Н. Х. Касымов, Р. Н. Дадажанов, Негативные плотные линейные порядки, *Сиб. матем. журн.*, 2017, том 58, номер 6, 1306–1331

DOI: 10.17377/smzh.2017.58.611

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2017. Том 58, № 6

УДК 510.5

НЕГАТИВНЫЕ ПЛОТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПОРЯДКИ

Н. Х. Касымов, Р. Н. Дадажанов

Аннотация. Для плотных линейных порядков установлена их негативная представимость над всякой бесконечной негативной эквивалентностью, а также равномерно вычислимая отделимость вычислимыми щелями и продуктивность множества вычислимых сечений их негативных представлений. Построена бесконечно убывающая цепь степеней негативной представимости линейных порядков и доказана вычислимость локально вычислимых нумераций поля рациональных чисел.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.611

Ключевые слова: нумерованные системы и морфизмы, негативные и позитивные линейные порядки, вычислимые последовательности и сечения, продуктивность вычислимых сечений, вычислимое пополнение, негативное представление поля рациональных чисел.

Базовые понятия, используемые в работе, содержатся в [1–7].

1. Предварительные сведения

Понятие линейно упорядоченного множества (далее линейного порядка), являющееся фундаментальным математическим понятием, играет также важную роль в теории абстрактной вычислимости. Линейные порядки вместе с их вычислимыми представлениями являются классическими объектами исследования в теории вычислимых моделей. Имеется по крайней мере четыре причины, мотивационно обуславливающие целесообразность изучения негативных моделей вообще и негативных линейных порядков в частности.

Во-первых, естественные расширения класса вычислимых линейных порядков — позитивные и алгоритмически двойственные к ним, т. е. негативные, также образуют важные классы линейных порядков хотя бы потому, что вычислимость порядка равносильна его одновременной позитивности и негативности. Однако больший приоритет в исследовании нумерованных структур отдается позитивным моделям, так как позитивные модели естественным образом возникают в различных областях математики и теоретической информатики (классический пример — вычислимо перечислимо определенные свободные системы эффективно аксиоматизируемых квазимногообразий [5]). Априори могло казаться, что ситуация при сравнении понятий позитивных и негативных линейных порядков будет вполне симметричной. Тем не менее с алгоритмической точки зрения свойства позитивных и негативных порядков оказались не просто различными, но и в определенном смысле противоположными, что подтверждается результатами данной статьи. Так, например, еще в 1970 г. в [8] был

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда «Наследие академика Т. Н. Кары-Ниязова».

указан позитивно представимый линейный порядок, не имеющий вычислимого представления, тогда как почти очевидно, что всякий негативно представимый линейный порядок имеет вычислимое представление.

Во-вторых, особенно наглядно и выпукло различия между алгоритмическими свойствами позитивных и негативных линейных порядков проявляются в рамках понятия их представимости над заданными эквивалентностями. Так, существуют позитивные эквивалентности, над которыми позитивно не представимы никакие линейные порядки. Если же эквивалентность негативна и обладает бесконечным числом смежных классов, то над ней как минимум негативно представимы все типы изоморфизмов счетных плотных линейных порядков (и не только они!). Более того, существует позитивное представление естественного порядка рациональных чисел, в котором множество вычислимых сечений пусто [9]. Множество вычислимых сечений любого негативного представления плотного линейного порядка оказалось не просто труднообозримым, но и эффективно неисчерпаемым (т. е. продуктивным в обычном алгоритмическом смысле). В этом же русле, связанном с представимостью порядка над эквивалентностью, лежит и ряд исследований по структурам степеней представимости моделей над эквивалентностями. В [10] получены некоторые принципиальные результаты о строении структуры степеней позитивной представимости линейных порядков. Ответы на некоторые аналогичные вопросы для степеней негативной представимости оказались существенно иными и приводятся в настоящей статье. При этом в настоящее время вопросов, в том числе принципиальных, касающихся структуры степеней негативной представимости линейных порядков, больше, чем ответов. Например, существуют ли две несравнимые бесконечные степени негативной представимости линейных порядков? С точки зрения теоретической информатики именно понятие степени представимости может быть одним из возможных уточнений понятия реализуемости моделей данных над заданными эффективными универсумами. Отметим, что с точки зрения представимости алгебр над эквивалентностями класс негативных систем также оказался существенно богаче класса позитивных. К примеру, над любой негативной эквивалентностью представима конгруэнц-простая конечно порожденная алгебра [11], в то время как существуют позитивные эквивалентности, над которыми представимы лишь тривиальнейшие алгебры [12] (т. е. все сигнатурные операции которых действуют на основном множестве как проектирующие или константы).

В-третьих, мотивация изучения данного понятия связана с эффективной отделимостью как основой распознавания при функционировании сложных систем (заданных своими представлениями/нумерациями с теми или иными ограничениями алгебраическо-алгоритмического характера). Вычислимая отделимость любой пары смежных классов негативной эквивалентности впервые была отмечена академиком А. И. Мальцевым в [6]. В обзорной работе [12], в которой описаны основы теории вычислимо отделимых универсальных алгебр и их приложения в теоретической информатике, центральным результатом является теорема о равносильности свойств вычислимой отделимости нумерованной алгебры и ее аппроксимируемости негативными алгебрами, позволяющая развить структурную теорию таких алгебр и устанавливающая фундаментальную роль негативных алгебр в этой теории. Заметим, что эта теорема, сформулированная для универсальных алгебр, верна и для моделей [13]: нумерованная модель вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными моделями. Эффекты негативности часто возникают даже при довольно общих предположениях на свойства отделимости [14], что дает дополнительное обоснование целесообразности систематического изучения негативных систем наряду с позитивными.

Наконец, в-четвертых. Классический конструктивный анализ при рассмотрении вычислимых вещественных чисел апеллирует к множеству рациональных чисел как к базисному конструктивному универсуму вместе с его естественным порядком (см., например, [7]). Вопрос о возможности существования более общих алгоритмических представлений этого базиса, в рамках которых можно получить основные факты конструктивного анализа, также приводит к негативным линейным порядкам, так как для позитивных плотных порядков (как отмечено выше) возможны ситуации пустых семейств вычислимых сечений. Более того, бо́льшая часть классических методов построения вычислимых последовательностей в области рациональных чисел естественным образом переносится на любые негативные плотные линейные порядки, что позволяет развить для них основы элементарного конструктивного анализа (на языке вычислимых последовательностей или вычислимых дедекиндовых сечений).

Через ω далее, если не оговорено противное (в случае, когда ω означает ординал), будем обозначать множество натуральных чисел, через η — эквивалентность на ω, через μ и ν — нумерации, τ — порядковый тип упорядочения рациональных чисел. Другими малыми греческими буквами будем обозначать подмножества ω (за редкими исключениями, например, γ — как геделевская нумерация, φ — как морфизм и χ — в качестве нумерации частично рекурсивных функций). Малыми буквами латинского алфавита (кроме f и g, обозначающих вычислимые функции) в основном будем обозначать натуральные числа, большими — алгебраические системы, нижние/верхние классы сечений и подмножества ω, используемые при построении алгоритмов, за исключением буквы Q, зарезервированной для обозначения множества рациональных чисел.

