А. В. Глушко, С. О. Рыбаков, Теорема о локализации для задачи динамики вращающейся вязкой сжимаемой жидкости, *Сиб. матем. журн.*, 1992, том 33, номер 1, 32–43

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. 33, № 1 ЯНВАРЬ — ФЕВРАЛЬ 1992

УДК 517.95

А. В. ГЛУШКО, С. О. РЫБАКОВ

ТЕОРЕМА О ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Введение

В работе изучается система линейных уравнений с частными производными второго порядка, представляющих при определенных условиях уравнения движения вращающейся вязкой сжимаемой жидкости. Система имеет вид

$$A\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ P \end{bmatrix} \equiv \left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - [\mathbf{V}, \boldsymbol{\omega}] - \nu\Delta\mathbf{V} + \nabla P \\ \alpha^2 \dfrac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{V} \end{matrix}\right\} = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{V}(t, x) = \{V_1, V_2, V_3\}^{\mathrm{T}}$ — искомый вектор скорости; $P(t, x)$ — искомое гидростатическое давление; $\nu > 0$ и $\alpha^2 > 0$ — постоянные, представляющие кинематический коэффициент вязкости и коэффициент сжимаемости $(\alpha = a_0^{-1}$, где a_0 — скорость распространения звука в жидкости в состоянии покоя); $\boldsymbol{\omega}$ — постоянный вектор угловой скорости вращения системы координат. Векторное произведение $[\mathbf{V}, \boldsymbol{\omega}]$ описывает влияние на движение кориолисовых сил, возникающих в связи с вращением системы координат.

В области $R_4^{++} = \{(t, x) = (t, x_1, x_2, x_3) \mid t > 0,\ x' = (x_1, x_2) \in R_2,\ x_3 > 0\}$ для системы (1) ставится следующая начально-краевая задача:

$$\mathbf{V}|_{t=0} = 0, \quad P|_{t=0} = 0, \quad x' \in R_2,\ x_3 > 0, \qquad (2)$$

$$\mathbf{V}|_{x_3=0} = \mathbf{W}, \quad t > 0,\ x' \in R_2; \quad \mathbf{W}(t, x') = \{W_1, W_2, W_3\}^{\mathrm{T}}. \qquad (3)$$

Мы предполагаем также выполненными такие естественные, с физической точки зрения, условия:

$$\lim_{x_3 \to \infty} \mathbf{V} = 0, \quad \lim_{x_3 \to \infty} P = 0, \quad t > 0,\ x' \in R_2. \qquad (4)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\boldsymbol{\omega} = \{0, \omega\cos\psi, \omega\sin\psi\}^{\mathrm{T}}$, где $\omega > 0$, $\psi \in [0, \pi/2]$. Отметим также, что начальные условия (2) выбраны однородными лишь для простоты изложения.

Математические исследования по гидродинамике вращающихся сплошных сред были начаты С. Л. Соболевым (см., например, [1]). В его работах изучалось движение идеальной жидкости. Линеаризация (1) уравнений движения сжимаемой жидкости (при определенных физических предположениях) была проведена в работах [2, 3].

Среди математических проблем, связанных с системой (1), особое место занимает вопрос о построении точных асимптотик и асимптотических при $t \to \infty$ оценок решений различных задач для системы (1) и систем, получающихся из (1) при $\alpha = 0$ или $\nu = 0$. Этим проблемам посвящены работы [4—8]. Задачи, рассмотренные в них, оказались более простыми по сравнению с задачей (1)—(4), которую характеризует условие (3) «типа прилипания» на границе $x_3=0$, так как, в отличие от последней, для них может быть получено явное представление решения через фундаментальную матрицу решений.

Основной целью настоящей работы является обоснование принципа локализации для построения асимптотик при $t\to\infty$ решения задачи (1)—(4), суть которого в возможно более точном выделении в решении тех составляющих, которые могут внести существенный (т. е. степенной) вклад в его асимптотику.

Отметим, что при эквивалентном преобразовании задачи (1)—(4) мы воспользовались элементами методики, развитой в [9]; ряд результатов, связанных с обоснованием принципа локализации, получен в работах [10, 11].

Для изучения задачи (1)—(4) будет необходимо исследовать некоторые свойства решения задачи

$$A\left(\gamma, is_1, is_2, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\begin{bmatrix}\mathbf{v}\\ p\end{bmatrix}=0, \tag{5}$$

$$\mathbf{v}\,|_{x_3=0}=\mathbf{w}, \tag{6}$$

$$\lim_{x_3\to\infty}\mathbf{v}=0,\quad \lim_{x_3\to\infty}p=0, \tag{7}$$

которая получается из (1)—(4) после применения преобразования Лапласа — Фурье $\mathscr{L}_{t\to\gamma}\mathscr{F}_{x'\to s'}$, $\gamma\in\mathbf{C}$, $s'\in R_2$. Здесь и в дальнейшем $\mathbf{v}, p, \mathbf{w}=\mathscr{L}_{t\to\gamma}\mathscr{F}_{x'\to s'}[\mathbf{V}, P, \mathbf{W}]$. Введем необходимые функциональные пространства.

Определение 1. Пусть m, $k\geqslant 0$ — целые числа; $\delta\geqslant 0$. Тогда $H^+_{k,m,\delta}=\{V\,|\,V(t, x', x_3)\,e^{-\delta t}\in L_2(R_4^{++});\ \|V\|^+_{k,m,\delta}<\infty\}$, где

$$\|V\|^+_{k,m,\delta}=\|Ve^{-\delta t}\|+\left\|\frac{\partial^k V}{\partial t^k}e^{-\delta t}\right\|+\sum_{j=1}^{3}\left\|\frac{\partial^m V}{\partial x_j^m}e^{-\delta t}\right\|, \tag{8}$$

$\|\cdot\|$ — норма в $L_2(R_4^{++})$.

Замечание 1. При $\delta=0$ пространство $H^+_{k,m,\delta}$ есть анизотропное пространство С. Л. Соболева. Преобразование Лапласа — Фурье позволяет ввести в $H^+_{k,m,\delta}$ эквивалентную (8) норму $(\gamma=\gamma_1+i\gamma_2\in\mathbf{C})$

$$|||V|||^+_{k,m,\delta}=\left\{\sup_{\gamma_1\geqslant\delta}\int\limits_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty}\int\limits_{R_2}\int\limits_0^\infty\left[\left(1+|\gamma|^{2k}+|s'|^{2m}\right)|v|^2+\left|\frac{\partial^m v}{\partial x_3^m}\right|^2\right]dx_3ds'\,d\gamma_2\right\}^{1/2}. \tag{8'}$$

Определение 2. Пусть $\mu, \varkappa\geqslant 0$; $\delta\in R_1$. Тогда $H'_{\varkappa,\mu,\delta}=\{W\,|\,W(t, x')\,e^{-\delta t}\in L_2\ (R_3^+),\ R_3^+=\{(t, x')\,|\,t>0,\ x'\in R_2\};\ \langle\!\langle W\rangle\!\rangle_{\varkappa,\mu,\delta}<\infty\}$, где

$$\langle\!\langle W\rangle\!\rangle_{\varkappa,\mu,\delta}=\left\{\sup_{\gamma_1\geqslant\delta}\int\limits_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty}\int\limits_{R_2}\left(1+|\gamma|^{2\varkappa}+|s'|^{2\mu}\right)|w|^2\,ds'\,d\gamma_2\right\}^{1/2}. \tag{9}$$

Замечание 2. Известно (см. [12]), что если $W(t, x')\in H'_{0,0,\delta}$, $\delta\in R_1$, то при почти всех $s'\in R_2$ функция $w(\gamma, s')=\mathscr{F}_{x'\to s'}\mathscr{L}_{t\to\gamma}[W]$ является аналитической по γ в полуплоскости $\operatorname{Re}\gamma>\delta$.

