



Общероссийский математический портал

А. Л. Казаков, Св. С. Орлов, С. С. Орлов, Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности, *Сиб. матем. журн.*, 2018, том 59, номер 3, 544–560

DOI: 10.17377/smzh.2018.59.306

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.221.248.140

9 января 2025 г., 14:53:55



УДК 517.958+517.911

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. Л. Казаков, Св. С. Орлов, С. С. Орлов

Аннотация. Построены и исследованы точные решения нелинейного параболического уравнения второго порядка, которое в отечественной научной литературе обычно именуется «нелинейным уравнением теплопроводности», или «уравнением нелинейной фильтрации», а за рубежом — “the porous medium equation”. Рассматривается специальный класс решений, имеющих вид тепловой волны, которая распространяется по холодному (нулевому) фону с конечной скоростью. При этом на границе тепловой волны, называемой тепловым фронтом, происходит вырождение уравнения с понижением его порядка. Построение указанных решений посредством перехода к переопределенной системе и анализа ее разрешимости сводится к интегрированию нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, при этом начальное условие таково, что уравнение является неразрешенным относительно старшей производной. Получены некоторые допустимые семейства тепловых фронтов и соответствующие им классы точных решений поставленной задачи. Методами качественной теории дифференциальных уравнений и степенной геометрии, адаптированных для вырождающихся уравнений, проведено подробное исследование глобальных свойств решений. Выполнена интерпретация полученных результатов с точки зрения исследования поведения и свойств тепловых волн с логарифмическим законом движения фронта.

DOI 10.17377/smzh.2018.59.306

Ключевые слова: нелинейное уравнение теплопроводности, точное решение, тепловая волна, теорема существования, качественный анализ обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введение

Нелинейное уравнение теплопроводности считается одним из классических объектов теории дифференциальных уравнений с частными производными, который, несмотря на длительный период изучения, далек от исчерпания и до сих пор остается источником оригинальных идей и новых научных результатов. Интерес к этому уравнению продиктован не только математической составляющей, но и широтой спектра его применимости. Оно описывает многие процессы, встречающиеся в задачах тепло- и массопереноса, теории горения и взрыва, фильтрации, химической кинетике, биологии и т. д.

В данной работе рассматривается уравнение

$$T_t = \operatorname{div}_x(k(T) \operatorname{grad}_x T), \quad k(T) = k_0 T^\sigma, \quad (\text{PME})$$

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 16-01-00608, 16-31-00291).

© 2018 Казаков А. Л., Орлов Св. С., Орлов С. С.

где $T := T(t, \mathbf{x}) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\nu+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $\nu \in \{0, 1, 2\}$, $\mathbb{R} \ni \sigma, k_0 > 0$, известное в литературе как нелинейное уравнение теплопроводности или фильтрации [1], а также “the porous medium equation” [2]. В зависимости от физического содержания задачи функция $T \geq 0$ определяет температуру или плотность среды, а $k(T) \geq 0$ — коэффициент теплопроводности или фильтрации.

Авторами рассматривается вопрос о построении точных решений уравнения (PME), имеющих вид тепловой волны (решений типа тепловой волны). Под тепловой волной будем понимать конфигурацию, состоящую из двух гиперповерхностей: $T(t, \mathbf{x}) \geq 0$ (возмущенное решение) и $T(t, \mathbf{x}) \equiv 0$ (фоновое тривиальное решение), непрерывно состыкованных вдоль некоторой достаточно гладкой гиперповерхности $\Gamma(t, \mathbf{x}) = 0$, определяющей фронт тепловой волны.

Описание процесса распространения тепловой волны в абсолютно холодной среде (по нулевому фону) с конечной скоростью и примеры решений типа тепловой волны впервые были даны в работе Я. Б. Зельдовича и А. С. Компанейца [3]. Близкие результаты для задач фильтрации путем исследования различных автомодельных решений были вскоре получены Г. И. Баренблаттом [4]. Позднее в исследованиях А. Ф. Сидорова и представителей его научной школы рассматривались вопросы разрешимости в классе аналитических функций специальных краевых задач для уравнения теплопроводности, имеющих решения типа тепловой волны. Был предложен и развит основанный на методе характеристических рядов оригинальный подход к исследованию задач с заданными краевым режимом (задача А. Д. Сахарова об иницировании тепловой волны) и тепловым фронтом [5]. С использованием этой методологии был доказан ряд теорем, гарантирующих существование и единственность локально аналитических решений перечисленных краевых задач как в одномерной [6, 7], в том числе с подвижной границей [8], так и в неодномерной [9] постановках.

Следует отметить, что при всей значимости полученных в научной школе А. Ф. Сидорова результатов открытым остался вопрос, касающийся поведения решений типа тепловой волны за пределами малой окрестности, в которой доказана сходимости построенных рядов. Более содержательными в этом плане являются точные решения. Во-первых, их глобальные свойства позволяют сформировать общую картину поведения тепловых волн, во-вторых, с помощью точных решений могут быть проиллюстрированы различные эффекты, возникающие в нелинейной теплопроводности (локализация тепла и т. п.). В частности, в теории режимов с обострением, получившей развитие в научной школе А. А. Самарского, точные (преимущественно типа бегущей волны, автомодельные) решения выступают в роли основных модельных примеров [10].

В настоящей работе получены новые классы точных решений нелинейного уравнения теплопроводности, порождающие тепловые волны со степенными, экспоненциальными и логарифмическими фронтами. Решения описываются при помощи функций, которые определяются из начальных задач для автономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (обобщенных уравнений Льенара). Разрешить в конечном виде известными аналитическими методами эти задачи удастся только в некоторых случаях. Для изучения поведения решений предлагается переход к динамическим системам с целью построения фазовых портретов. Анализ фазовой плоскости является распространенным и одним из наиболее информативных методов исследования поведения точных решений, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями [11, разд. 6.2; 12, гл. 2, § 2]. Существенно дополняют знания

о свойствах точных решений их асимптотические разложения, построение которых осуществляется на основе аппарата степенной геометрии А. Д. Брюно [13, 14]. Проведено подробное исследование свойств тепловых волн, обладающих логарифмическим законом движения фронта.

1. Постановка задачи

Наличие пространственных симметрий (плоской, осевой, сферической) позволяет невырожденными преобразованиями свести (РМЕ) к одномерному уравнению

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{u^2}{\sigma} + \frac{\nu u}{\rho} u_{\rho}, \quad (1.1)$$

в котором u — новая искомая функция времени $t \geq 0$ и неотрицательной скалярной переменной $\rho := \|\mathbf{x}\|_{\nu} = \left(\sum_{k=1}^{\nu+1} x_k^2\right)^{1/2}$. Значения параметра ν соответствуют распространению тепла на прямой ($\nu = 0$), на плоскости ($\nu = 1$) и в пространстве ($\nu = 2$) симметрично относительно начала координат.

Настоящая работа посвящена построению и качественному исследованию точных решений типа тепловой волны уравнения (1.1), удовлетворяющих специальному краевому условию

$$u|_{\rho=\mathcal{F}(t)} = 0, \quad (1.2)$$

где $\rho = \mathcal{F}(t)$ — заданная в плоскости переменных (t, ρ) функция, обладающая достаточной степенью гладкости: $\mathcal{F} \in C^k(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq +\infty$. Кривую, определяемую функцией \mathcal{F} , называют *фронтом тепловой волны*. В каждой ее точке и во всех других, где $u(t, \rho) = 0$, происходит вырождение уравнения (1.1) с понижением порядка. Наличие такой особенности относит уравнение (1.1) к неклассическим уравнениям математической физики, представляющим в настоящее время большой исследовательский интерес. Наряду с вырождающимися уравнениями этому классу принадлежат уравнения, не разрешенные относительно старшей производной, которые с учетом различной специфики называют в литературе *уравнениями соболевского типа* [15, 16] или *не типа Коши — Ковалевской* [17], а также *псевдопараболическими* [18].