Как обычно, *вычислимой функцией* из ω^n $(n \geq 1)$ в ω называется всюду определенная функция, для которой существует вычисляющий ее алгоритм. Отношение на ω^n $(n \geq 1)$ называется *вычислимым* (*перечислимым*), если вычислима его характеристическая функция (существует алгоритм порождения элементов данного отношения).

Следуя Ю. Л. Ершову и С. С. Гончарову [1–3], приведем ряд основных определений. Если M — произвольная не более чем счетная система (т. е. множество вместе с фиксированным на нем набором операций и отношений) и μ — отображение множества натуральных чисел ω на M, то пара (M, μ) называется *нумерованной системой*, если все операции, действующие на M, представлены соответствующими вычислимыми функциями в нумерации μ, т. е. для любой n-местной операции F, названной в сигнатуре M и действующей на основном множестве этой системы, найдется такая вычислимая (μ-представляющая) функция f той же местности, что $\forall \bar{x} \in \omega^n$ $(F\mu\bar{x} = \mu f\bar{x})$. При этом, как правило, на алгоритмические сложности основных отношений накладываются те или иные ограничения, а семейство всех операций/отношений предполагается вычислимым (в определяемом ниже смысле). Если даны две нумерованные системы (M, μ) и (N, ν), то гомоморфизм φ из M в N называется *морфизмом*, если он эффективен на номерах, т. е. существует такая вычислимая функция g, что $\varphi\mu = \nu g$. Если данный морфизм φ является изоморфизмом из (M, μ) на (N, ν), то будем говорить, что (M, μ) *эффективно сводимо к* (N, ν). Заметим, что хотя обратное отображение к изоморфизму есть также изоморфизм, он не обязан быть морфизмом, так как обратное отображение, вообще говоря, может и не поддерживаться вычислимой на номерах функцией. *Нумерационной эквивалентностью нумерованной системы* (M,μ) называется ядро отображения μ, т. е. $\{\langle x,y\rangle \mid \mu x=\mu y\}$.

Нумерованная система, в которой все основные отношения (включая равенство) вычислимы на номерах (т. е. существует семейство алгоритмов, позволяющих распознавать проблему принадлежности любого кортежа номеров соответствующему отношению), называется *вычислимой*. Говорят, что модель *имеет вычислимое представление*, если она имеет вычислимую нумерацию.

Терминологическое замечание. В прежней русскоязычной терминологии вычислимые модели назывались конструктивными, а вычислимо представимые — конструктивизируемыми. В современной западной литературе по теории абстрактной вычислимости под вычислимыми моделями обычно понимаются системы с вычислимыми носителями (алгоритмически разрешимыми подмножествами ω), на которых заданы вычислимые операции и отношения, а под вычислимо представимыми — те, для которых существуют вычислимые копии, т. е. изоморфные системам с рекурсивными носителями, на которых заданы вычислимые операции и отношения.

Будем придерживаться рамок ныне принятой терминологии, хотя, как отмечалось выше, понятие вычислимости имеет и другие, не менее важные, интерпретации (см. [1]), что может создавать ощутимые неудобства в восприятии излагаемых фактов. Следуя сказанному, дадим следующее неформальное

Определение 1.1. Нумерованное семейство объектов $(\Re,\nu)$ называется *вычислимым*, если существует равномерно эффективная процедура, транслирующая ν-номер любого $\Re$-объекта в его (заранее оговоренные) алгоритмические свойства.

Далее, исходя из необходимости, данное определение будет уточняться так, чтобы из контекста всегда было ясно, что мы вкладываем в понятие вычислимости. Так, к примеру, вычислимость (относительно нумерации μ) семейства $\Im$ представляющих вычислимых функций нумерованной унарной алгебры (A,μ) означает существование такой нумерации γ семейства $\Im$, что для подходящей вычислимой функции f имеет место $\gamma=\chi f$ (где χ — клиниевская нумерация унарных частично рекурсивных функций).

Определение 1.2. Если система имеет нумерацию, в которой все основные отношения (включая равенство) являются $\Sigma^0_n(\Pi^0_n)$-вычислимыми (а функции, представляющие операции согласно данному выше определению автоматически вычислимы), то говорят, что данная модель $\Sigma^0_n(\Pi^0_n)$-*представима.*

С точки зрения реализации целей настоящей статьи особо важный случай представляют Σ^0_1- и Π^0_1-представимые модели, первые из которых называются *позитивно*, а вторые — *негативно представимыми.* Например, нумерация ν линейного порядка $\langle L;\preceq\rangle$ называется *позитивной* (*негативной*), если множества $\{\langle x,y\rangle \mid \nu x\preceq \nu y\}$ и $\{\langle x,y\rangle \mid \nu x=\nu y\}$ (соответственно $\omega^2\setminus\{\langle x,y\rangle \mid \nu x=\nu y\}$ и $\omega^2\setminus\{\langle x,y\rangle \mid \nu x\preceq\nu y\}$) перечислимы. Далее, для краткости, множества с перечислимыми дополнениями будем называть *коперечислимыми.* Линейный порядок, обладающий позитивной (негативной) нумерацией, называется *позитивно* (*негативно*) *представимым.*

С понятием позитивной (негативной) представимости системы уместно (и, как оказалось, полезно) связать двойственное понятие представимости системы над эквивалентностью η над ω, подразумевая следующее

Определение 1.3. Система M называется $\Sigma_n^0\,(\Pi_n^0)$-*представимой над эквивалентностью* η на ω, если существует $\Sigma_n^0\,(\Pi_n^0)$-нумерация системы M с нумерационной эквивалентностью, равной η.

При этом, вообще говоря, в самом общем случае можно не предполагать, что ядро нумерации, т. е. η, является $\Sigma_n^0\,(\Pi_n^0)$-множеством.

Замечание. С точки зрения представимости систем над эквивалентностью «первичным» фиксированным понятием является эквивалентность (что порождает проблему описания общих свойств всех систем, представимых над заданной эквивалентностью), в то время как в рамках теории нумерованных систем основной объект есть сама система, по отношению к которой все ее нумерации «вторичны» (соответственно в этом случае основная проблематика — описание свойств нумераций с теми или иными свойствами и соотношений между ними). Однако эти понятия двойственны, что мы и будем использовать в дальнейшем без каких-либо ограничений и оговорок, если из контекста будет явно вытекать то, что имеется в виду.

Завершим вводный раздел рядом необходимых в дальнейшем определений об эквивалентностях и линейных порядках.

Пусть η — эквивалентность на ω. Подмножество γ множества натуральных чисел ω называется η-*замкнутым*, если γ вместе с каждым числом содержит все ему η-эквивалентные, т. е. $x \in \gamma$ и $x = y \pmod{\eta} \to y \in \gamma$.

Для двух эквивалентностей будем говорить, что первая является *расширением* второй, если вторая содержится в первой.

Характеристической трансверсалью эквивалентности η называется множество минимальных представителей всех η-классов, т. е. $\{x \mid \forall y(x = y \pmod{\eta} \to x \leq y)\}$, которое обозначается через $\mathrm{tr}(\eta)$.

Очевидна перечислимость характеристической трансверсали любой негативной эквивалентности.

Эквивалентность с бесконечным (конечным) числом смежных классов будем называть *бесконечной* (*конечной*).

η-*Замыканием множества* α, обозначаемым через $[\alpha]_\eta$, называется пересечение всех η-замкнутых расширений множества α.