Введем обозначения. Пусть $\Gamma'(-\varepsilon, \delta_0)$ — контур в γ-плоскости, такой, что $\Gamma'(-\varepsilon, \delta_0)=\bigcup\limits_{n=1}^{3}\Gamma_n(-\varepsilon, \delta_0)$, причем

$$\Gamma_n(-\varepsilon, \delta_0)=\{|\gamma-\gamma_n|=\delta_0 \text{ при } \operatorname{Re}\gamma\geqslant 0;$$
$$|\operatorname{Im}\gamma-\operatorname{Im}\gamma_n|=\delta_0 \text{ при } -\varepsilon<\operatorname{Re}\gamma=0\},\ \gamma_1=i\omega,\ \gamma_2=-i\omega,\ \gamma_3=0. \tag{10}$$

Пусть функция $\eta_\delta=\eta_\delta(s')\in C_0^\infty(R_2)$ такова, что $\eta_\delta=1$ при $|s'|<\delta$, $\eta_\delta=0$ при $|s'|>2\delta$.

В работе авторов [13] доказана следующая теорема существования и единственности решения задачи (1)—(4).

Теорема 1. *Пусть функции* $W_j(t, x')$, $j=1, 2, 3$, *принадлежат* $H'_{3/4,3/2,0}$. *Тогда существует единственное решение задачи* (1)—(4) $\{\mathbf{V}, P\}$: $V_j(t, x')\in H^+_{1,2,\varepsilon_1}$, $j=1, 2, 3$; $P(t, x)\in H^+_{1,1,\varepsilon_1}$, *где* $\varepsilon_1>0$ — *любое число и справедлива оценка* $\|\mathbf{V}\|^+_{1,2,\varepsilon_1}+\|P\|^+_{1,1,\varepsilon_1}\leqslant c\langle\!\langle \mathbf{W}\rangle\!\rangle_{3/4,3/2,\varepsilon_1}$, $c=c(\alpha^2, \omega, \nu, \varepsilon_1)>0$.

Основной целью настоящей работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть функции* $W_j(t, x')$, $1\leqslant j\leqslant 3$, *принадлежат пространству* $H'_{3/4,3/2,(-\varepsilon_0)}$, $\varepsilon_0>0$. *Тогда для решения* $\mathbf{V}\in H^+_{1,2,\varepsilon_1}$, $P\in H^+_{1,1,\varepsilon_1}$ ($\varepsilon_1>0$ *любое*) *задачи* (1)—(4) $\left(\psi\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ *при* $x'\in R_2$, $x_3>0$ *справедливо представление*

$$\begin{gathered} V_j(t, x', x_3)=\sum_{k=0}^{2} Q_j^{(k)}(t, x', x_3)+Q_j(t, x', x_3), \quad j=1, 2, 3, \\ P(t, x', x_3)=\sum_{k=0}^{2} Q_4^{(k)}(t, x', x_3)+Q_4(t, x' x_3), \end{gathered} \tag{11}$$

где

$$\begin{gathered} Q_j^{(k)}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{3}(-ix_3)^{-\sigma_{j,l}^{(k)}}\left\{\int\limits_{\Gamma'(-\varepsilon,\delta_0)}\mathscr{F}^{-1}_{s\to x}\left[b_{j,l}^{(k)}\eta_\delta W_l(is_k)^{1-\delta_{k,0}}\right]e^{\gamma t}d\gamma+O(e^{-\varepsilon t})\right\}, \\ Q_j=\frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{3}(-ix_3)^{-\sigma_{j,l}}\left\{\int\limits_{\Gamma'(-\varepsilon,\delta_0)}\mathscr{F}^{-1}_{s\to x}\left[b_{j,l}\eta_\delta u_l\right]e^{\gamma t}d\gamma+O\left(e^{-\varepsilon t}\right)\right\}, \end{gathered} \tag{12}$$

$1\leqslant j\leqslant 4$, $k=0, 1, 2$; $\delta_{k,0}$ — символ Кронекера; $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0)$ — достаточно малое число; $\delta_0\in(0, \omega/2)$, $\delta>0$ — произвольные числа; вектор-функция $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\gamma, s')=\{u_1, u_2, u_3\}^{\mathrm{T}}$ строится по решению $\{\mathbf{v}, p\}$ задачи (5)—(7) следующим образом:

$$\mathbf{u}(\gamma, s')=-\nu\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0}+\mathbf{k}p\,|_{x_3=0}, \quad \mathbf{k}=\{0, 0, 1\}^{\mathrm{T}}; \tag{13}$$

величины $b_{j,l}^{(k)}=b_{j,l}^{(k)}(\gamma, s', s_3)$; $b_{j,l}=b_{j,l}(\gamma, s', s_3)$, $\gamma\in\mathbf{C}$; $(s', s_3)\in R_3$ представляют собой дробно-рациональные функции, способ построения явного вида которых указан в тексте работы; числа $\sigma_{j,l}^{(k)}$ и $\sigma_{j,l}$ записывается так:

$$\begin{gathered} \sigma_{1,1}^{(0)}=\sigma_{2,2}^{(0)}=3;\ \sigma_{2,1}^{(0)}=\sigma_{1,2}^{(0)}=2;\ \sigma_{1,3}^{(0)}=\sigma_{3,1}^{(0)}=\sigma_{3,2}^{(0)}=1;\ \sigma_{4,j}^{(0)}=\sigma_{j+1,3}^{(0)}=0, \\ j=1, 2, 3;\ \sigma_{4,1}^{(1)}=\sigma_{4,2}^{(2)}=2; \\ \sigma_{jk}^{(1)}=0 \text{ при } (j, k)\neq(4,2);\ \sigma_{j,k}=0 \text{ при } 1\leqslant j\leqslant 4;\ k=1,2; \\ \sigma_{1,3}=1;\ \sigma_{2,3}=0;\ \sigma_{3,3}=\sigma_{4,3}=2; \end{gathered} \tag{14}$$

$\mathscr{F}^{-1}_{s\to x}$ — обратное преобразование Фурье, $s=(s', s_3)\in R_3$.

§ 1. Неявная формула представления решения

Обозначим через $\{l\mathbf{V}, lP\}$ продолжение нулем функции $\{\mathbf{V}, P\}$ из области R_4^{++} на пространство R_4.

Лемма 1.1. *Пусть* $\{\mathbf{V}, P\}$, $\mathbf{V} \in H^{+}_{1,2,\varepsilon_1}$; $P \in H^{+}_{1,1,\varepsilon_1}$ $(\varepsilon_1 > 0)$ — *решение задачи* (1) — (4). *Тогда вектор-функция* $\{l\mathbf{V}, lP\}$ *есть обобщенное решение* (*в смысле* $\mathscr{D}'(R_4)$) *уравнения*

$$A\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\begin{bmatrix} l\mathbf{V} \\ lP \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{W}_3 \end{bmatrix}\delta(x_3) - \nu\begin{bmatrix} \mathbf{W} \\ 0 \end{bmatrix}\delta'(x_3), \tag{1.1}$$

где

$$\mathbf{U}(t, x') = \{U_1, U_2, U_3\}^{\mathsf{T}} = -\nu\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0} + \mathbf{k}P\,|_{x_3=0}, \tag{1.2}$$

$\delta(x_3) \in \mathscr{D}'(R_1)$ — *дельта-функция Дирака.*

Доказательство проводится стандартным способом (см., например, [14]).