2. Поиск точных решений

2.1. Построение решений. Раздел посвящен нахождению точных решений уравнения (1.1), удовлетворяющих условию (1.2). Эти решения будем искать в виде

$$u(t, \rho) = \psi(t, \rho)\theta(\xi), \quad \xi := \xi(t, \rho), \quad \psi\xi_t\xi_{\rho} \neq 0. \quad (2.1)$$

Представление (2.1) предполагает редукцию к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $\theta(\xi)$. Этот способ построения точных решений основывается на прямом методе Кларксона — Крускала [19]. Для определения функций ψ и ξ подставим (2.1) в (1.1) и поделим полученное соотношение на функциональный коэффициент $\psi^2\xi_{\rho}^2 \neq 0$, стоящий перед $\theta\theta''$ и $(\theta')^2$. Найдем достаточные условия, при выполнении которых уравнение

$$\begin{aligned} \theta\theta'' + \frac{(\theta')^2}{\sigma} + \left\{ \left[\frac{2(\sigma+1)}{\sigma} \frac{\psi_{\rho}}{\psi\xi_{\rho}} + \frac{\xi_{\rho\rho}}{\xi_{\rho}^2} + \frac{\nu}{\rho\xi_{\rho}} \right] \theta - \frac{\xi_t}{\psi\xi_{\rho}^2} \right\} \theta' \\ + \left(\frac{\psi_{\rho}^2}{\sigma\psi^2\xi_{\rho}^2} + \frac{\psi_{\rho\rho}}{\psi\xi_{\rho}^2} + \frac{\nu\psi_{\rho}}{\rho\psi\xi_{\rho}^2} \right) \theta^2 - \frac{\psi_t}{\psi^2\xi_{\rho}^2} \theta = 0 \end{aligned}$$

является обыкновенным дифференциальным уравнением. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_\rho}{\psi\xi_\rho} = a_1, \quad \frac{\xi_{\rho\rho}}{\xi_\rho^2} = a_2, \quad \frac{\psi_{\rho\rho}}{\psi\xi_\rho^2} = a_3, \quad \frac{\xi_t}{\psi\xi_\rho^2} = a_4, \\ \frac{\psi_t}{\psi^2\xi_\rho^2} = a_5, \quad \frac{\psi_\rho}{\rho\psi\xi_\rho^2} = a_6, \quad \frac{1}{\rho\xi_\rho} = a_7, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где a_k — вещественные константы, $a_4 a_7 \neq 0$, $k = \overline{1, 7}$. Далее требуется разрешить переопределенную систему (2.2) уравнений в частных производных.

Лемма 1. Система дифференциальных уравнений (2.2) разрешима тогда и только тогда, когда $a_2 = -a_1/2 = -a_7$ и $a_2^2 = a_3/2 = a_6/2$.

Доказательство. Из второго и седьмого уравнений системы (2.2) явным образом определяется $\xi(t, \rho)$. Можно убедиться в том, что эти два уравнения совместны тогда и только тогда, когда $a_2 = -a_7 \neq 0$. В этом случае второе, седьмое и четвертое уравнения дают

$$\xi(t, \rho) = \ln \left[\frac{\rho}{f(t)} \right]^{-\frac{1}{a_2}}, \quad \psi(t, \rho) = \frac{\xi_t}{a_4 \xi_\rho^2} = \frac{a_2 [\ln f(t)]' \rho^2}{a_4},$$

где $f(t) \neq \text{const}$ в силу условия $\xi_t \neq 0$. Подставляя $\xi(t, \rho)$ и $\psi(t, \rho)$ в остальные уравнения системы, получаем соотношения $a_2 = -a_1/2$, $a_2^2 = a_3/2 = a_6/2$ и обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f f'' - \left(\frac{a_5}{a_2 a_4} + 1 \right) (f')^2 = 0,$$

из которого имеем либо $f(t) = c_2 e^{c_1 t}$, если $a_5 = 0$; либо $f(t) = (c_1 t + c_3)^{-a_2 a_4 / a_5}$, если $a_5 \neq 0$, где $\mathbb{R} \ni c_1, c_2 \neq 0, c_3 \in \mathbb{R}$. \square

Особого внимания заслуживает случай $\nu = 0$. Тогда, как нетрудно видеть, система (2.2) для $\xi(t, \rho)$ и $\psi(t, \rho)$ примет вид

$$\frac{\psi_\rho}{\psi\xi_\rho} = a_1, \quad \frac{\xi_{\rho\rho}}{\xi_\rho^2} = a_2, \quad \frac{\psi_{\rho\rho}}{\psi\xi_\rho^2} = a_3, \quad \frac{\xi_t}{\psi\xi_\rho^2} = a_4, \quad \frac{\psi_t}{\psi^2\xi_\rho^2} = a_5. \tag{2.3}$$

Лемма 2. Система дифференциальных уравнений (2.3) разрешима тогда и только тогда, когда $a_2 = -a_1/2$ и $a_2^2 = a_3/2$.

Доказательство. Рассмотрим два случая: $a_2 \neq 0$ и $a_2 = 0$.

А. Пусть $a_2 \neq 0$. Из второго и четвертого уравнений системы (2.3) получаем

$$\begin{aligned} \xi(t, \rho) = \ln \left[\frac{\rho}{f(t)} + g(t) \right]^{-\frac{1}{a_2}}, \\ \psi(t, \rho) = \frac{\xi_t}{a_4 \xi_\rho^2} = \frac{[\rho + g(t)f(t)] \{ [\ln f(t)]' \rho - g'(t)f(t) \}}{a_4}, \end{aligned}$$

где $f(t) \neq 0$ и $[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 \neq 0$ в силу условия $\xi_t \xi_\rho \neq 0$.

Если $g(t) \equiv 0$, то доказательство данного утверждения будет аналогично доказательству леммы 1.

Пусть $g(t) \neq 0$. Подставив $\xi(t, \rho)$ и $\psi(t, \rho)$ в первое, третье и пятое уравнения системы (2.3), после группировки слагаемых получим

$$\begin{aligned} (a_1 + 2a_2) f' \rho + a_2 g f f' - (a_1 + a_2) g' f^2 = 0, \\ (2a_2^2 - a_3) f' \rho + 2a_2 g f f' + a_3 g' f^2 = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\left[f f'' - \left(\frac{a_5}{a_2 a_4} + 1 \right) (f')^2 \right] \rho^2 + f^2 \left(g f'' + \frac{2a_5}{a_2 a_4} g' f' - g'' f \right) \rho - f^3 \left\{ 2g g' f' + \left[g g'' + \left(\frac{a_5}{a_2 a_4} + 1 \right) (g')^2 \right] f \right\} = 0. \quad (2.5)$$

Для обращения выражений (2.4) и (2.5) в тождества приравняем к нулю стоящие при степенях ρ функциональные коэффициенты. Из уравнений (2.4) имеем

$$(a_1 + 2a_2) f' = (2a_2^2 - a_3) f' = 0,$$

откуда следует, что $a_2 = -a_1/2$, $a_2^2 = a_3/2$ или $f(t) \equiv \text{const}$. Второй вариант дает $g(t) \equiv \text{const}$, значит, $[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 \equiv 0$, поэтому он исключается из рассмотрения. Первый вариант дает $g f' + g' f = g f' + a_2 g' f = 0$. Случай $a_2 \neq 1$ не представляет интереса, поскольку приводит к $f(t)g(t) \equiv 0$ или $[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 \equiv 0$. При $a_2 = 1$ возникает система четырех дифференциальных уравнений

$$g f' + g' f = 0, \quad f f'' - \left(\frac{a_5}{a_4} + 1 \right) (f')^2 = 0,$$

$$g f'' + \frac{2a_5}{a_4} g' f' - g'' f = 0, \quad 2g g' f' + \left[g g'' + \left(\frac{a_5}{a_4} + 1 \right) (g')^2 \right] f = 0,$$

которая в предположениях $f(t)g(t) \neq 0$ и $[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 \neq 0$ обладает следующими решениями:

- 1) если $a_5 = 0$, то $f(t) = c_2 e^{c_1 t}$, $g(t) = c_3 e^{-c_1 t}$;
- 2) если $a_5 \neq 0$, то $f(t) = (c_1 t + c_2)^{-a_4/a_5}$, $g(t) = (c_3/c_2)^{a_4/a_5} (c_1 t + c_2)^{a_4/a_5}$.