Множество называется η-*бесконечным* (η-*конечным*), если его η-замыкание состоит из бесконечного (конечного) числа классов η-эквивалентности. Очевидно, что необходимым условием η-бесконечности множества является его бесконечность.

Если η — эквивалентность и δ — множество, то будем говорить, что число x η-*отвергается множеством* δ, если $x \notin [\delta]_\eta$. Очевидно, что для любой фиксированной негативной эквивалентности η отношение «натуральное число x η-отвергается конечным множеством δ» равномерно перечислимо по x, δ (подразумевается явное задание всех элементов множества δ, например, посредством его канонического индекса).

Как обычно, *сечением линейного порядка* $\langle L; \preceq_L\rangle$ (к символу порядка, заданного на множестве, мы часто будем приписывать имя этого множества в качестве нижнего индекса, что позволит избежать возможных недоразумений) назовем такое разбиение основного множества этого порядка на два непустых непересекающихся множества A и B, что всякий элемент из A строго меньше (в смысле $\preceq_L$) всякого элемента из B. При этом множество A называется *нижним классом сечения*, а B — *верхним*. Существует три типа сечений:

в A есть наибольший элемент и в B есть наименьший (скачок);

в A есть наибольший элемент, а в B нет наименьшего, либо в A нет наибольшего, а в B есть наименьший (дедекиндово сечение);

в A нет наибольшего элемента и в B нет наименьшего (щель).

В случае плотных порядков случай скачков не имеет места, что будет использоваться далее без напоминаний.

Сечение $A|B$ нумерованного линейного порядка $\langle L, \nu\rangle$ называется *вычислимым*, если вычислимо множество всех ν-номеров нижнего класса сечения. Заметим, что в силу симметричности понятия вычислимости и непустоты обоих классов сечения не имеет значения, брать нижний класс или верхний.

Элемент a линейного порядка $\langle L; \preceq_L\rangle$ называется *предельным снизу*, если $\forall x[x \prec_L a \to \exists y(x \prec_L y \prec_L a)]$, где $\prec_L$ обозначает «строго меньше». Аналогично определяется предельность сверху. *Предельным* называется элемент предельный либо снизу, либо сверху. Если элемент пределен как сверху, так и снизу, то будем называть его *двухсторонне предельным.*

Пусть η — произвольная (не обязательно негативная или позитивная) бесконечная эквивалентность на ω. Предельный снизу элемент n/η представимого над η линейного порядка $\langle \omega/\eta; \preceq_\eta\rangle$ называется *эффективно предельным снизу*, если существует такая вычислимая последовательность $x_0, x_1, \dots$ натуральных чисел, что

$$x_0/\eta \prec_\eta x_1/\eta \prec_\eta \dots \prec n/\eta, \quad \forall z[z/\eta \prec_\eta n/\eta \to \exists i \in \omega(z/\eta \prec_\eta x_i/\eta)],$$

где $\prec_\eta = \preceq_\eta \setminus \mathrm{id}\,\omega/\eta$.

Аналогично определяется предельный сверху элемент.

2. Представимость линейных порядков над эквивалентностями

Данное в разд. 1 определение позитивного (негативного) линейного порядка можно обобщить, имея в виду произвольные нумерационные эквивалентности.

Определение 2.1. Линейный порядок $\langle L; \preceq_L\rangle$ называется *негативно* (*позитивно*) *представимым над эквивалентностью* η на ω, если существует такая его нумерация ν, что $\eta = \{\langle x, y\rangle \mid \nu x = \nu y\}$ и множество $\{\langle x, y\rangle \mid \nu x \preceq_L \nu y\}$ коперечислимо (соответственно перечислимо).

Далее, во избежание перегрузки текста термином «представимый», будем без оговорок использовать в качестве его синонимов прилагательные «определимый» и «реализуемый».

Предложение 2.1. *Негативный* (*позитивный*) *линейный порядок с позитивной* (*соответственно негативной*) *нумерационной эквивалентностью вычислим.*

Доказательство. Пусть $\langle L; \preceq_L\rangle$ — линейный порядок, негативно представимый над позитивной эквивалентностью η, т. е. для некоторой нумерации ν этого порядка с нумерационной эквивалентностью, равной η, множество $\{\langle x, y\rangle \mid \nu x \preceq_L \nu y\}$ коперечислимо. Обозначим через $\prec_L$ строгий линейный порядок $(\preceq_L \setminus \mathrm{id}\, L)$. Тогда $x \neq y \pmod{\eta} \leftrightarrow \nu x \prec_L \nu y \vee \nu y \prec_L \nu x$. Следовательно, η — негативная, а значит, и вычислимая, эквивалентность. Далее, для любых двух различных по модулю η натуральных чисел принадлежность их ν-образов строгому порядку $\prec_L$ эффективно распознаваема в силу линейности отношения. Поэтому как η, так и $\preceq_L$ вычислимы.

Если $\langle L; \preceq_L \rangle$ — линейный порядок, позитивно представимый над негативной эквивалентностью η, то эта эквивалентность и позитивна, так как $x = y \pmod{\eta} \leftrightarrow \nu x \preceq_L \nu y \wedge \nu y \preceq_L \nu x$, но правая часть этой равносильности перечислима в силу позитивности порядка $\preceq_L$ в нумерации ν ($\nu(x) = x/\eta$). Используя вычислимость η для пар чисел x, y, различных по ее модулю, эффективно распознается в точности один из двух случаев: $\nu x \prec_L \nu y$ либо $\nu y \prec_L \nu x$, т. е. порядок $\preceq_L$ в нумерации ν вычислим. Предложение доказано.

Таким образом, для рассмотрения собственных расширений класса линейных порядков, обладающих вычислимыми представлениями, имеет смысл изучение линейных порядков, негативно (позитивно) представимых над негативными же (соответственно позитивными) эквивалентностями, так как другие комбинации дают вычислимые порядки.

Далее через $\langle Q; \preceq_Q \rangle$ будем обозначать множество рациональных чисел вместе с их естественным упорядочением типа τ. Отметим, что сами рациональные числа (точнее, их изображения) удобно считать их же номерами, сопоставляя каждому числу все его представления в виде пары целых чисел (числитель/знаменатель). Эквивалентно, можно выбрать любую гёделевскую нумерацию всех пар целых чисел, отождествляя их с рациональными, и считать основным множеством ω, на котором задается вычислимый линейный порядок. Детали опускаем. Очевидно, что для любого такого представления полученная модель будет вычислимой.

Предложение 2.2. *Существует позитивная эквивалентность, над которой не определим никакой линейный порядок.*

Доказательство. Пусть η — бесконечная позитивная эквивалентность такая, что всякое собственное η-замкнутое вычислимо перечислимое подмножество ω является объединением конечного числа классов η-эквивалентности. Примеры таких эквивалентностей можно найти в [1, гл. 3, § 6]. Допустим, что над η позитивно определим линейный порядок $\langle L; \preceq_L \rangle$, т. е. $\langle L; \preceq_L \rangle \cong \langle \omega/\eta; \preceq_\eta \rangle$, где $\preceq_\eta$ — представляющий $\preceq_L$ позитивный линейный порядок на фактор-множестве ω/η. Зафиксируем элемент линейного порядка $\langle \omega/\eta; \preceq_\eta \rangle$, отличный от наименьшего и наибольшего (что возможно в силу бесконечности η), и выберем любой номер (скажем, n) данного элемента. Тогда количество элементов, больших (или меньших) данного фиксированного, также бесконечно. Пусть для определенности бесконечным будет множество $\preceq_\eta$-меньших элементов (случай $\preceq_\eta$-больших элементов рассматривается аналогично). Тогда множество $\{x \mid x \preceq_\eta n\}$ является собственным η-замкнутым перечислимым подмножеством ω, состоящим из бесконечного количества классов η-эквивалентности, что невозможно. Предложение доказано.