Дадим ряд обозначений. Введем в рассмотрение характеристический многочлен $\mathscr{P}(\gamma, s', s_3) = \det A(\gamma, is_1, is_2, is_3)$ вида

$$\mathscr{P}(\gamma, s', s_3) = \alpha^2\gamma(\gamma + \nu|s|^2)^3 + |s|^2(\gamma + \nu|s|^2)^2 + \alpha^2\omega^2\gamma(\gamma + \nu|s|^2) + \\ + \omega^2(s_2\cos\psi + s_3\sin\psi)^2. \tag{1.3}$$

Обозначим через $\breve{A}(\gamma, s_1, s_2, s_3) = \{\breve{a}_{j,l}\}_{j,l=1}^4$ матрицу, ассоциированную матрице $A(\gamma, is_1, is_2, is_3)$. Пусть, далее, $\mathscr{E}(t, x', x_3) = \{\mathscr{E}_{j,l}\}_{j,l=1}^4 \in \mathscr{D}'(R_4)$ — фундаментальная матрица системы (1):

$$\mathscr{E}(t, x', x_3) = \mathscr{L}^{-1}_{\gamma\to t}\mathscr{F}^{-1}_{s\to x}\left[\breve{A}(\gamma, s', s_3)\mathscr{P}^{-1}(\gamma, s', s_3)\right], \quad s = (s', s_3), \tag{1.4}$$

где $\mathscr{L}^{-1}_{\gamma\to t}\left(\mathscr{F}^{-1}_{s\to x}\right)$ — обратное преобразование Лапласа (Фурье) в смысле теории обобщенных функций; матрицы $\mathscr{E}' = \{\mathscr{E}'_{j,l}\}$; $\mathscr{E}'' = \{\mathscr{E}''_{j,l}\}$; $\breve{\mathscr{E}}' = \{\breve{\mathscr{E}}'_{j,l}\}$; $\breve{\mathscr{E}}'' = \{\breve{\mathscr{E}}''_{j,l}\}$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, $1 \leqslant l \leqslant 3$, имеют вид

$$\mathscr{E}'_{j,l} = -\nu\frac{\partial\mathscr{E}_{j,l}}{\partial x_3} + \delta_{3,l}\mathscr{E}_{j,4}, \quad \mathscr{E}''_{j,l} = \mathscr{E}_{j,l}, \quad 1 \leqslant j \leqslant 4, \ 1 \leqslant l \leqslant 3, \tag{1.5}$$

$$\breve{\mathscr{E}}'_{j,l} = \mathscr{L}^{-1}_{\gamma\to t}\mathscr{F}^{-1}_{s\to x}\left[(-1)^{1+\delta_{j,3}}\frac{\nu is_3\breve{a}_{j,l}(\gamma, s', -s_3) + \delta_{3,l}\breve{a}_{j,4}(\gamma, s', -s_3)}{\mathscr{P}(\gamma, s', -s_3)}\right], \tag{1.6}$$

$$\breve{\mathscr{E}}''_{j,l} = \mathscr{L}^{-1}_{\gamma\to t}\mathscr{F}^{-1}_{s\to x}\left[(-1)^{1+\delta_{j,3}}\frac{\breve{a}_{j,l}(\gamma, s', -s_3)}{\mathscr{P}(\gamma, s', -s_3)}\right], \quad 1 \leqslant j \leqslant 4, \ 1 \leqslant l \leqslant 3. \tag{1.7}$$

Обозначим также через $D' = \mathscr{E}' + \breve{\mathscr{E}}'$ и $D = \mathscr{E}'' + \breve{\mathscr{E}}''$ матрицы с элементами $D'_{j,l}$ и $D_{j,l}$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, $1 \leqslant l \leqslant 3$, соответственно.

Элементы матриц D' и D можно записать в виде

$$D'_{j,l} = \mathscr{L}^{-1}_{\gamma\to t}\mathscr{F}^{-1}_{s\to x}\left[\frac{d'_{j,l}(\gamma, s', s_3)}{\mathscr{P}(\gamma, s', s_3)\mathscr{P}(\gamma, s', -s_3)}\right], \quad 1 \leqslant j \leqslant 4, \ 1 \leqslant l \leqslant 3, \tag{1.8}$$

$$D_{j,l} = \mathscr{L}^{-1}_{\gamma\to t}\mathscr{F}^{-1}_{s\to x}\left[\frac{d_{j,l}(\gamma, s', s_3)}{\mathscr{P}(\gamma, s', s_3)\mathscr{P}(\gamma, s', -s_3)}\right].$$

Явный вид многочленов $d_{j,l}$ и $d'_{j,l}$ выводится из (1.4) — (1.7).

Лемма 1.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда решение* $\{V, P\}$ *задачи* (1) — (4) *представимо в виде*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(t, x', x_3) \\ P(t, x', x_3) \end{bmatrix} = D^{(0)}(t, x', x_3) * \mathbf{W}(t, x') + D^{(1)}(t, x', x_3) * \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{W}(t, x') + \\ + D^{(2)}(t, x', x_3) * \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{W}(t, x') + D(t, x', x_3) * \mathbf{U}(t, x'), \tag{1.9}$$

если свертки по $(t, x) \in R_4$ *существуют в* $S'(R_4)$.

В (1.9) *использованы обозначения:*

$$D_{j,l}^{(k)}(t, x', x_3) = \mathscr{L}^{-1}_{\gamma\to t}\mathscr{F}^{-1}_{s\to x}\left[\frac{d_{j,l}^{(k)}(\gamma, s', s_3)}{\mathscr{P}(\gamma, s', s_3)\,\mathscr{P}(\gamma, s', -s_3)}\right],\quad 1\leqslant j\leqslant 4,\ 1\leqslant l\leqslant 3,$$

где $d_{j,l}^{(0)} = d'_{j,l}$; $d_{j,l}^{(1)} = d_{j,l}^{(2)} = 0$ *при* $(j, l)\neq(3, 3)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$; $d_{j,l}^{(0)} = 0$ *при* $(j, l) = (3, 3)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, *кроме того, при этих* (j, l) $d_{j,l}^{(1)}$ *и* $d_{j,l}^{(2)}$ *определяются по формулам*

$$d'_{3,3} = is_1 d_{3,3}^{(1)} + is_2 d_{3,3}^{(2)},\quad d_{4,2} = is_1 d_{4,l}^{(1)} + is_2 d_{4,l}^{(2)},\quad l = 1, 2, 3. \tag{1.10}$$

Доказательство. Решение уравнения (1.1) может быть записано следующим образом (см. лемму 1.1):

$$\begin{bmatrix} l\mathbf{V} \\ lP \end{bmatrix} = \mathscr{E}(t, x', x_3) * \left\{\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ W_3 \end{bmatrix}\delta(x_3) - \nu\begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix}\delta'(x_3)\right\}, \tag{1.11}$$

если свертка по $(t, x)\in R_4$ существует в смысле теории обобщенных функций. Из (1.11) и (1.5) получаем

$$\begin{bmatrix} l\mathbf{V} \\ lP \end{bmatrix} = \mathscr{E}'(t, x', x_3) * \mathbf{W}(t, x') + \mathscr{E}''(t, x', x_3) * U(t, x'). \tag{1.12}$$

Запишем сужения равенства (1.5) на R_4^+ и R_4^-. При $x_3 > 0$ будем иметь

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(t, x', x_3) \\ P(t, x', x_3) \end{bmatrix} = \mathscr{E}'(t, x', x_3) * \mathbf{W}(t, x') + \mathscr{E}''(t, x', x_3) * \mathbf{U}(t, x'), \tag{1.13}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}(t, x', -x_3) \\ 0(t, x', -x_3) \end{bmatrix} = \mathscr{E}'(t, x', -x_3) * \mathbf{W}(t, x') + \mathscr{E}''(t, x', -x_3) * \mathbf{U}(t, x'). \tag{1.14}$$

Равенство (1.14) с помощью обозначений (1.6), (1.7) запишем в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} = \breve{\mathscr{E}}'(t, x', x_3) * \mathbf{W}(t, x') + \breve{\mathscr{E}}''(t, x', x_3) * \mathbf{U}(t, x'). \tag{1.15}$$

Складывая равенства (1.13) и (1.15), находим представление

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(t, x', x_3) \\ P(t, x', x_3) \end{bmatrix} = D'(t, x', x_3) * \mathbf{W}(t, x') + D(t, x', x_3) * \mathbf{U}(t, x'). \tag{1.16}$$

Используя (1.10), получаем из (1.16) равенство (1.9). Лемма доказана.