Здесь $\mathbb{R} \ni c_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$.

В. Пусть $a_2 = 0$. Из второго и четвертого уравнений системы (2.3) находим

$$\xi(t, \rho) = \frac{\rho}{g(t)} + f(t), \quad \psi(t, \rho) = \frac{\xi_t}{a_4 \xi_\rho^2} = -\frac{g' \rho - g^2(t) f'(t)}{a_4},$$

где $g(t) \neq 0$ и $[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 \neq 0$ в силу условия $\xi_t \xi_\rho \neq 0$. Подставляя $\xi(t, \rho)$ и $\psi(t, \rho)$ в остальные уравнения, получаем $a_3 = 0$ и

$$a_1 g' \rho - a_1 g^2 f' - g g' = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{a_5}{a_4} (g')^2 \rho^2 + g^2 \left(g'' - \frac{2a_5}{a_4} g' f' \right) \rho - g^3 \left\{ g \left[f'' - \frac{a_5}{a_4} (f')^2 \right] + 2g' f' \right\} = 0. \quad (2.7)$$

Для обращения выражений (2.6) и (2.7) в тождества приравняем к нулю стоящие при степенях ρ функциональные коэффициенты. Пусть $g(t) \equiv \text{const} \neq 0$, $a_1 \neq 0$ в (2.6), тогда $f(t) \equiv \text{const}$ и $[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 \equiv 0$, следовательно, этот вариант исключаем. Если в (2.6) положить $a_1 = 0$, то $g(t) \equiv \text{const} \neq 0$, а (2.7) становится дифференциальным уравнением

$$f'' - \frac{a_5}{a_4} (f')^2 = 0,$$

из которого получаем $f(t) = c_1 t + c_2$, если $a_5 = 0$; $f(t) = \ln(c_1 t + c_2)^{-a_4/a_5}$, если $a_5 \neq 0$, где $\mathbb{R} \ni c_1 \neq 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку $\psi(t, \rho) = \xi_t / (a_4 \xi_\rho^2)$, в формуле (2.1) для упрощения записи будем предполагать, что $\theta(\xi) = -a_4 v(\xi)$.

В ходе доказательства леммы 2 установлено, что уравнение (1.1) допускает следующие классы точных решений.

А. При $\nu \in \{0, 1, 2\}$ имеем

$$u(t, \rho) = \alpha [\ln f(t)]' \rho^2 v(\xi), \quad \xi = \ln \left[\frac{\rho}{f(t)} \right]^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (2.8)$$

Здесь либо $f(t) = c_2 e^{c_1 t}$, либо $f(t) = (c_1 t + c_3)^{\alpha\omega}$, где $\mathbb{R} \ni \alpha, \omega, c_1, c_2 \neq 0, c_3 \in \mathbb{R}$, а $v(\xi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$vv'' + \frac{(v')^2}{\sigma} + \left\{ \frac{\alpha[(\nu+3)\sigma+4]}{\sigma} v + 1 \right\} v' + \frac{2\alpha^2[(\nu+1)\sigma+2]}{\sigma} v^2 + kv = 0. \quad (2.9)$$

При этом либо $k = 0$, если $f(t) = c_2 e^{c_1 t}$; либо $k = 1/\omega$, если $f(t) = (c_1 t + c_3)^{\alpha\omega}$.

В. При $\nu = 0$ возникают два дополнительных класса точных решений. Первый из них имеет вид

$$u(t, \rho) = -[\rho + g(t)f(t)] \{ [\ln f(t)]' \rho - g'(t)f(t) \} v(\xi), \quad \xi = \ln \left[\frac{\rho}{f(t)} + g(t) \right]^{-1}. \quad (2.10)$$

Здесь либо $f(t) = c_2 e^{c_1 t}$, $g(t) = c_3 e^{-c_1 t}$; либо $f(t) = (c_1 t + c_2)^{-\omega}$, $g(t) = (c_3 c_1 t / c_2 + c_3)^\omega$, где $\mathbb{R} \ni \omega, c_i \neq 0, i = 1, 2, 3$, а $v(\xi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$vv'' + \frac{(v')^2}{\sigma} - \left(\frac{3\sigma+4}{\sigma} v - 1 \right) v' + \frac{2(\sigma+2)}{\sigma} v^2 + kv = 0. \quad (2.11)$$

При этом либо $k = 0$, если $f(t) = c_2 e^{c_1 t}$, $g(t) = c_3 e^{-c_1 t}$; либо $k = 1/\omega$, если $f(t) = (c_1 t + c_2)^{-\omega}$, $g(t) = (c_3 c_1 t / c_2 + c_3)^\omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Уравнение (2.9) при $\nu = 0$, $\alpha = -1$ совпадает с (2.11).

Второй класс точных решений определяется следующим образом:

$$u(t, \rho) = -\alpha^2 f'(t) v(\xi), \quad \xi = \frac{\rho}{\alpha} + f(t). \quad (2.12)$$

Здесь либо $f(t) = c_1 t + c_2$, либо $f(t) = \ln(c_1 t + c_2)^{-\omega}$, где $\mathbb{R} \ni \alpha, \omega, c_1 \neq 0, c_2 \in \mathbb{R}$, а $v(\xi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$vv'' + \frac{(v')^2}{\sigma} + v' + kv = 0. \quad (2.13)$$

При этом либо $k = 0$, если рассматривается случай $f(t) = c_1 t + c_2$, либо $k = 1/\omega$, если $f(t) = \ln(c_1 t + c_2)^{-\omega}$.

2.2. Согласование решений с краевым условием. Для нахождения решений уравнения (1.1) типа тепловой волны необходимо выделить среди полученных выше точных решений те, которые удовлетворяют условию (1.2).

Для согласования точных решений (2.8), (2.10) и (2.12) с условием (1.2) достаточно предполагать, что $v|_{\xi=\xi_0} = 0$, где $\xi_0 \in \mathbb{R}$. При этом, поскольку все дифференциальные уравнения для $v(\xi)$ автономные, без ограничения общности можно положить $\xi_0 = 0$. В самом деле, условие $v|_{\xi=0} = 0$ приводит к ситуации, когда интегральные поверхности, заданные решениями (2.8), (2.10) и (2.12) уравнения (1.1), пересекают плоскость $u \equiv 0$ вдоль некоторых линий $\rho = \mathcal{F}(t)$. Таковыми являются

- 1) $\rho = c_2 e^{c_1 t}$ или $\rho = (c_1 t + c_3)^{\alpha\omega}$ для (2.8);
- 2) $\rho = c_2 (e^{c_1 t} - c_3)$ или $\rho = (c_1 t + c_2)^{-\omega} - (c_2/c_3)^{-\omega}$ для (2.10);
- 3) $\rho = c_1 t + c_2$ или $\rho = \ln(c_1 t + c_2)^{\alpha\omega}$ для (2.12).

Линии, определяемые указанными функциями, будут являться фронтами соответствующих тепловых волн.

Таким образом, решения обыкновенных дифференциальных уравнений (2.9), (2.11) и (2.13), которые удовлетворяют начальному условию

$$v|_{\xi=0} = 0, \quad v'|_{\xi=0} = v_1, \quad (2.14)$$

порождают решения исходного уравнения с частными производными (1.1) типа тепловой волны. При этом согласованными с уравнениями (2.9), (2.11) и (2.13) являются случаи $v_1 = -\sigma$ или $v_1 = 0$.

Следует отметить, что найти общие интегралы каждого из уравнений (2.9), (2.11), (2.13) для произвольных значений фигурирующих в них параметров, по-видимому, не представляется возможным. Поэтому для установления поведения и свойств интересующих нас решений необходимо выполнить их дополнительные исследования. Прежде чем приступить к анализу, приведем несколько случаев, в которых можно найти явный вид соответствующих точных решений.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Тривиальное решение $v(\xi) \equiv 0$, которым, очевидно, обладают уравнения (2.9), (2.11) и (2.13), исключается из рассмотрения.

2.3. Случаи, разрешимые в конечном виде. Уравнения (2.9), (2.11) и (2.13) принадлежат классу обобщенных уравнений Льенара (generalized Liénard equations). Исследования по отысканию условий конечной разрешимости таких уравнений ведутся Н. А. Кудряшовым (см., например, [20]). Укажем некоторые случаи, когда удается выписать явный вид точных решений задачи (1.1), (1.2).