Заметим, что любая позитивная (негативная) эквивалентность с конечным числом смежных классов вычислима и порядковый тип всякого линейного порядка, эффективно реализуемого над ней, с точностью до изоморфизма есть начальный отрезок порядкового числа ω. Поэтому с точки зрения дескриптивной теории алгоритмов (т. е. принципиального наличия или отсутствия алгоритмов) интерес представляют лишь бесконечные эквивалентности.

Известно, что всякий предельный элемент негативного линейного порядка эффективно предельный, в то время как предельный элемент позитивного линейного порядка может не быть эффективно предельным и, более того, существует позитивная совершенная нумерация порядка рациональных чисел $\langle Q; \preceq_Q \rangle$, в которой никакой элемент не является эффективно предельным [15], т. е. в данном позитивном представлении порядкового типа τ множество вычислимых сечений пусто. Для любой негативной нумерации порядка типа τ семейство вычислимых сечений, как будет показано далее, трудно обозримо.

Ниже будет показано, что всякий не двусторонне предельный элемент негативного линейного порядка является рубежом подходящего вычислимого дедекиндова сечения, в то время как для двухсторонне предельных это не так.

Следующая теорема вместе с предложением 2.2 обосновывает целесообразность рассмотрения именно негативных линейных порядков как наиболее широкого и естественного класса моделей, в котором можно развить теорию эффективных предельных переходов. Эти же факты в определенном смысле обуславливают приоритетность негативных порядков перед позитивными, хотя традиционно считалось, что позитивные модели гораздо важнее негативных.

Всюду далее символ λ, если не оговорено противное, используется в качестве стандартного λ-обозначения.

Теорема 2.1. *Над всякой бесконечной негативной эквивалентностью негативно представимы все типы изоморфизмов счетных плотных линейных порядков.*

Доказательству предпошлем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2.1. *Для всякой бесконечной негативной эквивалентности η существует частично вычислимая функция f от четырех переменных, обладающая следующим свойством:*

если n — индекс характеристической функции η-замкнутого и η-бесконечного вычислимого множества α, а x, y — различные по модулю η натуральные числа, принадлежащие α, то $\lambda z.f(z, n, x, y)$ является вычислимой характеристической функцией η-замкнутого и η-бесконечного вычислимого подмножества α, отделяющего x от y, дополнение которого до α также η-бесконечно (и, очевидно, η-замкнуто и вычислимо).

Доказательство. Пусть α — η-замкнутое и η-бесконечное множество, заданное номером n своей характеристической функции, а $x, y \in \alpha$ — попарно различные по модулю η натуральные числа. Используя алгоритм разрешения для α и перечислимость характеристической трансверсали эквивалентности η, построим две такие вычислимые бесконечные строго возрастающие последовательности $b_0 < b_1 < \dots$ и $c_0 < c_1 < \dots$, что

$b_i, c_i \in \mathrm{tr}(\eta) \cap \alpha$ для всех $i \in \omega$,

$x = b_0$, $y = c_0$,

$[\{b_0, b_1, \dots\}]_\eta \cap [\{c_0, c_1, \dots\}]_\eta = \varnothing$.

Возможность равномерного построения таких последовательностей по $\langle n, x, y \rangle$ вполне очевидна.

Построим два множества β и γ по шагам.

Шаг 0. $\beta_0 = \{b_0, b_1, \dots\}$, $\gamma_0 = \{c_0, c_1, \dots\}$.

Шаг $s + 1$. Пусть z — наименьшее число из α, не принадлежащее множеству $\beta_s \cup \gamma_s$. Строим множества таким образом, что множество $\beta_s \cup \gamma_s$ вычислимо, хотя и бесконечно, что будет видно из определенной ниже конструкции.

Выберем наименьшие p, q со свойством $z < b_p \wedge z < c_q$ и построим множества $\delta_s = \beta_s \cap \{0, 1, \dots, b_p\}$, $\epsilon_s = \gamma_s \cap \{0, 1, \dots, c_q\}$.

Проверим z на предмет η-отвержения множествами δ_s, ϵ_s, и если процедура η-отвержения z одним из этих множеств успешно заканчивается, то полагаем

(1) если z η-отвергается множеством δ_s, то $\beta_{s+1} = \beta_s$, $\gamma_{s+1} = \gamma_s \cup \{z\}$;

(2) если z η-отвергается множеством ϵ_s, то $\beta_{s+1} = \beta_s \cup \{z\}$, $\gamma_{s+1} = \gamma_s$;

(3) если z на каком-то шаге процесса η-отвергается обоими множествами, то выбираем случай (1).

Конец шага $s + 1$.

Определим предельные множества $\beta = \bigcup\limits_{s\in\omega} \beta_s$, $\gamma = \bigcup\limits_{s\in\omega} \gamma_s$.

Сразу отметим, что процедура η-отвержения z хотя бы одним из множеств δ_s или ϵ_s на каждом шаге s успешно завершается с занесением z в соответствующее β_s или γ_s. В самом деле, если шаг s корректно завершен (т. е. η-эквивалентные числа не попадают в разные множества), то на шаге $s+1$ любое z, не являющееся трансверсальным, отвергнется ровно одним из строящихся множеств, так как η-эквивалентное z трансверсальное число уже находится в одном из множеств, которое не отвергнет z. Если z трансверсально, то на шаге $s + 1$ оно может отвергнуться любым из строящихся множеств, что также обеспечивает успешность завершения данного шага.

Докажем корректность конструкции, опираясь на индукцию по шагам построения.

(1) $\beta \cup \gamma \subseteq \alpha$. Очевидно.

(2) β (а значит, и γ) η-замкнуто. Чтобы это доказать, заметим, что если число z первым из своего смежного η-класса попадает в β на некотором шаге s (т. е. в случае трансверсальности z), то никакое нетрансверсальное число w из этого класса не будет η-отвергаться никаким β_t ни для какого шага $t > s$. Легко понять, что тогда w будет η-отвергнуто некоторым γ_t $(t > s)$, а значит, будет занесено в β.

(3) Из (2) также следует $\beta \cup \gamma \supseteq \alpha$, т. е. любое число из α будет отнесено либо к β, либо к γ.

(4) β и γ η-бесконечны в силу η-бесконечности множеств β_0 и γ_0.

(5) Функция $\lambda z.f(z, n, x, y)$ определяется следующими инструкциями: для данных x, y если действительно $x \neq y \pmod{\eta}$, n — номер вычислимой характеристической функции η-замкнутого и η-бесконечного множества α, содержащего как x, так и y, то, выбирая $x = b_0, y = c_0$ и применяя описанную выше процедуру (полагая $f(z, n, x, y) = 1$ для $z \in \beta$ и $f(z, n, x, y) = 0$ иначе), получим, очевидно, характеристическую функцию множества, обладающего требуемыми свойствами. Лемма доказана.