§ 2. Вспомогательные неравенства

Определение 2.1. Число γ принадлежит области $\Omega_\omega(-\varepsilon, \delta_0)\subset \mathbf{C}$ $(\varepsilon\geqslant 0,\ \delta_0\in(0, \omega/2)$, если $\operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon$ и при $-\varepsilon < \operatorname{Re}\gamma \leqslant 0$ $|\operatorname{Im}\gamma| > \delta_0$, при $\operatorname{Re}\gamma > 0$: $|\gamma| > \delta_0$, $|\gamma \pm i\omega| > \delta_0$ $|\operatorname{Im}\gamma \pm \omega| > \delta_0$.

Лемма 2.1. *Для любых* δ_0: $0 < \delta_0 < \omega/2$ *и* $\delta > 0$ *существует такое* $\varepsilon > 0$, *что при выполнении одного из двух следующих условий:*

$$\gamma\in\Omega_\omega(-\varepsilon, \delta_0),\quad s\in R_3, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon,\quad |s| > \delta \tag{2.2}$$

— *для полинома* $\mathscr{P}(\gamma, s', s_3)$, *определенного в* (1.3), *выполняется оценка*

$$|\mathscr{P}(\gamma, s', s_3)| \geqslant c_{2,1}(1 + |\gamma|)(1 + |\gamma| + |s|^2)^3 \tag{2.3}$$

с постоянной $c_{2,1} > 0$, *зависящей лишь от* α^2, ω, ν, ε, δ_0, δ.

Доказательство. Введем новые независимые переменные $\widehat{\gamma}$ и $\widehat{s}$ по формулам

$$\gamma = \widehat{\gamma};\quad s_1 = \widehat{s}_1;\quad s_2 = \sin\psi\widehat{s}_2 + \cos\psi\widehat{s}_3;\quad s_3 = -\cos\psi\widehat{s}_2 + \sin\psi\widehat{s}_3. \tag{2.4}$$

Тогда очевидно выполнение равенства

$$\mathscr{P}(\gamma, s) = \widehat{\mathscr{P}}(\widehat{\gamma}, \widehat{s}) = \alpha^2\widehat{\gamma}(\widehat{\gamma} + \nu|\widehat{s}|^2)^3 + |\widehat{s}|^2(\widehat{\gamma} + \nu|\widehat{s}|^2)^2 + \\ + \alpha^2\omega^2\widehat{\gamma}(\widehat{\gamma} + \nu|\widehat{s}|^2) + \omega^2\widehat{s}_3^2. \quad (2.5)$$

Отметим, что $\mathscr{P}(\widehat{\gamma}, \widehat{s}) = \widehat{\mathscr{P}}(\widehat{\gamma}, \widehat{s})$ при $\psi = \pi/2$. Это позволяет при оценке $\mathscr{P}(\gamma, s)$ использовать результаты работы [6], справедливость которых установлена лишь при $\psi = \pi/2$. В частности, из результатов этой работы следует, что корни $\widehat{\gamma}_j = \widehat{\gamma}_j(\widehat{s})$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, многочлена $\widehat{\mathscr{P}}(\widehat{\gamma}, \widehat{s})$ при $0 \leqslant |\widehat{s}| \leqslant \delta$ имеют асимптотические представления

$$\widehat{\gamma}_j(\widehat{s}) = (-1)^{j+1} i\omega + O(|s|^2), \quad j = 1, 2, \quad \widehat{\gamma}_j(\widehat{s}) = O(|\widehat{s}|), \ j = 3, 4, \quad (2.6)$$

а также при $|\widehat{s}| \geqslant \delta > 0$ справедливы оценки

$$\operatorname{Re}\widehat{\gamma}_j(\widehat{s}) < -\varepsilon_1(\delta), \quad 1 \leqslant j \leqslant 4, \ \varepsilon_1(\delta) > 0. \quad (2.7)$$

Пользуясь (2.6) при $\gamma \in \Omega_\omega(-\varepsilon, \delta_0)$ ($0 \leqslant |\widehat{s}| \leqslant \delta$, $\delta > 0$ достаточно мало) и (2.7) при $\operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon$, $|\widehat{s}| > \delta$, $\varepsilon = \varepsilon_1/2$, устанавливаем оценку

$$|\mathscr{P}(\gamma, s)| = |\widehat{\mathscr{P}}(\widehat{\gamma}, \widehat{s})| \geqslant c'_{2,1}(1 + |\gamma|^2)^2, \quad c'_{2,1} = c'_{2,1}(\alpha^2, \omega, \varepsilon, \delta_0) > 0. \quad (2.8)$$

В [6] показано, что при $|s| \to \infty$ справедливы асимптотические представления

$$\widehat{\gamma} - \widehat{\gamma}_1(\widehat{s}) = (\widehat{\gamma} + 1/\alpha^2\nu)(1 + O(|\widehat{s}|^{-2})),$$
$$\widehat{\gamma} - \widehat{\gamma}_j(\widehat{s}) = (\widehat{\gamma} + \nu|\widehat{s}|^2)(1 + O(|\widehat{s}|^{-2})), \quad j = 2, 3, 4, \quad (2.9)$$

нумерация корней в (2.6) и (2.9) не обязательно совпадает. Пользуясь (2.9) при $\operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon$, $\varepsilon < 1/4\alpha^2\nu$; $|\widehat{s}| \geqslant M > 0$, $M > 0$ достаточно велико, устанавливаем оценку

$$|\mathscr{P}(\gamma, s)| = |\widehat{\mathscr{P}}(\widehat{\gamma}, \widehat{s})| \geqslant c''_{2,1}(1 + |\gamma|^2)^{1/2}(1 + |\gamma|^2 + |s|^4)^{3/2},$$

из которой с учетом (2.8) получаем (2.3). Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть* $\gamma \in \mathbf{C}$ *и* $s \in R_3$ *удовлетворяют условию* (2.1) *или* (2.2) *и справедливы оценки многочлена* $d(\gamma, s', s_3)$:

$$|d(\gamma, s', s_3)| \leqslant c_0(1 + |\gamma|)^q (1 + |\gamma| + |s|^2)^r, \quad (2.10)$$

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial s_3^l} d(\gamma, s', s_3)\right| \leqslant c_l(1 + |\gamma|)^q(1 + |\gamma| + |s|^2)^{r-l/2}. \quad (2.11)$$

Тогда при $l = 0, 1, 2, \ldots$ *выполняются оценки*

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial s_3^l} \frac{d(\gamma, s', s_3)}{\mathscr{P}(\gamma, s', s^3)\mathscr{P}(\gamma, s', -s_3)}\right| \leqslant \frac{c_{2,2}^{(l)}}{(1 + |\gamma|^{2-q}(1 + |\gamma| + |s|^2)^{6-r+l/2}}, \quad (2.12)$$

где постоянные $c_{2,2}^{(l)} > 0$ *не зависят от* γ, s', s_3.

Доказательство. С помощью индукции по k легко устанавливается равенство

$$\frac{\partial^k}{\partial s_3^k} = \frac{\mathscr{P}'(s_3)}{\mathscr{P}(s_3)} = \sum_{\beta_1 + \ldots + \beta_{k+1} = k+1} \nu_{\beta_1, \ldots, \beta_{k+1}} \frac{\mathscr{P}^{(\beta_1)}(s_3)\mathscr{P}^{(\beta_2)}(s_3)\ldots\mathscr{P}^{(\beta_{k+1})}(s_3)}{\mathscr{P}^{k+1}(s_3)},$$

где $\nu_{\beta_1, \ldots, \beta_{k+1}} \geqslant 0$ — постоянные. Отсюда и из (2.3) следует оценка (2.12). Лемма доказана.