А. Пусть $\nu = 0$, $\mathcal{F}(t) = c_1 t + c_2$. Такому краевому условию (1.2) удовлетворяют решения (2.8), (2.10), (2.12), в которых $v(\xi) = -\sigma\omega(e^{\xi/\omega} - 1)/e^{2\xi/\omega}$, $v(\xi) = -\sigma e^{\xi}(e^{\xi} - 1)$, $v(\xi) = -\sigma\xi$ соответственно, т. е. в данном случае задачи Коши для уравнений (2.9), (2.11) и (2.13) с начальным условием (2.14) при $v_1 = -\sigma$ могут быть проинтегрированы в явном виде. Несложно убедиться, что здесь получается линейное решение задачи (1.1), (1.2), имеющее вид $u(t, \rho) = -\sigma c_1(\rho - c_1 t - c_2)$, которое при $c_1 > 0$ является тепловой волной на множестве $t \geq 0$, $0 \leq \rho \leq c_1 t + c_2$.

В. Пусть $\nu = 0$, $\mathcal{F}(t) = (c_1 t + c_2)^{1/(\sigma+2)} - (c_2/c_3)^{1/(\sigma+2)}$. Такому краевому условию (1.2) удовлетворяет решение (2.10). Решая задачу Коши (2.11), (2.14) при $v_1 = -\sigma$, получаем, что в данном случае $v(\xi) = -\sigma(e^{2\xi} - 1)/2$, следовательно, (2.10) примет вид

$$u(t, \rho) = -\frac{\sigma c_1}{2(\sigma+2)(c_1 t + c_2)} \left\{ \left[\rho + \left(\frac{c_2}{c_3} \right)^{\frac{1}{\sigma+2}} \right]^2 - (c_1 t + c_2)^{\frac{2}{\sigma+2}} \right\}.$$

При выполнении условий $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 \geq 1$ решение **В** является тепловой волной на множестве $t \geq 0$, $0 \leq \rho \leq (c_1 t + c_2)^{1/(\sigma+2)} - (c_2/c_3)^{1/(\sigma+2)}$.

С. Пусть $\nu = 0$, $\mathcal{F}(t) = (c_1 t + c_2)^{1/[2(\sigma+1)]} - (c_2/c_3)^{1/[2(\sigma+1)]}$. Такому краевому условию (1.2) удовлетворяет решение (2.10). Решая задачу Коши (2.11), (2.14) при $v_1 = -\sigma$, получаем, что в данном случае

$$v(\xi) = -\sigma(\sigma+1)[e^{(\sigma+2)\xi/(\sigma+1)} - 1]/(\sigma+2),$$

следовательно, (2.10) примет вид

$$u(t, \rho) = -\frac{\sigma c_1}{2(\sigma + 2)(c_1 t + c_2)} \left[\rho + \left(\frac{c_2}{c_3} \right)^{\frac{1}{2(\sigma+1)}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma+1}} \times \left\{ \left[\rho + \left(\frac{c_2}{c_3} \right)^{\frac{1}{2(\sigma+1)}} \right]^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}} - (c_1 t + c_2)^{\frac{\sigma+2}{2(\sigma+1)^2}} \right\}.$$

При выполнении условий $c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 \geq 1$ решение **С** является тепловой волной на множестве $t \geq 0, 0 \leq \rho \leq (c_1 t + c_2)^{1/(2\sigma+2)} - (c_2/c_3)^{1/(2\sigma+2)}$.

Д. Пусть $\mathcal{F}(t) = (c_1 t + c_2)^{1/[(\nu+1)\sigma+2]}$. Такому краевому условию (1.2) удовлетворяет решение (2.8). Решая задачу Коши (2.9), (2.14) при $v_1 = -\sigma$, получаем, что в данном случае

$$v(\xi) = \frac{[(\nu + 1)\sigma + 2]\sigma\omega}{2} \left(e^{\frac{-2\xi}{(\nu+1)\sigma+2}\omega} - 1 \right),$$

следовательно, (2.8) примет вид

$$u(t, \rho) = -\frac{\sigma c_1}{2[(\nu + 1)\sigma + 2](c_1 t + c_2)} [\rho^2 - (c_1 t + c_2)^{\frac{2}{(\nu+1)\sigma+2}}].$$

При выполнении условий $c_1 > 0, c_2 > 0$ решение **Д** является тепловой волной на множестве $t \geq 0, 0 \leq \rho \leq (c_1 t + c_2)^{1/[(\nu+1)\sigma+2]}$.

Е. Пусть $\mathcal{F}(t) = (c_1 t + c_2)^{1/[2(\sigma+1)]}$. Такому краевому условию (1.2) удовлетворяет решение (2.8). Решая задачу Коши (2.9), (2.14) при $v_1 = -\sigma$, получаем, что в данном случае

$$v(\xi) = \frac{2(\sigma + 1)^2 \sigma \omega}{(\nu + 1)\sigma + 2} \left(e^{\frac{-(\nu+1)\sigma+2\xi}{2(\sigma+1)^2}\omega} - 1 \right),$$

следовательно, (2.8) примет вид

$$u(t, \rho) = -\frac{\sigma c_1 \rho^{-\frac{(\nu-1)\sigma}{2(\sigma+1)}}}{2[(\nu + 1)\sigma + 2](c_1 t + c_2)} \left[\rho^{\frac{(\nu+1)\sigma+2}{\sigma+1}} - (c_1 t + c_2)^{\frac{(\nu+1)\sigma+2}{2(\sigma+1)^2}} \right].$$

При выполнении условий $c_1 > 0, c_2 > 0$ решение **Е** является тепловой волной на множестве $t \geq 0, 0 < \rho \leq (c_1 t + c_2)^{1/(2\sigma+2)}$.

Можно видеть, что при $\nu = 1$ решения из пп. **Д** и **Е** совпадают. Отметим также, что представленные выше точные решения уравнения (1.1) при $\nu = 0$ согласуются с известными формулами из [21, с. 216].

3. Исследование обыкновенных дифференциальных уравнений

Все построенные в разд. 2 точные решения уравнения (1.1) типа тепловой волны (т. е. удовлетворяющие условию (1.2)) содержат в качестве множителей решения различных задач Коши для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которые за вычетом нескольких частных случаев, не удается проинтегрировать в квадратурах. В этой связи в настоящем разделе проводится качественный анализ данных уравнений.

С единых позиций (2.9), (2.11) и (2.13) можно рассматривать в виде

$$v v'' + \frac{(v')^2}{\sigma} + (K_1 v + 1) v' + K_2 v^2 + K_3 v = 0. \tag{3.1}$$

Здесь $K_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, $K_2 \geq 0$ и, кроме того, $K_1 K_2 \neq 0$ (см. (2.9), (2.11)) или $K_1^2 + K_2^2 = 0$ (см. (2.13)).

Поскольку уравнение (3.1) автономное, для удобства дальнейшего исследования перейдем к рассмотрению фазовой плоскости (v, v') .

3.1. Переход к динамической системе. Уравнению (3.1) отвечает динамическая система

$$\frac{dv}{d\xi} = w, \quad \frac{dw}{d\xi} = -\frac{w^2/\sigma + (K_1 v + 1)w + K_2 v^2 + K_3 v}{v}. \quad (3.2)$$

Отметим, что в точках вида $(0, w)$, представляющих интерес с точки зрения целей исследований (см. условия (2.14)), правая часть второго уравнения (3.2) не определена. Представим систему (3.2) в виде

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{P(v, w)}{R(v, w)}, \quad \frac{dw}{d\xi} = \frac{Q(v, w)}{R(v, w)},$$

где $P(v, w) = vw$, $Q(v, w) = -w^2/\sigma - (K_1 v + 1)w - K_2 v^2 - K_3 v$, $R(v, w) = v$, и изменим ее параметризацию, полагая $d\xi = R(v, w) d\zeta$. В результате получим

$$\frac{dv}{d\zeta} = P(v, w), \quad \frac{dw}{d\zeta} = Q(v, w), \quad (3.3)$$

доопределив тем самым (3.2) в точках $(0, w)$ по непрерывности. Очевидно, что во всякой части области $G \subset \mathbb{R}^2$, в которой $v \neq 0$, траектории систем (3.2) и (3.3) совпадают как точечные множества, однако параметры на них различны. При этом там, где $v > 0$, направления по ζ и ξ совпадают, а там, где $v < 0$, они противоположны друг другу. Точки, в которых $v = 0$, естественно выделять и считать не принадлежащими траекториям системы (3.3) [22, гл. 1, § 8].

