varkappa x_3)),\quad \widehat{g}_{4,3}=-2\nu\sin(\varkappa x_3),\quad g_{1,m,3}=(-1)^{m+1},$$
$$g_{2,m,3}=1,\quad g_{3,m,3}=-(1/2)\varkappa^{-1}(x_1+(-1)^m x_2),$$
$$g_{4,m}=-\nu(x_1+(-1)^m x_2)\sin(\varkappa x_3),\quad m=1,2,$$
$$g_{1,3,3}=x_2,\quad g_{2,3,3}=-x_1,\quad g_{3,3,3}=-\varkappa^{-1},\quad g_{4,3,3}=2\omega.$$

Функции $\widehat{f}_{j,m}(t,x)$, $f_{j,m,3}(t,x)$ в (3.42)—(3.45) удовлетворяют оценкам

$$|\widehat{f}_{j,m}|\leqslant\widehat{c}_{3,3}(1+|x'|)e^{-\varepsilon x_3}t^{-2},\quad j=1,2,\quad m=1,2,$$
$$|\widehat{f}_{j,m}|\leqslant\widehat{c}_{3,3}(1+|x'|^2)e^{-\varepsilon x_3}t^{-\frac{5}{2}},\quad j=3,4,\quad m=1,2,$$
$$|\widehat{f}_{j,3}|\leqslant\widehat{c}_{3,3}\left(1+|x'|^{q_j}\right)e^{-\varepsilon x_3}t^{-2},\quad j=1,2,3,4,\quad 0<\varepsilon<\varkappa,$$
$$|f_{j,m,3}|\leqslant\widehat{c}_{3,3}\left(1+|x'|^{p_j}\right)t^{-2},\quad j=1,2,4,\quad m=1,2;$$

$$|f_{3,m,3}| \leqslant \widehat{c}_{3,3}(1+|x'|^2)t^{-5/2}, \quad m=1,\ 2,$$

$$|f_{j,3,3}| \leqslant \widehat{c}_{3,3}(1+|x'|^{q_j})t^{-2}, \quad j=1,2,3, \quad |f_{4,3,3}| \leqslant \widehat{c}_{3,3}(1+|x'|)t^{-3/2}.$$

Применяя (3.42)—(3.45) в (3.41) и пользуясь затем результатом теоремы 3.2, приходим к представлениям (3.22). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1. Из леммы 1.1 следует, что для построения асимптотического разложения задачи (1), (3)—(5) достаточно получить это разложение для интегралов

$$\mathscr{B}^{(k)}_{j,m}(t,x) = \sum_{l=1}^{3} \mathscr{B}^{(k)}_{j,m,l}(t,x), \quad j=1,2,3,4, \quad m,k=1,2,3, \tag{3.46}$$

где

$$\mathscr{B}^{(k)}_{j,m,l}(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int\limits_{|s'|<\delta} \int\limits_{\Gamma_k(-\varepsilon,\delta_0)} e^{\gamma t + i(s',x')} \widetilde{D}_{j,m,l}(\gamma,s',x_3)\eta_\delta(s')w_m(\gamma,s')d\gamma\, ds'. \tag{3.47}$$

Подынтегральное выражение в (3.47) отличается от аналогичного в (3.1) лишь множителем $\eta_\delta(s')w_m(\gamma,\ s')$. Условия, налагаемые на $W_m(t,\ x')$ в теореме 1, позволяют повторить асимптотические оценки, проведенные в § 3 для интегралов (3.1), почти без изменений применительно к интегралам (3.47). Поэтому остановимся лишь на различиях в доказательствах. В силу условия 1 (см. введение) функция $w_m(\gamma,\ s')$ дважды непрерывно дифференцируема по $s' \in R_2$ и аналитична по γ: $\operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, и для нее справедлива оценка

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re}\gamma>-\varepsilon\\ s'\in R_2}} \left|\frac{\partial w_m}{\partial\gamma}\right| + \sum_{|\beta|\leqslant 2} \sup_{\substack{\operatorname{Re}\gamma>-\varepsilon\\ s'\in R_2}} |D^\beta_{s'} w_m| \leqslant \widehat{c}_1 \langle W_m\rangle_{\varepsilon_0}, \quad m=1,2,3, \tag{3.48}$$

где $\widehat{c}_1=\widehat{c}_1(\varepsilon_0-\varepsilon)>0$. Из сферической симметричности W_m по $x' \in R_2$ следует, что и w_m сферически симметрична по $s' \in R_2$ [7]. Значит, $D^\beta_{s'} w_m(\gamma,\ 0) = 0$ при $|\beta|=1$. Поэтому при $\operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon$ и $|s'|<\delta$ имеем

$$\eta_\delta(s')w_m(\gamma,\ s') = w_m(0,\ 0) + O(\gamma) + O(|s'|^2), \tag{3.49}$$

причем в силу (3.48) выполняется оценка

$$|O(\gamma)| + |O(|s'|^2)| \leqslant \widehat{c}_1(|\gamma| + |s'|^2)\langle W_m\rangle_{\varepsilon_0}. \tag{3.50}$$

Для построения асимптотик интегралов в (3.47) повторим рассуждения, проведенные для построения асимптотик интегралов (3.1). При этом $\gamma \in [\gamma_0,\ \gamma_{3,0}]$, следовательно, фактически $|O(\gamma)| + |O(|s'|^2)| = O(|s'|^2)$, $\eta_\delta(s')w_m(\gamma,\ s') = w_m(0,\ 0) + O(|s'|^2)$. Последнее соотношение позволяет дословно повторить доказательства теорем 3.1 и 3.3 применительно к интегралам (3.47). При этом остаточный член $O(|s'|^2)$ в представлении $\eta_\delta(s')w_m(\gamma,\ s')$ войдет в остаточный член в представлении $\mathscr{B}^{(3)}_{j,m}(t,x)$. Таким образом, утверждение теоремы 1 вытекает из леммы 1.1, теорем 3.1 и 3.3. Теорема доказана.

Авторы выражают благодарность профессору В. Н. Масленниковой за полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глушко А. В., Рыбаков С. О.* Теорема о локализации для задачи динамики вращающейся вязкой сжимаемой жидкости // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 1. С. 32—43.
2. *Глушко А. В., Рыбаков С. О.* О задаче Дирихле в полупространстве для системы уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости // Краевые задачи для уравне-

ний с частными производными. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990. № 1. С. 35—55.
3. *Масленникова В. Н., Глушко А. В.* Теоремы о локализации тауберового типа и скорость затухания решения системы гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости // Тр. Мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. 1988. Т. 181. С. 156—186.
4. *Глушко А. В.* Асимптотика по времени решения задачи Коши для линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса с нулевой правой частью // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Тр. семинара С. Л. Соболева). Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1981. № 1. С. 5—33.
5. *Рыбаков С. О.* Принцип локализации и точные асимптотики по времени решения начально-краевой задачи для линеаризованной системы уравнений движения вращающейся вязкой сжимаемой жидкости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж. 1988.
6. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977.
7. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965.

г. Воронеж

Статья поступила
13 июня 1990 г.