Введем в рассмотрение матрицы $B^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$, и B с элементами

$$B_{j,l}^{(k)}(t, x', x_3) = \mathscr{L}^{-1}_{\gamma\to t}\mathscr{F}^{-1}_{s\to x}\left[b_{j,l}^{(k)}(\gamma, s', s_3)\right], \quad 1 \leqslant j \leqslant 4, \ 1 \leqslant l \leqslant 3, \quad (2.13)$$

$$B_{j,l}(t, x', x_3) = \mathscr{L}^{-1}_{\gamma\to t}\mathscr{F}^{-1}_{s\to x}[b_{j,l}(\gamma, s', s_3)], \quad 1\leqslant j\leqslant 4, \ 1\leqslant l\leqslant 3, \tag{2.14}$$

где

$$b^{(k)}_{j,l}(\gamma, s', s_3) = \frac{\partial^{\sigma^{(k)}_{j,l}}}{\partial s_3^{\sigma^{(k)}_{j,l}}} \frac{d^{(k)}_{j,l}(\gamma, s', s_3)}{\mathscr{P}(\gamma, s', s_3)\mathscr{P}(\gamma, s', -s_3)}, \tag{2.15}$$

$$b_{j,l} = \frac{\partial^{\sigma_{j,l}}}{\partial s_3^{\sigma_{j,l}}} \frac{d_{j,l}(\gamma, s', s_3)}{\mathscr{P}(\gamma, s', s_3)\mathscr{P}(\gamma, s', -s_3)}, \tag{2.16}$$

причем числа $\sigma^{(k)}_{j,l}$ и $\sigma_{j,l}$ определены во введении (см. (14)), полиномы $d^{(k)}_{j,l}$ и $d_{j,l}$ построены в § 1 (см. (1.8)).

Следствие 2.1. *Функции $b^{(k)}_{j,l}$ и $b_{j,l}$ являются аналитическими функциями γ при $\gamma\in\Pi\subset\mathbf{C}$, $s'\in Q\subseteq R_2$, $1\leqslant j\leqslant 4$, $1\leqslant l\leqslant 3$, $k=0, 1, 2, 3$, и справедливы оценки*

$$\int\limits_{Q}\left\{\int\limits_{R_1}|b^{(k)}_{j,l}|\,ds_3\right\}^2 ds' \leqslant c'_{2,1}(1+|\gamma|)^{-2}, \quad \widehat{c}_{2,1} = \widehat{c}_{2,1}(\alpha^2, \omega, \nu, \varepsilon, \delta_0) > 0 \tag{2.17}$$

(здесь для краткости записи обозначено $b^{(3)}_{j,l} = b_{j,l}$), если выполнено одно из условий:

1) $\Pi = \Omega_\omega(-\varepsilon, \delta_0)$, $0<\delta_0<\omega/2$; $\varepsilon=\varepsilon(\delta_0)>0$ достаточно мало; $Q=R_2$;

2) $\Pi=\{\gamma|\operatorname{Re}\gamma>-\varepsilon\}$; $Q=\{s'\mid |s'|>\delta_0\}$: $\delta_0>0$; $\varepsilon=\varepsilon(\delta_0)>0$ достаточно мало.

Аналитичность $b^{(k)}_{j,l}$ и $b_{j,l}$ в указанных областях очевидна (см. доказательство леммы 2.1). Оценки (2.17) устанавливаются с использованием явного вида полиномов $d^{(k)}_{j,l}$ и $d_{j,l}$, оценок (2.10)—(2.12).

Лемма 2.3. *Пусть $W(t, x')\in H'_{0,0,(-\varepsilon_0),\varepsilon_0>0}$; Γ — кусочно-гладкая кривая длины $|\Gamma|<\infty$, $\Gamma\subset\Omega_\omega(-\varepsilon, \delta_0)$ при любом δ_0: $0<\delta_0<\omega/2$ и $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon=\varepsilon(\delta_0)$, выбранном в лемме 2.1. Тогда при $1\leqslant j\leqslant 4$, $1\leqslant l\leqslant 3$, $k=0, 1, 2, 3$ выполняются оценки*

$$\left|\int\limits_{\Gamma}\mathscr{F}^{-1}_{s\to x}\left[b^{(k)}_{j,l}w(\gamma, s')\right]d\gamma\right| \leqslant \sup_{\gamma\in\Gamma}\frac{c_{2,3}}{(1+|\gamma|)^2}\langle\langle W\rangle\rangle_{0,0,(-\varepsilon_0)}, \tag{2.18}$$

$$w(\gamma, s') = \mathscr{F}_{x'\to s'}\mathscr{L}_{t\to\gamma}[W(t, x')]; \quad c_{2,3} = c_{2,3}(\alpha^2, \omega, \nu, \delta_0, \varepsilon_0, \varepsilon, |\Gamma|) > 0, \quad b^{(3)}_{j,l} = b_{j,l}.$$

Доказательство немедленно вытекает из неравенств (2.17), неравенства Коши и оценки в стандартной норме пространства $L_2(R_1^+\times R_2)$

$$\left\{\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{R_2}|w(\gamma, s')|^2\,ds'\,d\gamma\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\pi|\Gamma|^{1/2}}{\varepsilon_0-\varepsilon}\|W(t, x')e^{\varepsilon_0 t}\|. \tag{2.19}$$

С помощью (2.17) аналогично доказываются следующие леммы.

Лемма 2.4. *Пусть функция $W(t, x')$ такова, что $W(t, x')\in H'_{0,0,(-\varepsilon_0),\varepsilon_0>0}$; $w(\gamma, s')=0$ при $\operatorname{Re}\gamma>-\varepsilon$, $|s'|<\delta$ $(w(\gamma, s') = \mathscr{F}_{x'\to s'}\mathscr{L}_{t\to\gamma}[W])$, где $\delta>0$ любое, $\varepsilon=\varepsilon(\delta)\in(0, \varepsilon_0)$ выбрано в лемме 2.1; $\Gamma\subset\{\gamma|\operatorname{Re}\gamma>-\varepsilon\}$ — кусочно-гладкая кривая длины $|\Gamma|<\infty$. Тогда выполнены оценки (2.18) с постоянной $c_{2,4}=c_{2,4}(\alpha^2, \omega, \nu, \delta, \varepsilon_0-\varepsilon, |\Gamma|)>0$.*

Лемма 2.5. *Пусть при некотором $\varepsilon_0>0$ $W(t, x')\in H'_{0,0,(-\varepsilon_0)}$, отрезок Γ принадлежит множеству $\{\gamma|\operatorname{Re}\gamma=\sigma\}\cap\Omega_\omega(-\varepsilon, \delta_0)$ при любом δ_0: $0<\delta_0<\omega/2$ и $\varepsilon=\varepsilon(\delta_0)\in(0, \varepsilon_0)$, выбранном в лемме 2.1. Тогда при*

$1 \leqslant j \leqslant 4$, $1 \leqslant l \leqslant 3$, $k = 0, 1, 2, 3$ *справедливы оценки*

$$\left| \int\limits_{\Gamma} \mathcal{F}^{-1}_{s\to x} \left[b^{(k)}_{j,l} w(\gamma, s') \right] d\gamma \right| \leqslant \frac{c_{2,5}}{(1+\sigma^2)^{1/2}} \langle\langle W \rangle\rangle_{0,0,(-\varepsilon_0)}, \tag{2.20}$$

$$c_{2,5} = c_{2,5}(\alpha^2, \omega, \nu, \varepsilon, \delta_0); \quad b^{(3)}_{j,l} = b_{j,l}.$$

Лемма 2.6. *Пусть функция* $W(t, x')$ *удовлетворяет условиям леммы* 2.4, Γ — *отрезок прямой* $\operatorname{Re}\gamma = \sigma$, $\sigma > -\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. *Тогда оценки* (2.20) *справедливы.*

Из лемм 2.3 и 2.5 вытекает

Следствие 2.2. *При выполнении условий леммы* 2.3 *функции* $\mathcal{F}^{-1}_{s\to x}\left[b^{(k)}_{j,l}(\gamma, s)\, w(\gamma, s)\right]$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, $1 \leqslant l \leqslant 3$, $0 \leqslant k \leqslant 3$, *абсолютно интегрируемы на кусочно-гладкой кривой* $\Gamma_\omega(-\varepsilon, \delta_0)$, *ограничивающей область* $\Omega_\omega(-\varepsilon, \delta_0)$.