Таким образом, перешли от уравнения к (3.1) к динамической системе (3.3), построение фазового портрета которой позволит, в свою очередь, описать поведение решений (3.1).

3.2. Характер особых точек. Начнем качественное исследование с анализа особых точек. Найдем и исследуем состояния равновесия (особые точки) системы (3.3). Из условия $P(v, w) = Q(v, w) = 0$ имеем следующее:

- 1) три состояния равновесия $(0, -\sigma)$, $(0, 0)$, $(-K_3/K_2, 0)$, когда $K_1 K_2 K_3 \neq 0$;
- 2) два состояния равновесия $(0, -\sigma)$ и $(0, 0)$, когда $K_1 = K_2 = 0$, $K_3 \neq 0$ или $K_1 K_2 \neq 0$, $K_3 = 0$;
- 3) одно состояние равновесия $(0, -\sigma)$, когда все $K_i = 0$.

Далее будем использовать следующие обозначения:

$$M(v, w) := \begin{vmatrix} P_v & P_w \\ Q_v & Q_w \end{vmatrix}, \quad \Delta(v, w) := \det M, \quad \delta(v, w) := P_v + Q_w.$$

В рассматриваемом случае

$$\Delta(v, w) = -\frac{2w^2}{\sigma} - w + 2K_2 v^2 + K_3 v, \quad \delta(v, w) = \frac{(\sigma - 2)w}{\sigma} - K_1 v - 1.$$

Исследуем характер каждой особой точки отдельно.

А. Рассмотрим точку $(0, -\sigma)$. Для нее $\Delta|_{v=0, w=-\sigma} = -\sigma \neq 0$, следовательно, это простое состояние равновесия. Корнями характеристического уравнения

$$\det(M - \lambda E)|_{v=0, w=-\sigma} = (\lambda + \sigma)(\lambda - 1) = 0$$

являются $\lambda_1 = -\sigma$ и $\lambda_2 = 1$. Поскольку здесь $\Delta < 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_1\lambda_2 < 0$, точка $(0, -\sigma)$ имеет топологический тип седло.

В. Рассмотрим точку $(0, 0)$. Для нее $\Delta|_{v=w=0} = 0$, следовательно, состояние равновесия является сложным. Для его исследования будем использовать технику, описанную в [22, гл. 4]. Здесь $\delta|_{v=w=0} = -1 \neq 0$, а уравнение, получающееся из системы (3.3), можно, опуская дополнительные преобразования, представить в виде

$$P^*(v, w) dw - [kw + Q^*(v, w)] dv = 0,$$

где $P^*(v, w) = vw$, $Q^*(v, w) = -w^2/\sigma - K_1vw - K_2v^2 - K_3v$, $k = -1$.

Рассмотрим отдельно случаи $K_3 \neq 0$ и $K_3 = 0$.

В1. Пусть $K_3 \neq 0$. Представим решение уравнения $kw + Q^*(v, w) = 0$ в виде ряда по степеням v , который подставим в $P^*(v, w)$. Получим

$$w = \varphi(v) = -K_3v + \dots, \quad \psi(v) = P^*|_{w=\varphi(v)} = -K_3v^2 + \dots$$

Поскольку младшая степень v в разложении $\psi(v)$ равна двум (четная), состояние равновесия $(0, 0)$ является седло-узлом с одним узловым сектором и двумя седловыми. Следует отметить, что в данном случае, поскольку $k < 0$, узловой сектор устойчив. Кроме того, если $K_3 < 0$, то траектории узлового сектора стремятся к $(0, 0)$ при $\zeta \rightarrow -\infty$ слева от оси Ow , а если $K_3 > 0$, то справа от оси Ow при $\zeta \rightarrow +\infty$.

В2. Пусть $K_3 = 0$. Тогда имеют место следующие разложения:

$$w = \varphi(v) = lv^2 + \dots, \quad \psi(v) = P^*|_{w=\varphi(v)} = lv^3 + \dots,$$

где $l = (\sigma - 1)K_1^2/8 - K_2/2$. Младшая степень v в разложении $\psi(v)$ равна трем (нечетная), поэтому при $l < 0$ состояние равновесия $(0, 0)$ является сложным узлом (устойчивым, так как $k < 0$), а при $l > 0$ — сложным седлом.

С. Рассмотрим точку $(-K_3/K_2, 0)$. Для нее $\Delta|_{v=-K_3/K_2, w=0} = K_3^2/K_2 \neq 0$, следовательно, это простое состояние равновесия. Представим характеристическое уравнение

$$\det(M - \lambda E)|_{v=-K_3/K_2, w=0} = K_2\lambda^2 - (K_1K_3 - K_2)\lambda + K_3^2 = 0$$

в общем виде $\lambda^2 - 2p\lambda + q = 0$, где $p = (K_1K_3 - K_2)/(2K_2)$, $q = K_3^2/K_2$. Тогда его корнями являются $\lambda_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - q}$. В зависимости от значений параметров p и q состояние равновесия $(-K_3/K_2, 0)$ может иметь следующий качественный характер: фокус (устойчивый при $-\sqrt{q} < p < 0$, неустойчивый при $0 < p < \sqrt{q}$); узел (устойчивый при $p < -\sqrt{q}$, неустойчивый при $p > \sqrt{q}$). Поскольку $\lambda_1\lambda_2 = q > 0$, седлом исследуемая точка являться не может.

Случаи $p = 0$ и $p = \pm\sqrt{q}$ (для линеаризованной системы центр и вырожденный узел соответственно) ввиду структурной неустойчивости топологических типов этих точек нуждаются в дополнительном исследовании, которое выходит за рамки данной статьи.

4. Исследование тепловых волн с логарифмическим фронтом

В настоящем разделе в качестве наглядной иллюстрации эффективности примененного подхода, пользуясь полученными выше результатами, детально

исследуем решения вида (2.12), задающие тепловые волны с логарифмическим законом движения теплового фронта (с логарифмическим фронтом).

4.1. Теорема существования и единственности. Рассмотрим решения типа тепловой волны с логарифмическим фронтом $\rho = \ln(c_1 t + c_2)^{\alpha\omega}$, получающиеся из (2.12). Напомним, что в данном случае $v(\xi)$ определяется как решение задачи Коши

$$\begin{aligned} vv'' + \frac{(v')^2}{\sigma} + v' + \frac{v}{\omega} &= 0, \\ v|_{\xi=0} &= 0, \quad v'|_{\xi=0} = v_1 \in \{-\sigma, 0\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Не ограничивая общность рассмотрения, можно принять $\omega > 0$, поскольку решения задачи (4.1) обладают симметрией $v(\xi, -\omega) = -v(-\xi, \omega)$, т. е. изменение знака параметра ω равносильно повороту графиков решений на угол 180° относительно начала координат O .

Как это часто случается при исследовании сложных нелинейных уравнений и систем, авторам не удалось, используя известные аналитические методы, найти конечный вид решений (отличных от тривиального) для задачи (4.1). Тем не менее можно описать поведения этих решений. Для этого воспользуемся результатами разд. 3. Аналогично тому, как это было сделано выше, переходим к динамической системе

$$\frac{dv}{d\xi} = w, \quad \frac{dw}{d\xi} = -\frac{w^2/\sigma + w + v/\omega}{v}. \quad (4.2)$$

Доопределив (4.2) путем замены $d\xi = v d\zeta$ по непрерывности в точках $(0, w)$, получаем систему

$$\frac{dv}{d\zeta} = vw, \quad \frac{dw}{d\zeta} = -\frac{w^2}{\sigma} - w - \frac{v}{\omega}, \quad (4.3)$$

для которой $(0, -\sigma)$ — седло, а $(0, 0)$ — седло-узел (см. п. 3.2, В1). Обе особые точки обладают вертикальными полусепаратрисами, лежащими на оси Ow . Также имеются три невертикальные полусепаратрисы s_1 , s_2 и s_3 (рис. 1(a)), причем s_1 и s_2 стремятся к $(0, -\sigma)$ при $\zeta \rightarrow -0$ с наклоном $1/[(\sigma + 2)\omega]$, а s_3 стремится к $(0, 0)$ при $\zeta \rightarrow +0$ с наклоном $-1/\omega$.