Конструкцию, приведенную в следующей лемме, назовем *стандартной процедурой расщепления* бесконечной негативной эквивалентности.

Лемма 2.2. *Если η — бесконечная негативная эквивалентность, то над ней негативно представим порядковый тип $1 + \tau$, где τ — порядковый тип изоморфизма рациональных чисел с их естественным упорядочением.*

Доказательство. Пусть f — частично вычислимая функция от четырех переменных, существование которой для η доказано в предыдущей лемме.

Шаг 0. Полагаем $\preceq_0 = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \omega\}$.

Шаг $s+1$. Пусть построены такие η-замкнутые и η-бесконечные вычислимые множества $A_0, \ldots, A_m$ $(m = 2^s - 1)$, заданные индексами своих характеристических функций, что $\preceq_s$ определяется следующим образом:

всякий элемент из A_i строго меньше всякого элемента из A_j для всех $0 \leq i < j \leq m$ и все элементы из A_i равны для любого $0 \leq i \leq m$.

Тогда для каждого A_i $(0 \leq i \leq m)$ находим первые в пересчете η неэквивалентные по модулю η числа, скажем, x_i, y_i и применяем к индексу n характеристической функции множества A_i функцию f на паре элементов x_i, y_i, т. е. вычисляем индекс вычислимой функции $\lambda z.f(z, n, x_i, y_i)$.

Таким образом, каждое A_i распадается на два дизъюнктных вычислимых η-замкнутых и η-бесконечных множества: B_i, C_i, заданные индексами своих характеристических функций. Пусть $b_i = \min B_i$, $c_i = \min C_i$.

Полагаем

если $b_i < c_i$, то все элементы из B_i объявляем строго меньшими всех элементов из C_i, иначе все элементы из C_i объявляем строго меньшими всех элементов из B_i, т. е. множество A_i делится на две части, причем порядок между ними определяется минимальным (и, очевидно, трансверсальным) числом из двух частей: та часть, минимальный элемент которой меньше, становится строго $\prec_{s+1}$-меньше части, минимальный элемент которой больше.

Процедуру применяем ко всем A_i $(0 \leq i \leq m)$. Окончательно определяем

$\preceq_{s+1}$ — порядок, который отличается от $\preceq_s$ тем, что каждое A_i оказывается расщепленным на две части: B_i и C_i, при этом порядок, построенный на предыдущем шаге, сохраняется, т. е. $\preceq_{s+1} \subset \preceq_s$ (включение строгое).

Конец шага $s+1$.

Определим предельное множество $\preceq = \bigcap\limits_{s \in \omega} \preceq_s$.

Покажем, что $x \neq y \pmod{\eta} \Leftrightarrow x/\eta \prec y/\eta \vee y/\eta \prec x/\eta$, где $\prec$ обозначает строгий порядок, индуцированный $\preceq$. В самом деле, допустим $x < y$ (как натуральное число). Если $x/\eta = y/\eta$, то условие $x \neq y \pmod{\eta}$ не подтверждается ни на каком шаге, т. е. имеет место $x/\eta \preceq y/\eta \wedge y/\eta \preceq x/\eta$. Если $x/\eta \neq y/\eta$, то этот факт гарантированно впервые подтвердится на каком-то шаге $s+1$ и соответствующее множество A_i, содержащее как x, так и y, расщепится на этом шаге на две η-бесконечные, η-замкнутые и вычислимые части B_i, C_i, причем все числа из части с меньшим минимальным числом станут $\prec$-меньше всех чисел другой части (минимальное число которой больше). Заметим также, что на каждом шаге $s+1$ стандартной процедуры расщепления порядок $\preceq_s$ «теряет» все пары элементов декартовых произведений вида $C_i \times B_i$ или $B_i \times C_i$ (в обозначениях шага $s+1$ процедуры). Таким образом, $\preceq$ действительно оказывается негативным линейным порядком, построенным над негативной эквивалентностью η. Осталось доказать, что тип изоморфизма построенного линейного порядка есть $1+\tau$.

Обозначим этот порядок через $\langle \omega/\eta; \preceq \rangle$, а через * — функцию, сопоставляющую каждому числу соответствующий трансверсальный элемент, т. е. $x^* = y \Leftrightarrow x/\eta = y/\eta \wedge y \in \mathrm{tr}(\eta)$. Ясно, что структура линейного порядка $\langle \omega/\eta; \preceq \rangle$ полностью отражена в «координатизации» трансверсальных элементов друг относительно друга. Ключевой момент доказательства основан на двух фактах: η-бесконечности всех строящихся множеств на каждом шаге построения и на конечности трансверсальных элементов, меньших (в смысле естественного порядка натуральных чисел ω) любого заданного натурального числа.

Легко заметить, что смежный класс $0/\eta$ будет наименьшим элементом построенного порядка. С другой стороны, какой бы фиксированный класс x^*/η ни взять, через конечное число шагов он не сможет быть $\preceq$-наибольшим, так как число трансверсальных элементов, меньших (в обычном смысле) него, конечно, поэтому через конечное число шагов некоторый смежный класс станет строго $\prec$-большим, чем он.

Покажем, что в $\langle\omega/\eta;\preceq\rangle$ нет соседних элементов, т. е. между двумя различными элементами всегда можно указать третий, расположенный строго между ними.

Пусть числа x, y на каком-то шаге работы стандартной процедуры расщепления попадут в разные A_i, A_j соответственно, скажем $x^* \in A_i,\ y^* \in A_j,\ A_i/\eta \prec A_j/\eta$. В силу η-бесконечности A_i и конечности трансверсальных элементов, меньших x^*, через конечное число шагов в A_i появится некоторое трансверсальное число z, которое «сдвинет» класс x^*/η влево относительно $\prec$, т. е. $x^*/\eta \prec z/\eta \prec y^*/\eta$. Таким образом, линейный порядок $\langle\omega/\eta;\preceq\rangle$ оказывается плотным линейным порядком без наибольшего, но с наименьшим элементом. Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы нужно показать негативную реализуемость над η трех оставшихся порядковых типов изоморфизма плотного линейного порядка: с наибольшим элементом, но без наименьшего; с наибольшим и наименьшим элементами и, наконец, порядкового типа рациональных чисел. Для этого, используя основную идею стандартной процедуры расщепления, внесем в нее внешне незначительные, но принципиальные модификации. При этом заметим, что тип изоморфизма $1+\tau$ появился ввиду неявного присутствия в стандартной процедуре расщепления естественного типа упорядочения ω натуральных чисел.

Построения приведем с умеренной степенью детализации.

Случай порядкового типа $\tau + 1$.

В стандартной процедуре расщепления при расслоении каждого A_i на две части B_i, C_i вычислимых η-замкнутых и η-бесконечных множеств, заданных индексами своих характеристических функций, на шаге $s+1$ находим $b_i = \min B_i$, $c_i = \min C_i$ и полагаем если $b_i < c_i$, то все элементы из B_i объявляем строго $\prec_{s+1}$-большими всех элементов из C_i. Таким образом, классы с меньшими минимальными числами переходят $\prec$-«вправо» относительно классов с большими минимальными числами, и расположение классов «стремится» к типу ω^* в отличие от предыдущего случая, когда классы «стремились» расположиться по типу ω. Нетрудно понять, что класс $0/\eta$ и будет наибольшим элементом в ω/η.