§ 3. Доказательство принципа локализации

Оценки, полученные в § 2, позволяют выделить главные в смысле асимптотических свойств при $t \to \infty$ части элементов сверток $D' * \mathbf{W}$ и $D * \mathbf{U}$ (см. (1.16), (1.19)).

Лемма 3.1. *Пусть* $\dfrac{\partial^n}{\partial x_j^n} W_l \in H'_{0,0,(-\varepsilon_0)}$, $\quad l = 1, 2, 3, n = 0, 1, j = 1, 2$ *при некотором* $\varepsilon_0 > 0$. *Тогда функции* $\mathcal{F}^{-1}_{s\to x}\left[b^{(k)}_{j,l}(\gamma, s)\, w_l(\gamma, s')\right]$ *абсолютно интегрируемы по* $\gamma \in \Gamma_\omega(-\varepsilon_1 \delta_0)$; δ_0: $0 < \delta_0 < \omega/2$ *при* ε: $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *где* ε_0 — *достаточно малое число, и существуют свертки*

$$D^{(0)}_{j,l} * W_l = \frac{1}{2\pi i}(-ix_3)^{-\sigma^{(0)}_{j,l}} \int\limits_{\Gamma_\omega(-\varepsilon,\delta_0)} \mathcal{F}^{-1}_{s\to x}\left[b^{(0)}_{j,l}(\gamma, s)\, w_l(\gamma, s')\right] e^{\gamma t}\, d\gamma, \tag{3.1}$$

$$D^{(k)}_{j,l} * \frac{\partial}{\partial x_k} W_l = \frac{1}{2\pi i}(-ix_3)^{-\sigma^{(k)}_{j,l}} \int\limits_{\Gamma_\omega(-\varepsilon,\delta_0)} \mathcal{F}^{-1}_{s\to x} \times$$
$$\times \left[b^{(k)}_{j,l}(\gamma, s)\, w_l(\gamma, s')\right] e^{\gamma t}\, d\gamma, \quad k = 1, 2. \tag{3.2}$$

Функции $b^{(k)}_{j,l}$ *определены в* (2.15), (2.16), *числа* $\sigma^{(k)}_{j,l}$ — *в* (14).

Доказательство. Ограничимся рассмотрением представления (3.1). Из (2.13) в силу абсолютной интегрируемости функций $b^{(0)}_{j,l}(\gamma, s)\, w_l(\gamma, s')$ по любой прямой $\operatorname{Re}\gamma = \sigma$, $\sigma > \delta_0$ (см. лемму 2.5) следует, что справедливо представление

$$D^{(0)}_{j,l} * W_l = \frac{1}{2\pi i}(-ix_3)^{-\sigma^{(0)}_{j,l}} \int\limits_{\operatorname{Re}\gamma=\sigma} \mathcal{F}^{-1}_{s\to x}\left[b^{(0)}_{j,l}(\gamma, s)\, w_l(\gamma, s')\right] e^{\gamma t}\, d\gamma. \tag{3.3}$$

Функция $b^{(0)}_{j,l}(\gamma, s)$ аналитична в $\Omega_\omega(-\varepsilon, \delta_0)$ (см. следствие 2.1), а функция $w_l(\gamma, s')$ — при $\operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon_0$ (см. замечание 2), поэтому в (3.3) возможен переход к интегрированию по $\gamma \in \Gamma_\omega(-\varepsilon, \delta_0)$ с помощью стандартных рассуждений.

Из (3.3) с учетом следствия 2.2 вытекает (3.1). Лемма доказана.

Теорема 3.1. *В условиях леммы* 3.1 *справедливы представления*

$$D^{(0)}_{j,l} * W_l = \frac{1}{2\pi i}(-ix_3)^{-\sigma^{(0)}_{j,l}} \left\{ \int\limits_{\Gamma'(-\varepsilon,\delta_0)} \mathcal{F}^{-1}_{s\to x}\left[b^{(0)}_{j,l}\eta_\delta w_l\right] e^{\gamma t}\, d\gamma + O(e^{-\varepsilon t}) \right\}; \tag{3.4}$$

$$D^{(k)}_{j,l} * \frac{\partial W}{\partial x_k} = \frac{1}{2\pi i}(-ix_3)^{-\sigma^{(k)}_{j,l}} \left\{ \int\limits_{\Gamma'(-\varepsilon,\delta_0)} \mathcal{F}^{-1}_{s\to x} \times \right.$$
$$\left. \times \left[b^{(k)}_{j,l}\eta_\delta w_l\right] e^{\gamma t}\, d\gamma + O(e^{-\varepsilon t}) \right\}, \quad k = 1, 2; \tag{3.5}$$

контур $\Gamma'(-\varepsilon, \delta_0)$ *и срезающая функция* $\eta_\delta(s')$ *определены во введении* (*см.* (10)); *оценка* $O(e^{-\varepsilon t})$ *равномерна по* $(x', x_3) \in R_3^+$.

Доказательство. С помощью разбиения единицы $1 = (1 - \eta_\delta(s')) + \eta_\delta(s')$, $s' \in R_2$, представим интеграл в (3.1) в виде суммы двух интегралов. При достаточно малом $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ леммы 2.4 и 2.6 влекут оценку первого из них:

$$\left| \int\limits_{\Gamma_\omega(-\varepsilon,\delta_0)} \mathscr{F}^{-1}_{s\to x}\left[b^{(0)}_{j,l}(1-\eta_\delta)w_l\right] e^{\gamma t}\, d\gamma \right| \leqslant \frac{c'_{3,1}}{(1+\varepsilon^2)^{1/2}} \langle\langle W\rangle\rangle_{0,0,(-\varepsilon_0)}\, e^{-\varepsilon t}, \quad (3.6)$$

полученную в силу возможности перехода к интегрированию по контуру $\operatorname{Re}\gamma = -\varepsilon$. В оставшемся интеграле проведем разбиение $\Gamma_\omega(-\varepsilon, \delta_0) = \Gamma'(-\varepsilon, \delta_0) \cup \Gamma''(-\varepsilon, \delta_0)$, где $\Gamma'' = \Gamma_\omega \backslash \Gamma'$. С помощью лемм 2.3 и 2.5 находим

$$\left| \int\limits_{\Gamma''(-\varepsilon,\delta_0)} \mathscr{F}^{-1}_{s\to x}\left[b^{(0)}_{j,l}\eta_\delta w_l\right] e^{\gamma t}\, d\gamma \right| \leqslant c''_{3,1}(1+\varepsilon^2)^{-1/2} \langle\langle W\rangle\rangle_{0,0,(-\varepsilon_0)}\, e^{-\varepsilon t}. \quad (3.7)$$

Из (3.6) и (3.7) следует (3.4). Представление (3.5) выводится так же. Лемма доказана.

Аналогичные (3.4), (3.6) представления элементов свертки $D * \mathbf{U}$ могут быть установлены на основе доказательства аналитичности по γ компонент вектора $\mathbf{u}(\gamma, s) = \mathscr{L}_{t\to\gamma}\mathscr{F}_{x'\to s'}[U(t, x')]$.