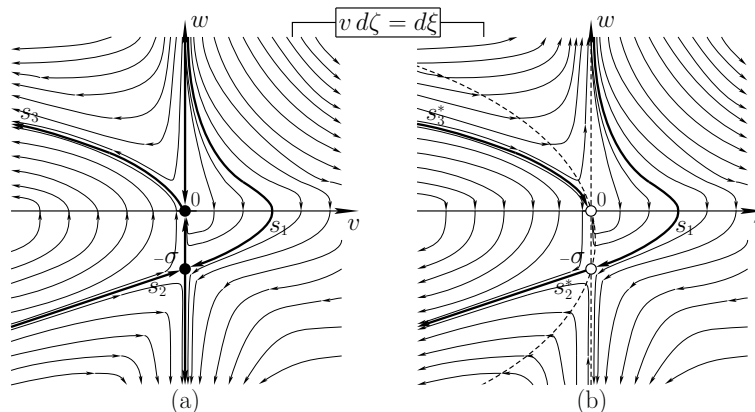


Рис. 1. Фазовый портрет: (а) системы (4.3); (б) системы (4.2)

Обратный переход к системе (4.2) (исходной параметризации) исключает все точки вида $(0, w)$ и меняет направления траекторий, расположенных в левой полуплоскости ($v < 0$) на противоположные. В частности, s_2 преобразуется в траекторию s_2^* , которая стремится к $(0, -\sigma)$ при $\xi \rightarrow +0$ с наклоном $1/[(\sigma + 2)\omega]$, а s_3 переходит в траекторию s_3^* , стремящуюся к $(0, 0)$ при $\xi \rightarrow -0$ с наклоном $-1/\omega$ (рис. 1(b)).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. На фазовом портрете системы (4.2) $s_1 \cup s_2^*$ и s_3^* — единственные траектории, стремящиеся при $\xi \rightarrow 0$ к точкам $(0, -\sigma)$ и $(0, 0)$, следовательно, они соответствуют решениям задачи (4.1).

Таким образом, по виду фазовых траекторий $s_1 \cup s_2^*$ и s_3^* можно описать поведение решений задачи Коши (4.1): $s_1 \cup s_2^*$ соответствует решению при $v_1 = -\sigma$ (рис. 2(a)); s_3^* соответствует нетривиальному решению при $v_1 = 0$ (рис. 2(b)).

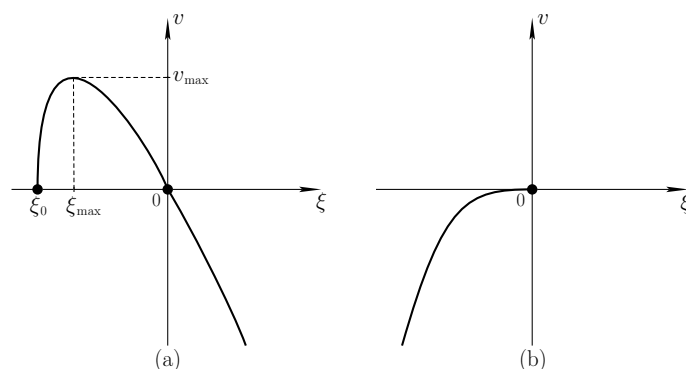


Рис. 2. График решения начальной задачи (4.1): (a) при $v_1 = -\sigma$; (b) при $v_1 = 0$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Решение $v(\xi)$ задачи (4.1) при $v_1 = -\sigma$ не может быть продолжено левее точки $\xi_0 < 0$, причем $v|_{\xi=\xi_0} = 0$, $\lim_{\xi \rightarrow \xi_0+0} v'(\xi) = +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Нетривиальное решение $v(\xi)$ задачи (4.1) при $v_1 = 0$ не может быть продолжено правее точки 0, причем $v|_{\xi=0} = 0$, $\lim_{\xi \rightarrow -0} v'(\xi) = 0$.

Из приведенных в данном разделе рассуждений вытекает справедливость утверждения следующей теоремы.

Теорема. Задача Коши (4.1) в случае

- (a) $v_1 = -\sigma$ имеет единственное решение $v(\xi) \in C_{[\xi_0, +\infty)} \cap C_{(\xi_0, +\infty)}^2$;
- (b) $v_1 = 0$ имеет единственное нетривиальное решение $v(\xi) \in C_{(-\infty, 0]} \cap C_{(-\infty, 0)}^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В [23] показано, что решение задачи (4.1) при $v_1 = -\sigma$ обладает свойством аналитичности в некоторой окрестности точки $\xi = 0$.

4.2. Интервальные оценки решений. Получим теперь некоторые количественные оценки решений задачи (4.1).

Расположение рассматриваемых фазовых траекторий относительно линии, задаваемой уравнением $w^2/\sigma + w + v/\omega = 0$, и координатной оси Ow (они изображены на рис. 1(b) пунктиром) таково, что из второго уравнения системы (4.2) следует неравенство $dw/d\xi < 0$, а значит, $d^2v/d\xi^2 < 0$. Таким образом, решения задачи (4.1) являются вогнутыми (выпуклыми вверх) функциями. Отсюда,

в частности, следует, что глобальный максимум решения задачи (4.1) при $v_1 = 0$ равен $v = 0$ и достигается в точке $\xi = 0$.

Для характерных точек ξ_0 , ξ_{\max} и значения v_{\max} решения задачи (4.1) при $v_1 = -\sigma$ справедливы интервальные оценки.

Лемма 3. *Справедливы следующие неравенства:*

$$\begin{aligned} -[\sqrt{\sigma(\sigma+1)} + \sigma + 1]\omega \leq \xi_0 \leq -\sigma\omega, \\ -(\sigma+1)\omega \leq \xi_{\max} \leq -\sigma\omega, \quad \frac{\sigma^2\omega}{2} \leq v_{\max} \leq \frac{\sigma(\sigma+1)\omega}{2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Доказательство. Осуществим аффинное преобразование

$$l: (\xi, v) \rightarrow ((\sigma+1)\omega\xi, \sigma(\sigma+1)\omega v),$$

в результате которого задача Коши (4.1) принимает вид

$$\begin{aligned} vv'' + \frac{(v')^2}{\sigma} + \frac{v'}{\sigma} + \frac{(\sigma+1)v}{\sigma} = 0, \\ v|_{\xi=0} = 0, \quad v'|_{\xi=0} = -1, \end{aligned} \quad (4.5)$$

и получим, анализируя (4.5), искомые неравенства.

При $\xi \in [\xi_{\max}, 0]$ функция v убывает и $-1 \leq v' \leq 0$. С учетом этой оценки из (4.5) следует, что $v'' \geq -(\sigma+1)/\sigma$, причем в точке $\xi = \xi_{\max}$ достигается равенство: $v''|_{\xi=\xi_{\max}} = -(\sigma+1)/\sigma$. Последовательно интегрируя оценку для v'' по промежутку $[\xi, 0]$, получаем

$$v' \leq -\frac{(\sigma+1)\xi}{\sigma} - 1, \quad v \geq -\frac{(\sigma+1)\xi^2}{2\sigma} - \xi, \quad \xi \in [\xi_{\max}, 0].$$

Из первого неравенства при $\xi = \xi_{\max}$ вытекает оценка сверху $\xi_{\max} \leq -\sigma/(\sigma+1)$. Правая часть второго неравенства в точке $\xi = -\sigma/(\sigma+1) \in [\xi_{\max}, 0]$ достигает своего максимума, для которого выполняется неравенство $v|_{\xi=-\sigma/(\sigma+1)} \geq \sigma/[2(\sigma+1)]$. Так как $v|_{\xi=-\sigma/(\sigma+1)} \leq v_{\max}$, окончательно имеем, что справедлива оценка снизу $v_{\max} \geq \sigma/[2(\sigma+1)]$.