Случай $1+\tau+1$. В этом случае будем пытаться расположить классы по типу $\omega+\omega^*$. На первом шаге, имея два множества A_0, A_1 и объявив все числа из A_0 строго $\prec$-меньшими всех чисел из A_1, меняем стратегию. Для класса A_0 будем применять стандартную процедуру расщепления, а для A_1 — предыдущую процедуру. Тогда A_0 будет расщепляться, следуя типу ω («наименьшее влево» и наименьшим в пределе окажется элемент $\min A_0/\eta$), а A_1 — по принципу «наименьшее — вправо» и соответственно наибольшим в пределе окажется элемент $\min A_1/\eta$.

Случай τ. На четных шагах процедуры будем использовать принцип «классы с меньшими минимальными числами переходят влево», на нечетных — «классы с меньшими минимальными числами переходят вправо». Таким образом, никакой фиксированный смежный класс эквивалентности η не сможет стать ни $\preceq$-наибольшим, ни $\preceq$-наименьшим (так как для любого η-класса бесконечно много η-классов обойдут его как слева, так и справа).

Плотность построенных порядков показывается так же, как и в случае $1+\tau$. Теорема доказана.

Очевидно, что необходимым условием негативной представимости счетного плотного линейного порядка над заданной негативной эквивалентностью является ее бесконечность. Теорема 2.1 показывает, что этого достаточно, т. е. верно

Следствие 2.1. *Счетный плотный линейный порядок негативно представим над негативной эквивалентностью η тогда и только тогда, когда η бесконечна.*

Следствие 2.2. *Над всякой бесконечной негативной эквивалентностью негативно представим порядковый тип $\tau + 2 + \tau$.*

Чтобы в этом убедиться, достаточно после первого шага стандартной процедуры расщепления, имея множества A_0 и A_1, применить к A_0 случай $\tau + 1$ («минимальное число стремится вправо»), а к A_1 — стандартную процедуру (случай $1 + \tau$ — «минимальное стремится влево»).

Заметим, что порядковый тип $\tau + 2 + \tau$ не плотный.

Следствие 2.2 показывает, что над любой бесконечной негативной эквивалентностью негативно представимы и порядки, типы изоморфизмов которых отличны от четырех классических типов. Однако нетрудно убедиться в том, что наличие у элемента как правого, так и левого соседнего нарушает свойство «универсальности» в следующем смысле.

Предложение 2.3. *Если всякий смежный класс бесконечной негативной эквивалентности невычислим, то над ней негативно не представим порядок типа $\tau + 3 + \tau$.*

Доказательство. Рассмотрим эквивалентность $\eta^*_\alpha = \{\langle x, y\rangle \mid \gamma_x \triangle \gamma_y \subseteq \alpha\}$ (см. [1, гл. 2, § 5]), где $\triangle$ — симметрическая разность, γ — каноническая нумерация конечных множеств, а α — невычислимое коперечислимое подмножество ω. Тогда η^*_α — негативная эквивалентность, каждый смежный класс которой невычислим. В самом деле, ее негативность следует из того факта, что если x, y различны по модулю η^*_α, то в одном из множеств γ_x, γ_y есть число из $\omega \setminus \alpha$, которое не лежит в другом, а в силу коперечислимости α этот факт подтвердится в процессе перечисления $\omega \setminus \alpha$. Допустим, что некоторый η^*_α-класс β вычислим и t — наименьший элемент этого класса (т. е. t — трансверсальный элемент, являющийся γ-номером некоторого конечного множества δ, целиком расположенного в $\omega \setminus \alpha$ и $\gamma_t = \delta$). Тогда $z \in \alpha \Leftrightarrow \gamma^{-1}(\gamma_t \cup \{z\}) \in \beta$, что противоречит невычислимости α.

Предположим, что линейный порядок $\langle L; \leq\rangle$ типа $\tau + 3 + \tau$ негативно представим над η^*_α. Зафиксируем такие числа a, b, c, что $a/\eta \prec b/\eta \prec c/\eta$ и между ними нет других элементов (в смысле $\prec$), где $\prec$ — строгий порядок, негативно представляющий $\langle L; \leq\rangle$ над η^*_α. В силу перечислимости множеств $\{x \mid x \prec c\}, \{x \mid a \prec x\}$ их пересечение, совпадающее со смежным классом b/η^*_α, также перечислимо; противоречие. Предложение доказано.

3. Вычислимые сечения и пополнения негативных плотных линейных порядков

Факт эффективной реализуемости плотных линейных порядков над любой бесконечной негативной эквивалентностью особо значим как на фоне предложения 2.2 о существовании бесконечных позитивных эквивалентностей, над которыми вовсе не представимы никакие линейные порядки, так и в свете следующего утверждения о существовании богатых семейств вычислимых сечений негативных плотных порядков.

Теорема 3.1. *Для любого негативного плотного линейного порядка существует эффективная процедура, сопоставляющая всякой паре различных элементов этого порядка вычислимую щель, отделяющую эти элементы.*

Доказательство. Пусть $(\langle L; \preceq\rangle, \nu)$ — негативный плотный линейный порядок. Описание равномерной эффективной процедуры сопоставления каждой паре различных элементов этого порядка вычислимой щели, отделяющей эти элементы, дадим вместе с комментариями, позволяющими прояснить суть процесса и сократить доказательство корректности алгоритма.

Пусть $\nu a \prec \nu b$.

Шаг 0. Положим $a_0 = a, b_0 = b$.

Шаг $s+1$. На шаге $s+1$ для заданной пары $\nu a_s \prec \nu b_s$ элементов процедура пытается найти такие a_{s+1}, b_{s+1}, что $\nu a_s \prec \nu a_{s+1} \prec \nu b_{s+1} \prec \nu b_s$ и при этом одновременно текущий элемент с ν-номером s должен быть отнесен либо к нижнему, либо к верхнему классу строящегося сечения. Так как $\nu a_s \neq \nu b_s$, независимо от того, где расположен элемент νs (даже если νs совпадает с νa_s либо с νb_s), через конечное число шагов гарантированно определится такое число c, что выполнится хотя бы один из следующих двух случаев:

(1) $\nu c \prec \nu s \wedge \nu c \prec \nu b_s \wedge \nu a_s \prec \nu c$

либо

(2) $\nu s \prec \nu c \wedge \nu a_s \prec \nu c \wedge \nu c \prec \nu b_s$,

причем если $\nu b_s \preceq \nu s$, то подтвердится только первый случай, если $\nu s \preceq \nu a_s$, то подтвердится только второй случай, если $\nu a_s \prec \nu s \prec \nu b_s$, то могут подтвердиться оба случая (даже в этом случае неисключающего «или» в результате неявного использования теоремы о редукции «что подтвердится первым, то мы и примем» процесс успешно завершается). Таким образом, процедура успешно завершает поиск нужного числа c на шаге $s+1$. Для завершения шага $s+1$ полагаем

в случае (1) $b_{s+1} = c$ и в качестве a_{s+1} возьмем любой ν-номер элемента, находящегося строго между (в смысле $\preceq$) νa_s и νb_{s+1} (это нужно для строгого возрастания строящейся последовательности);

в случае (2) $a_{s+1} = c$ и в качестве b_{s+1}, как и в предыдущем случае, возьмем любой ν-номер элемента, находящегося строго между νa_{s+1} и νb_s.