Отметим, что в силу последнего уравнения системы (5) и условий (6) справедливо равенство

$$u_3(\gamma, s') = \nu i s_1 w_1(\gamma, s') + \nu i s_2 w_2(\gamma, s') + (\alpha^2\gamma\nu + 1)\, p(\gamma, s', s_3)\big|_{x_3=0}. \quad (3.8)$$

Лемма 3.2. *Если* $W_l \in H'_{0,0,(-\varepsilon_0)}$, $l = 1, 2, 3$, *при некотором* $\varepsilon_0 > 0$, *то при любом* δ_0: $0 < \delta_0 < \omega/2$ *и достаточно малом* ε: $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *компоненты вектора* $\mathbf{u}(\gamma, s')$ *при почти всех* $s' \in R_2$ *являются аналитическими функциями в области* $\Omega_\omega(-\varepsilon, \delta_0)$. *При этих значениях параметров справедлива оценка*

$$\sum_{l=1}^{3} |u_l(\gamma, s')|^2 \leqslant c_{3,2} \sum_{l=1}^{3} (1 + |\gamma| + |s|^2)^{3/2} |w_l(\gamma, s')|^2, \quad (3.9)$$

где $c_{3,2} = c_{3,2}(\alpha^2, \omega, \nu, \varepsilon, \delta_0) > 0$.

Доказательство существенно опирается на теорему о разрешимости задачи для уравнения

$$A\left(\gamma, is_1, is_2, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\begin{bmatrix}\mathbf{V}\\ p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{f}\\ g\end{bmatrix} \quad (3.10)$$

с условиями (6), (7) и на ее следствия, установленные в работе авторов [13]. Приведем их без доказательства.

Определение 3.1. *Функция* $v(x_3)$ *принадлежит пространству* $\widehat{H}^m_+$, $m > 0$ целое, если $\dfrac{d^k v}{dx_3^k} \in L_2(R_1^+)$, $k = 0, 1, \ldots, m$, и конечна норма

$$\|v\|^+_m = \left\{ \sum_{k=0}^{m} \int\limits_0^\infty \left| \frac{d^k v}{dx_3^k} \right|^2 dx_3 \right\}^{1/2}. \quad (3.11)$$

Теорема 3.2 [13, теорема 1]. *Пусть* $\gamma \in \mathbf{C}$, $s' \in R_2$ *удовлетворяют одному из условий*

$$\text{а) } \gamma \in \Omega_\omega(-\varepsilon, \delta_0),\ s' \in R_2; \quad \text{б) } \operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon,\ |s'| > \delta, \quad (3.12)$$

где $\varepsilon > 0$ *достаточно мало*; $\delta_0 \in (0, \omega/2)$, $\delta > 0$. *Тогда для любых* $\mathbf{f} \in L_2(R_1^+)$, $g \in \widehat{H}^1_+$ *существует единственное решение* $\{\mathbf{v}, p\}$, $\mathbf{v} \in \widehat{H}^2_+$,

$p \in \widehat{H}^1_+$, *задачи* (3.10), (6), (7) *и справедлива оценка*

$$\sum_{k=0}^{2} (1+|\gamma|+|s'|^2)^{2-k} \left\| \frac{\partial^k \mathbf{v}}{\partial x_3^k} \right\|^2 + \sum_{k=0}^{1} (1+|\gamma|^2+|s'|^2)^{1-k} \left\| \frac{\partial^k p}{\partial x_3^k} \right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \widehat{c}_{3,2} \left[\|\mathbf{f}\|^2 + \sum_{k=0}^{1} (1+|s'|^2)^{1-k} \left\| \frac{\partial^k g}{\partial x_3^k} \right\|^2 + \sum_{j=1}^{3} (1+|\gamma|+|s'|^2)^{3/2} |w_j|^2 \right], \quad (3.13)$$

где $\|\cdot\|$ — *норма в* $L_2(R_1^+)$, $\widehat{c}_{3,2} = \widehat{c}_{3,2}(\alpha^2, \omega, \nu, \delta_0, \delta, \varepsilon) > 0$.

Из этой теоремы и известной теоремы «о следах» (см., например, [15]), вытекает

Следствие 3.1. *В условиях теоремы* 3.2 *для любого решения* $\{\mathbf{v}, p$ $\mathbf{v} \in \widehat{H}^2_+$, $p \in \widehat{H}^1_+$, *задачи* (3.10), (6), (7) *справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{2} \left| \frac{\partial v_j}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0} \right|^2 + |p|_{x_3=0}|^2 \leqslant \hat{\hat{c}}_{3,1} \left[\|\mathbf{f}\|^2 + \sum_{k=0}^{1} (1+|s'|^2)^{1-k} \left\| \frac{\partial^k g}{\partial x_3^k} \right\|^2 + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{3} (1+|\gamma|+|s'|^2)^{3/2} |w_j|^2 \right], \quad (3.14)$$

где $\hat{\hat{c}}_{3,1} = \hat{\hat{c}}_{3,1}(\alpha^2, \omega, \nu, \delta_0, \delta, \varepsilon) > 0$.

Доказательство леммы 3.2. Из (13) и (3.8) следует, что для доказательства утверждения леммы достаточно установить аналитичность $\frac{\partial v_j}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0}$, $j = 1, 2$, и $p|_{x_3=0}$. Наряду с задачей (5)—(7) рассмотрим задачу

$$A\left(\gamma, is_1 is_2, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \alpha^2 p \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

$$\dot{v}_j|_{x_3=0} = \dot{w}_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.16)$$

$$\lim_{x_3 \to \infty} \dot{v}_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \lim_{x_3 \to \infty} \dot{p} = 0, \quad (3.17)$$

полученную из (5)—(7) формальным дифференцированием по γ (в (3.16) обозначено: $\dot{w}_j = \frac{\partial w_j}{\partial \gamma}$, $j = 1, 2, 3$). В силу теоремы 3.2 решение $\dot{\mathbf{v}} \in H^2_+$, $\dot{p} \in \widehat{H}^1_+$ задачи (3.15)—(3.17) существует и единственно при $\gamma \in \Omega_\omega(-\varepsilon, \delta_0)$, $s' \in R_2$. Фиксируем $\gamma \in \Omega_\omega(-\varepsilon, \delta_0)$ и выбираем $\Delta\gamma$ настолько малым, что $\gamma + \Delta\gamma \in \Omega_\omega(-\varepsilon, \delta_0)$. Из (5)—(7), (3.15)—(3.17) (обозначим $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(\gamma + \Delta\gamma, s) - \mathbf{v}(\gamma, s)$ — аналогично Δp, $\Delta\mathbf{w}$), следует

$$A\left(\gamma, is_1, is_2, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \begin{bmatrix} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta\gamma} - \dot{\mathbf{v}} \\ \frac{\Delta p}{\Delta\gamma} - \dot{p} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{v} \\ \alpha^2 \Delta p \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{\Delta v_j}{\Delta\gamma} - \dot{v}_j \right)\Big|_{x_3=0} = \frac{\Delta w_j}{\Delta\gamma} - \dot{w}_j, \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.19)$$

$$\lim_{x_3 \to \infty} \left(\frac{\Delta v_j}{\Delta\gamma} - \dot{v}_j \right) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \lim_{x_3 \to \infty} \left(\frac{\Delta p}{\Delta\gamma} - \dot{p} \right) = 0. \quad (3.20)$$

Применяя к решению задачи (3.18)—(3.20) оценку (3.14), находим

$$\sum_{j=1}^{2}\left|\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\Delta v_j}{\Delta\gamma}-\dot v_j\right)\Big|_{x_3=0}\right|^2+\left|\left(\frac{\Delta p}{\Delta\gamma}-\dot p\right)\Big|_{x_3=0}\right|^2\leqslant c'_{3,2}\left[\|\Delta\mathbf{v}\|^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{1}(1+|s'|^2)^{1-k}\left\|\frac{\partial^k\Delta p}{\partial x_3^k}\right\|^2+\sum_{j=1}^{3}(1+|\gamma|+|s'|^2)^{3/2}\left|\frac{\Delta w_j}{\Delta\gamma}-\dot w_j\right|^2\right]. \quad (3.21)$$