Исследуя уравнение (4.5), можно показать, что $v'' \leq -1$ при $\xi \in (\xi_0, 0]$. Далее, последовательно интегрируя по промежутку $[\xi, 0]$, получим

$$v' \geq -\xi - 1, \quad v \leq -\frac{\xi^2}{2} - \xi, \quad \xi \in [\xi_{\max}, 0].$$

Из этих неравенств следуют оценки $\xi_{\max} \geq -1$ и $v_{\max} \leq 1/2$ соответственно.

При $\xi \in [\xi_0, \xi_{\max}]$ функция v возрастает, т. е. $v' \geq 0$. С учетом этого неравенства из уравнения (4.5) вытекает, что $v'' \leq -(\sigma+1)/\sigma$. Его последовательное двукратное интегрирование по промежутку $[\xi, \xi_{\max}]$ дает

$$v_{\max} - v \geq \frac{(\sigma+1)(\xi_{\max} - \xi)^2}{2\sigma}, \quad \xi \in [\xi_0, \xi_{\max}].$$

Так как $\xi_0 < \xi_{\max}$ и $v_{\max} \leq 1/2$, при $\xi = \xi_0$ последнее неравенство принимает вид $0 < \xi_{\max} - \xi_0 \leq \sqrt{\sigma/(\sigma+1)}$, откуда следует, во-первых, что $\xi_0 \rightarrow \xi_{\max}$ при $\sigma \rightarrow 0$, во-вторых, что $-\sqrt{\sigma/(\sigma+1)} - 1 \leq \xi_0 \leq -\sigma/(\sigma+1)$.

Применяя преобразование l^{-1} к ξ_0 , ξ_{\max} и v_{\max} , получаем оценки (4.4). \square

4.3. Асимптотическое поведение решений. Для нахождения асимптотик и разложений решений задачи Коши (4.1) воспользуемся приемами степенной геометрии [13]. Часть наиболее громоздких выкладок по определению критических чисел, носителей разложений решений укороченных уравнений, которые аналогичны [14], в дальнейшем изложении опускается.

Введем обозначение

$$f(\xi, v) := vv'' + \frac{(v')^2}{\sigma} + v' + \frac{v}{\omega} = 0. \tag{4.6}$$

Многоугольник Ньютона $\Gamma(f)$ и нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(i)}$ обобщенных граней $\Gamma_j^{(i)}$, $i = 0, 1$, $j = 1, 2, 3$, уравнения (4.6) изображены на рис. 3(a) и 3(b) соответственно.

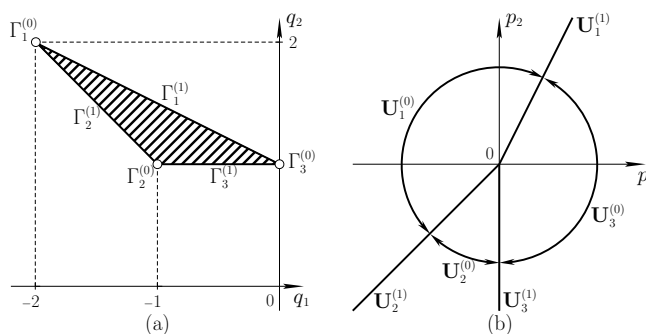


Рис. 3. Многоугольник Ньютона (a) и нормальные конусы (b) уравнения (4.6)

A. Вершине $\Gamma_1^{(0)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(0)}(\xi, v) := vv'' + \frac{(v')^2}{\sigma} = 0 \tag{4.7}$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_1^{(0)} = \{(p_1 < 0, p_2/p_1 < 1) \cup (p_1 > 0, p_2/p_1 > 2)\}$. Подставляя в уравнение (4.7) $v(\xi) = c_r \xi^r$, где $\mathbb{R} \ni c_r \neq 0$, получаем $r_1 = 0$, $r_2 = \sigma/(\sigma + 1)$. Таким образом, для уравнения (4.7) имеются два степенных решения $v_1(\xi) = c_0$, $v_2(\xi) = c_{\frac{\sigma}{\sigma+1}} \xi^{\frac{\sigma}{\sigma+1}}$. Поскольку из векторов $\pm(1, r_i)$ в $\mathbf{U}_1^{(0)}$ попадают только $-(1, r_i)$, то $\xi \rightarrow 0$. Отметим, что $v_1(\xi)$ имеет единственное критическое число $k = 1$, для которого выполнено условие совместности [14], а $v_2(\xi)$ критических чисел не имеет.

Носитель разложения решения $v_1(\xi)$ есть $\mathbf{K} = \mathbb{N}$, следовательно,

$$v_1(\xi) = c_0 + \sum_{s=1}^{+\infty} c_s \xi^s,$$

где $c_s \in \mathbb{R}$, причем c_1 выбирается произвольно, а все остальные коэффициенты c_{s+1} однозначно определяются через c_0 и c_1 .

Носитель разложения решения $v_2(\xi)$ есть $\mathbf{K} = \{(n + 1)\sigma + m + 2n\}/(\sigma + 1)$, $\mathbb{Z} \ni m, n \geq 0, m + n > 0\}$, следовательно,

$$v_2(\xi) = c_{\frac{\sigma}{\sigma+1}} \xi^{\frac{\sigma}{\sigma+1}} + \sum_{s \in \mathbf{K}} c_s \xi^s,$$

где коэффициенты $c_s \in \mathbb{R}$ однозначно определяются через $c_{\sigma/(\sigma+1)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Поскольку уравнение (4.6) обладает решениями, имеющими разложения $v_2(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$, начальная задача с условиями $v|_{\xi=0} = 0$, $\lim_{\xi \rightarrow 0} v' = \pm\infty$ разрешима. Этот случай согласуется с условием (1.2), однако в рамках настоящей статьи не рассматривается.

Вершины $\Gamma_2^{(0)}$ и $\Gamma_3^{(0)}$ не имеют подходящих степенных решений. В первом случае укороченное уравнение не дает степенных решений с показателями, лежащими в конусе $\mathbf{U}_2^{(0)}$, во втором является алгебраическим.

В. Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(1)}(\xi, v) := vv'' + \frac{(v')^2}{\sigma} + \frac{v}{\omega} = 0 \quad (4.8)$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_1^{(1)} = \{\lambda(1, 2), \mathbb{R} \ni \lambda > 0\}$. В данном случае $\xi \rightarrow \infty$ и у уравнения (4.8) имеется степенное решение вида $v_3(\xi) = c_2\xi^2$, где $\mathbb{R} \ni c_2 \neq 0$. Подставляя его в (4.8), находим $c_2 = -\sigma/[2(\sigma + 2)\omega]$.

Отметим, что для $v_3(\xi)$ имеются два критических числа $k_1 = -4/\sigma$, $k_2 = 1$. Носитель разложения решения $v_3(\xi)$ есть $\mathbf{K} = \{2 - m, m \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, что $k_2 \in \mathbf{K}$, а k_1 попадает в \mathbf{K} только при $\sigma = 4/l$, где $l \in \mathbb{N}$, и тогда

$$v_3(\xi) = c_2\xi^2 + \sum_{s=-1}^{+\infty} c_{-s}\xi^{-s},$$

где $c_{-s} := c_{-s}(\ln \xi)$, причем c_1 и c_{k_1} содержат произвольную постоянную, а все остальные c_{-s} определены однозначно.

Если $\sigma \neq 4/l$, то $\mathbf{K}(k_1) = \{2 - m - 2(\sigma + 2)n/\sigma, \mathbb{Z} \ni m, n \geq 0, m + n > 0\}$ и тогда разложение решения $v_3(\xi)$ имеет вид

$$v_3(\xi) = c_2\xi^2 + \sum_{s \in \mathbf{K}(k_1)} c_{-s}\xi^{-s},$$

где $c_{-s} := c_{-s}(\ln \xi)$, причем коэффициенты c_1 и c_{k_1} содержат произвольную постоянную, а все остальные c_{-s} определены однозначно.