Конец шага $s+1$.

Построенные строго монотонные последовательности таковы, что $\nu a = \nu a_0 \prec \nu a_1 \cdots \prec \nu b_1 \prec \nu b_0 = b$, причем для любого элемента с ν-номером s на шаге $s+1$ этот элемент станет либо $\prec$-больше b_{s+1}, либо $\prec$-меньше a_{s+1}, т. е. почти вся (за исключением конечного числа элементов) эта двойная последовательность расположена левее либо правее любого элемента рассматриваемого линейного порядка. Таким образом, во-первых, никакой элемент не может быть пределом для этих двух последовательностей, и, во-вторых, любой элемент порядка (его ν-номер) относится на некотором шаге описанным алгоритмом к нижнему или к верхнему классу.

Следовательно, множества $A = \{x \mid \exists n(\nu x \prec \nu a_n)\}$, $B = \{x \mid \exists n(\nu b_n \prec \nu x)\}$ определяют нижний и соответственно верхний классы щели, отделяющей данные элементы $\nu a, \nu b$ негативного линейного порядка (L, ν). Вычислимость этой щели очевидна. Теорема доказана.

Таким образом, в негативных плотных линейных порядках для любой пары различных элементов отделяющая их вычислимая щель не просто существует, но, более того, разрешающий алгоритм соответствующей щели дается равномерно эффективной процедурой по данной паре элементов.

Дадим точное определение вычислимого семейства вычислимых сечений негативного линейного порядка.

Пусть χ — фиксированная вычислимая нумерация семейства всех одноместных частично вычислимых функций. Например, если k — бинарная клиниевская функция, универсальная для класса унарных частично вычислимых функций (т. е. семейство одноместных частично вычислимых функций есть множество объектов $\{\lambda x.k(x,n) \mid n \in \omega\}$), то можно положить $\chi(n) = \lambda x.k(x,n)$.

Следующие определения содержат неизбежные коллизии, возникающие при различных толкованиях вездесущего прилагательного «вычислимый», о чем было упомянуто в разд. 1.

Определение 3.1. Нумерация γ семейства вычислимых сечений $\Re$ негативного линейного порядка называется *вычислимой*, если существует такая вычислимая функция f, что $\gamma = \chi f$ (т. е. по любому γ-номеру сечения эффективно определяется некоторый его χ-номер, являющийся индексом характеристической функции нижнего класса данного сечения).

Семейство вычислимых сечений негативного линейного порядка называется *вычислимым*, если существует его вычислимая нумерация.

Неформально вычислимость семейства вычислимых сечений означает перечислимость алгоритмов разрешения для сечений данного семейства.

Назовем семейство вычислимых щелей негативного линейного порядка *относительно полным*, если любая пара различных элементов этого порядка отделяется подходящей щелью из данного семейства.

Следствие 3.1. *Для всякого негативного плотного линейного порядка существует вычислимая* (*даже негативная*) *нумерация относительно полного семейства вычислимых щелей.*

Множество всех пар различных по модулю негативной эквивалентности натуральных чисел перечислимо. Сопоставляя каждой такой паре индекс характеристической функции нижнего класса отделяющей их щели, получим искомую вычислимую нумерацию. В действительности всякая такая вычислимая нумерация будет негативной, так как для двух различных сечений гарантированно найдется элемент, принадлежащий верхнему классу для одного из этих сечений и нижнему классу — для другого. Детали опускаем.

Определение 3.2. *Вычислимым пополнением* негативного плотного линейного порядка называется множество всех вычислимых щелей (индексов вычислимых характеристических функций их нижних классов) данного порядка.

Ниже показано, что упомянутая в следствии 3.1 относительно полная система отделяющих вычислимых щелей негативного плотного линейного порядка далеко не исчерпывает всего разнообразия вычислимых сечений, что обосновывает введение данного определения.

Обратим внимание на два обстоятельства, связанные с этим определением. Во-первых, сечения, рубежами которых являются элементы самого порядка (т. е. дедекиндовы сечения), определены неоднозначно (элемент может быть как наибольшим в нижнем классе, так и наименьшим в верхнем). Во-вторых (и это главное!), ни одно из двух дедекиндовых сечений, рубежами которых являются элементы порядка, вообще говоря, не обязано быть вычислимым. Иными словами, в множестве всех вычислимых сечений негативного порядка могут не оказаться сами элементы порядка в качестве пределов подходящих вычислимых последовательностей. Поэтому определяем вычислимые пополнения именно как щели. Впрочем, для задачи эффективного сравнения рубежей дедекиндовых сечений и щелей эти факты не являются препятствием, поскольку для различных рубежей вычислимых сечений (неважно, дедекиндовых или щелей) всегда эффективно найдется пара различных элементов линейного порядка, отделяющих эти рубежи.

Если элемент негативного порядка не является двухсторонне предельным, то он есть рубеж вычислимого сечения. В самом деле, пусть $\langle\omega/\eta; \preceq_\eta\rangle$ — негативный линейный порядок и его элемент m/η (смежный η-класс, содержащий число m) не пределен, скажем, справа. Тогда существует элемент n/η, расположенный непосредственно над m/η (т. е. строго между m/η и n/η нет других элементов). Следовательно, множества $A = \{x \mid x \preceq_\eta m\}$ $(= \{x \mid x \prec_\eta n\})$ и $B = \{x \mid n \preceq_\eta x\}$ $(= \{x \mid m \prec_\eta x\})$ перечислимые (а значит, и вычислимые, так как A и B непересекающиеся, объединение которых есть ω), первое из которых определяет нижний класс дедекиндова сечения $A|B$, а второе — верхний. При этом элемент m/η наибольший в нижнем классе.

Аналогично доказывается случай, когда m/η не пределен слева (тогда m/η оказывается наименьшим в верхнем классе).

Приведем простейший пример негативной нумерации порядкового типа $\omega + 1 + \omega^*$, в которой для единственного предельного (как снизу, так и сверху) элемента нет вычислимого сечения, рубежом которого он является.

Пусть α, β — вычислимо перечислимые невычислимые множества, объединение которых невычислимо (существование таких множеств вытекает, например, из теоремы Фридберга о разложении) и $a_0, a_1, \ldots,\ b_0, b_1, \ldots$ — эффективные пересчеты без повторений множеств α и β соответственно. Положим $\gamma = \omega \setminus (\alpha \cup \beta)$ и рассмотрим эквивалентность $\eta(\gamma) = \gamma^2 \cup \mathrm{id}\,\omega$, которая, очевидно, негативна. Единственным неодноэлементным смежным классом по этой эквивалентности является множество γ, которое и будет определять предельный элемент. Определим следующий линейный порядок $\preceq$ над $\eta(\gamma)$ (т. е. на $\omega/\eta(\gamma)$): $a_0/\eta \prec a_1/\eta \prec \cdots \prec \gamma \prec \cdots \prec b_1/\eta \prec b_0/\eta$, где через $\prec$ обозначен строгий порядок, т. е. $\prec = \preceq \setminus \mathrm{id}\,\omega/\eta(\gamma)$.