Оценка (3.13) относительно $\{\Delta\mathbf{v}, \Delta p\}$ дает неравенство

$$\|\Delta\mathbf{v}\|^2+\sum_{k=0}^{1}(1+|s'|^2)^{1-k}\left\|\frac{\partial^k\Delta p}{\partial x_3^k}\right\|^2\leqslant\widehat{c}_{3,2}\left[|\Delta\gamma|^2\|\mathbf{v}(\gamma+\Delta\gamma)\|^2+\right.$$

$$\left.+|\Delta\gamma|^2\sum_{k=0}^{1}(1+|s'|^2)^{1-k}\left\|\frac{\partial^k p(\gamma+\Delta\gamma)}{\partial x_3^k}\right\|^2+\sum_{j=1}^{3}(1+|\gamma|+|s'|^2)^{3/2}|\Delta w_j|^2\right]. \quad (3.22)$$

Неравенство (3.13), примененное к задаче (5)—(7), записанной в точке $\gamma+\Delta\gamma$, позволяет иметь оценку

$$\|\mathbf{v}(\gamma+\Delta\gamma)\|^2+\sum_{k=0}^{1}(1+|s'|^2)^{1-k}\left\|\frac{\partial^k p(\gamma+\Delta\gamma)}{\partial x_3^k}\right\|^2\leqslant$$

$$\leqslant\widehat{c}_{3,2}\sum_{j=1}^{3}(1+|\gamma+\Delta\gamma|+|s'|^2)^{3/2}|w_j(\gamma+\Delta\gamma)|^2. \quad (3.23)$$

Функции $w_j(\gamma, s')$, $j=1, 2, 3$, являются аналитическими функциями γ в полуплоскости $\operatorname{Re}\gamma>-\varepsilon_0$ и удовлетворяют оценке

$$|w_j(\gamma,s')|\leqslant\left(2\pi/\sqrt{2(\varepsilon-\varepsilon_0)}\right)\left\|W_j(t,k')e^{\varepsilon_0 t}\right\|, \quad (3.24)$$

полученной с помощью равенства Парсеваля и неравенства Коши. Следовательно, $|w_j|$ равномерно по γ ограничены в области $\operatorname{Re}\gamma>-\varepsilon$. В силу аналитичности $w_j(\gamma, s')$ отношения $\dfrac{\Delta w_j}{\Delta\gamma}$ равномерно ограничены при $|\Delta\gamma|\to 0$, а $\lim\limits_{|\Delta\gamma|\to 0}\left(\dfrac{\Delta w_j}{\Delta\gamma}-\dot w_j\right)=0$, $j=1, 2, 3$. Таким образом, из (3.21)—(3.23) вытекает, что при почти всех $s'\in R_2$ существуют производные

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial\gamma\,\partial x_3}\Big|_{x_3=0},\quad j=1,2,\quad \frac{\partial p}{\partial\gamma}\Big|_{x_3=0}.$$

Оценка (3.9) получается из теоремы 3.2 и следствия 3.1. Лемма доказана.

Аналогично доказывается

Лемма 3.3. *Пусть при некотором* $\varepsilon_0>0$ *будет* $W_l\in H'_{0,0,(-\varepsilon_0)}$, $l=1,2,3$. *Тогда при любом* $\delta>0$, *достаточно малом* ε: $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, *почти всех* $s'\in R_2$, $|s'|>\delta$ *компоненты вектора* $\mathbf{u}(\gamma, s')$ *являются аналитическими функциями* γ *в полуплоскости* $\operatorname{Re}\gamma>-\varepsilon$ *и имеет место оценка* (3.9).

Доказательство следующей леммы повторяет доказательство леммы 3.1 и основано на втором из представлений (1.8) и леммах 2.2, 2.3, 2.5, 3.2, 3.3.

Лемма 3.4. *Пусть при некотором* $\varepsilon_0>0$ *имеем* $W_l\in H'_{3/4;3/2;(-\varepsilon_0)}$, $l=1, 2, 3$. *Тогда при* $x_3>0$ *существуют свертки* $D_{j,l}(t, x', x_3)*U_l(t, x')$

и справедливы представления

$$D_{j,l} * U_l = \frac{1}{2\pi i}(-ix_3)^{-\sigma_{j,l}} \int\limits_{\Gamma_\omega(-\varepsilon,\delta_0)} \mathcal{F}^{-1}_{s\to x}[b_{j,l}(\gamma, s)\, u_l(\gamma, s')]\, e^{\gamma t} d\gamma. \quad (3.25)$$

Интеграл в правой части (3.25) *абсолютно сходится.*

Повторяя рассуждения теоремы 3.1 (с использованием лемм 2.5, 2.6, 3.4), мы можем установить следующее утверждение.

Теорема 3.3. *В условиях леммы 3.4 справедливы представления*

$$D_{j,l} * U_l = \frac{1}{2\pi i}(-ix_3)^{-\sigma_{j,l}} \left\{ \int\limits_{\Gamma'(-\varepsilon,\delta_0)} \mathcal{F}^{-1}_{s\to x}[b_{j,l}\eta_\delta u_l]\, e^{\gamma t} d\gamma + O\left(e^{-\varepsilon t}\right) \right\},$$

оценка $O(e^{-\varepsilon t})$ *равномерна по* $(x', x_3) \in R^+_3$.

Сформулированное во введении утверждение теоремы 2 вытекает из теорем 3.1 и 3.3.

Авторы глубоко благодарны профессору В. Н. Масленниковой за полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3—50.
2. *Масленникова В. Н.* Математические исследования по гидродинамике вращающейся жидкости // Тр. Всесоюз. конф. по уравнениям с частными производными. М.: Изд-во МГУ, 1978. С. 153—156.
3. *Гузь А. Н.* О представлении решений линеаризованных уравнений Навье — Стокса // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253, № 4. С. 825—827.
4. *Масленникова В. Н.* Асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для одной гиперболической системы, описывающей движение вращающейся жидкости // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 85—96.
5. *Масленникова В. Н.* О скорости затухания вихря в вязкой жидкости // Тр. Мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. 1973. Т. 126. С. 46—72.
6. *Глушко А. В.* Асимптотика по времени решения задачи Коши для линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса с нулевой правой частью // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Тр. семинара С. Л. Соболева). Новосибирск: Наука, 1981. № 1. С. 5—33.
7. *Глушко А. В.* Асимптотика по времени решения задачи Коши для линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, № 4. С. 800—804.
8. *Масленникова В. Н., Глушко А. В.* Теоремы о локализации тауберового типа и скорость затухания решения системы гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости // Тр. Мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. 1988. Т. 181. С. 156—186.
9. *Петунин И. М.* Об асимптотической оценке решения первой краевой задачи в полупространстве для движения вязкой вращающейся жидкости // Дифференциальные уравнения и функциональный анализ. М.: Изд-во УДН, 1983. С. 64—85.
10. *Рыбаков С. О.* Принцип локализации в начально-краевой задаче для линейной системы уравнений Навье — Стокса // Уравнения неклассического типа. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1986. С. 131—134.
11. *Рыбаков С. О.* Об одном асимптотическом представлении решения первой краевой задачи для уравнений гидродинамики в полупространстве // Методы функционального анализа в математической физике. М.: Изд-во УДН, 1987. С. 131—160.
12. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, № 3. С. 53—161.
13. *Глушко А. В., Рыбаков С. О.* О задаче Дирихле в полупространстве для системы уравнений движения вязкой сжимаемой вращающейся жидкости // Краевые задачи для уравнений с частными производными. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1990. № 1. С. 35—55.
14. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
15. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.

г. Воронеж

Статья поступила 13 июня 1990 г.