С. Ребру $\Gamma_2^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{f}_2^{(1)}(\xi, v) := vv'' + \frac{(v')^2}{\sigma} + v' = 0 \quad (4.9)$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_2^{(1)} = \{-\lambda(1, 1), \mathbb{R} \ni \lambda > 0\}$. В данном случае $\xi \rightarrow 0$ и у уравнения (4.9) имеется степенное решение вида $v_4(\xi) = c_1\xi$, где $\mathbb{R} \ni c_1 \neq 0$. Подставляя его в (4.9), находим $c_1 = -\sigma$.

Отметим, что $v_4(\xi)$ не имеет критических чисел. Носитель разложения решения $v_4(\xi)$ есть $\mathbf{K} = \{m + 1, m \in \mathbb{N}\}$, следовательно,

$$v_4(\xi) = c_1\xi + \sum_{s=2}^{+\infty} c_s\xi^s,$$

где коэффициенты $c_s \in \mathbb{R}$ однозначно определяются через $c_1 = -\sigma$.

Д. Ребру $\Gamma_3^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{f}_3^{(1)}(\xi, v) := v' + \frac{v}{\omega} = 0 \quad (4.10)$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_3^{(1)} = \{-\lambda(0, 1), \mathbb{R} \ni \lambda > 0\}$. Уравнение (4.10) не имеет подходящих степенных решений, однако обладает при $\xi \rightarrow +\infty$ нестепенным [14] решением вида $v_5(\xi) = ce^{-\xi/\omega}$, где $\mathbb{R} \ni c \neq 0$.

Таким образом, в ходе проведенного анализа установлена истинность нижеизложенного утверждения.

Лемма 4. Решения задачи (4.1) обладают следующими свойствами.

1. При $v_1 = -\sigma$ справедливы асимптотические соотношения

$$v(\xi) = -\sigma\xi + o(\xi), \quad \xi \rightarrow 0; \quad v(\xi) = -\frac{\sigma\xi^2}{2(\sigma+2)\omega} + o(\xi^2), \quad \xi \rightarrow +\infty.$$

2. При $v_1 = 0$ справедливы асимптотические соотношения

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v(\xi) = o(\xi^n), \quad \xi \rightarrow -0; \quad v(\xi) = -\frac{\sigma\xi^2}{2(\sigma+2)\omega} + o(\xi^2), \quad \xi \rightarrow -\infty.$$

4.4. Вид тепловых волн. С использованием полученных результатов можно более детально исследовать поведение решений типа тепловой волны с логарифмическим фронтом.

Пусть для определенности тепловая волна движется из начала координат в первый октант, т. е. для функции, определяющей закон движения фронта тепловой волны, справедливы соотношения $\mathcal{F}(t) = \ln(c_1 t + c_2)^{\alpha\omega}$, $\mathcal{F}|_{t=0} = 0$, $\mathcal{F}'|_{t=0} \geq 0$, откуда $c_2 = 1$, $\alpha\omega c_1 > 0$. Тогда из (2.12) имеем

$$u(t, \rho) = \frac{c_1 \alpha^2 \omega v(\xi)}{c_1 t + 1}, \tag{4.11}$$

где $\xi = \rho/\alpha - \omega \ln(c_1 t + 1)$. Так как, не теряя общности рассмотрения (см. п. 4.1), можно принять $\omega > 0$, исследование свойств тепловой волны сводится к рассмотрению двух возможных случаев.

I. Пусть $\omega > 0$, $\alpha > 0$, $c_1 > 0$. Очевидно, что в данном случае $u(t, \rho) \geq 0$ тогда и только тогда, когда $v(\xi) \geq 0$, в связи с чем рассмотрим неотрицательную часть решения задачи (4.1) при $v_1 = -\sigma$ (см. рис. 2(a)). Из (4.11) и рассуждений п. 4.1 имеем, что в данном случае область распространения тепловой волны в любой момент времени определяется неравенствами $\ln(c_1 t + 1)^{\alpha\omega} + \alpha\xi_0 \leq \rho \leq \ln(c_1 t + 1)^{\alpha\omega}$, т. е. волна имеет задний фронт $\rho = \ln(c_1 t + 1)^{\alpha\omega} + \alpha\xi_0$, где для ξ_0 справедливы оценки (4.4). При этом из (4.11) следует, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, \rho) = 0$ для всех ρ .

II. Пусть $\omega > 0$, $\alpha < 0$, $c_1 < 0$. Тогда $0 \leq t < -1/c_1$, причем $t = -1/c_1$ — вертикальная асимптота фронта тепловой волны. Очевидно, что в данном случае $u(t, \rho) \geq 0$ тогда и только тогда, когда $v(\xi) \leq 0$, в связи с чем возможны следующие подслучаи.

II.1. Пусть $v_1 = -\sigma$, $v(\xi) \leq 0$ (см. рис. 2(a)). Из (4.11) следует, что область, в которой задана тепловая волна, определяется неравенством $\rho \leq \ln(c_1 t + 1)^{\alpha\omega}$. Нагрев рассматриваемого полупространства до сколь угодно большой температуры осуществляется за конечное время, при этом не происходит локализации теплового воздействия. Подобная конфигурация соответствует HS-режиму с обострением [10, с. 69], время обострения $0 < -1/c_1 < +\infty$.

II.2. Пусть $v_1 = 0$. Рассмотрим нетривиальное решение $v(\xi)$ задачи Коши (4.1) при нулевых значениях в условиях Коши (см. рис. 2(b)). Поскольку здесь $\xi \leq 0$, из (4.11) имеем область $\rho \geq \ln(c_1 t + 1)^{\alpha\omega}$ распространения тепловой волны. Такая тепловая волна, очевидно, не может быть порождена каким-либо краевым режимом при $\rho = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
2. Vazquez J. L. The porous medium equation: Mathematical theory. Oxford: Clarendon Press, 2007.

3. Зельдович Я. Б., Компанеев А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–71.
4. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972.
5. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
6. Ваганова Н. А. Построение новых классов решений нелинейного уравнения фильтрации с помощью специальных согласованных рядов // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9, № 2. С. 10–20.
7. Kazakov A. L., Spevak L. F. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form // Appl. Math. Modelling. 2013. V. 37, N 10–11. P. 6918–6928.
8. Казаков А. Л., Лемперт А. А. О существовании и единственности краевой задачи для параболического уравнения нестационарной фильтрации // Прикл. механика и техн. физика. 2013. Т. 54, № 2. С. 97–105.
9. Казаков А. Л., Кузнецов П. А. Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности в случае двух пространственных переменных // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 1. С. 46–54.
10. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
11. Инфельд Э., Роуланс Дж. Нелинейные волны, солитоны и хаос. М.: Физматлит, 2006.
12. Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов В. К. Математическое моделирование процессов теплопереноса. Эволюция диссипативных структур. М.: Наука, 1987.
13. Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998.
14. Брюно А. Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи мат. наук. 2004. Т. 59, № 3. С. 31–80.
15. Демиденко Г. В. Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1064–1076.
16. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
17. Demidenko G. V., Upsenskii S. V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative. New York; Basel: Marcel Dekker, 2003.
18. Кожанов А. И. Задача с кривой производной для некоторых псевдопараболических и близких к ним уравнений // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1335–1346.
19. Olver P. J. Direct reduction and differential constraints // Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci. 1994. V. 444. P. 509–523.
20. Kudryashov N. A., Sinelshchikov D. I. On the integrability conditions for a family of Liénard-type equations // Regul. Chaotic Dyn. 2016. V. 21, N 5. P. 548–555.
21. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of nonlinear partial differential equations. Boca Raton; London; New York: Chapman & Hall/CRC Press, 2012.
22. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990.
23. Казаков А. Л., Орлов Св. С. О некоторых точных решениях нелинейного уравнения теплопроводности // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 102–113.

Статья поступила 14 июля 2017 г.

Казаков Александр Леонидович, Орлов Святослав Сергеевич
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
kazakov@icc.ru, s.orlov@icc.ru

Орлов Сергей Сергеевич
Иркутский гос. университет,
ул. Карла Маркса, 1, Иркутск 664003
orlov_sergey@inbox.ru