Нетрудно заметить, что дополнение линейного порядка $\preceq$ есть объединение двух множеств $\{\langle x, a_i\rangle \mid i \in \omega,\ x \in \omega \setminus \{a_0, \ldots, a_i\}\} \cup \{\langle a_i, a_j\rangle \mid i \in \omega,\ j < i\}$, $\{\langle b_i, x\rangle \mid i \in \omega,\ x \in \omega \setminus \{b_0, \ldots, b_i\}\} \cup \{\langle b_j, b_i\rangle \mid i \in \omega,\ j < i\}$, которые, очевидно, перечислимы, т. е. $\preceq$ — действительно негативный линейный порядок на фактор-множестве $\omega/\eta(\gamma)$.

Элемент γ негативного линейного порядка $\langle\omega/\eta(\gamma); \preceq\rangle$ является рубежом двух сечений. Покажем, что ни одно из них не может быть вычислимым. Если γ наибольший в нижнем классе, то верхний класс сечения есть множество β, которое невычислимо, поэтому невычислим и нижний класс. Аналогично рассматривается случай, когда γ наименьший в верхнем классе.

В связи с теоремой 3.1, согласно которой существует относительно полная система отделяющих вычислимых щелей, задаваемая равномерно эффективной процедурой, возникает естественный и принципиальный вопрос об алгоритмической природе совокупности всех вычислимых сечений негативного плотного линейного порядка.

Определение 3.3. Семейство $\Re$ вычислимых сечений нумерованного линейного порядка называется *продуктивным*, если существует эффективная процедура, позволяющая по каждому вычислимому подсемейству $\Re_0 \subseteq \Re$ строить вычислимое сечение из $\Re \setminus \Re_0$.

Теорема 3.2. *Семейство всех вычислимых сечений негативного плотного линейного порядка продуктивное.*

Доказательство идейно примыкает к доказательству предыдущей теоремы, хотя цели преследуются иные. Предварительно проясним ключевой момент конструкции.

Пусть $(\langle L; \preceq\rangle, \nu)$ — негативный плотный линейный порядок, $\prec = \preceq \setminus \operatorname{id} L$ и $\Re_0 = \{\chi(f(n)) \mid n \in \omega\}$ — перечислимое семейство вычислимых сечений этого порядка, заданное χ-номерами (индексами) характеристических функций множеств ν-номеров нижних классов соответствующих вычислимых сечений (здесь $\chi(f(n)) = \lambda x.k(x, f(n))$, k — клиниевская бинарная функция, универсальная для класса унарных частично рекурсивных функций), а f — вычислимая функция, посредством которой осуществляется эффективный пересчет семейства $\Re_0$. Будем пошагово строить две вычислимые последовательности $\nu a_0 \prec \nu a_1 \prec \cdots \prec \nu b_1 \prec \nu b_0$, первая из которых строго $\prec$-возрастающая, а вторая — строго $\prec$-убывающая (назовем их *нижней* и *верхней* соответственно) так, что

(1) любой элемент верхней (нижней) последовательности есть верхняя (нижняя) $\prec$-грань для всех элементов нижней (соответственно верхней) последовательности;

(2) для всякого элемента νz линейного порядка $\langle L; \preceq\rangle$ либо почти вся (т. е. за исключением начального сегмента) нижняя последовательность находится над z, либо почти вся верхняя последовательность расположена под z;

(3) для любого сечения $\chi(f(n))$ семейства $\Re_0$ найдется такое $i \in \omega$, что оба члена пары $\langle a_i, b_i\rangle$ расположены либо в нижнем, либо в верхнем классе сечения $\chi(f(n))$.

Если условия (1)–(3) удастся удовлетворить, построив при этом упомянутые вычислимые последовательности, то эти последовательности определят вычислимую щель (в силу (1) и (2)), отличную от всех сечений из $\Re_0$ (ввиду (3)).

Шаг 0. Выберем произвольные a_0, b_0 такие, что $\nu a_0 \prec \nu b_0$.

Шаг $s+1$. Пусть построены такие $a_0, \ldots, a_s$ и $b_0, \ldots, b_s$, что $\nu a_0 \prec \cdots \prec \nu a_s \prec \nu b_s \prec \cdots \prec \nu b_0$. Данный шаг будет посвящен отнесению элемента νs либо к нижнему, либо к верхнему классу и эффективному выбору пары таких чисел $\langle a_{s+1}, b_{s+1}\rangle$, что $\nu a_s \prec \nu a_{s+1} \prec \nu b_{s+1} \prec \nu b_s$, при этом оба этих числа одновременно принадлежат (или не принадлежат) множеству, индекс характеристической функции которого равен $\chi(f(s))$.

Подшаг 1. Сначала будем пытаться «избежать совпадения» строящегося сечения с сечением, заданным функцией $\chi(f(s))$, которое назовем C_s (т. е. C_s и есть множество с характеристической функцией $\chi(f(s))$). Для этого проверим числа a_s, b_s на предмет принадлежности к C_s. Если оба этих числа одновременно принадлежат либо C_s, либо $\omega \setminus C_s$, то полагаем $d = a_s, e = b_s$ и переходим к подшагу 2.

В противном случае, так как C_s определяет нижний класс сечения и $\nu a_s \prec \nu b_s$, имеем $a_s \in C_s, b_s \in \omega \setminus C_s$. Используя негативность ν и плотность $\langle L; \preceq \rangle$, будем искать такие числа d, e, что $\nu a_s \preceq \nu d \prec \nu e \preceq \nu b_s$ и оба числа d, e одновременно лежат либо в C_s, либо в $\omega \setminus C_s$. Ясно, что даже в критических случаях (когда νa_s наибольший в нижнем классе либо νb_s наименьший в верхнем классе) процесс нахождения таких d, e успешно завершится через конечное число шагов.

Конец подшага 1.

Подшаг 2. Полностью повторяем шаг $s+1$ предыдущей теоремы, имея d, e в качестве a_s, b_s. Найдем такое c, что выполнится хотя бы один из следующих двух случаев:

(1) $\nu c \prec \nu s \wedge \nu c \prec \nu b_s \wedge \nu a_s \prec \nu c$

либо

(2) $\nu s \prec \nu c \wedge \nu a_s \prec \nu c \wedge \nu c \prec \nu b_s$,

и после его успешного завершения (см. шаг $s+1$ теоремы 3.1) полагаем

в случае (1) $b_{s+1} = c$ и в качестве a_{s+1} возьмем любой ν-номер элемента, находящегося строго между (в смысле $\preceq$) νa_s и νb_{s+1} (это нужно для строгого возрастания строящейся последовательности);

в случае (2) $a_{s+1} = c$ и в качестве b_{s+1}, как и в предыдущем случае, возьмем любой ν-номер элемента, находящегося строго между νa_{s+1} и νb_s.

Конец подшага 2 и шага $s+1$.

Выполнение условий (1)–(3), сформулированных перед описанием продуктивной процедуры текущей теоремы, для последовательностей $a_0, a_1, \dots$ и $\dots, b_1, b_0$ вытекает непосредственно из комментариев к описанию процедуры. Теорема доказана.

Следствие 3.2. *Множество всех вычислимых сечений произвольного негативного плотного линейного порядка не является вычислимым.*

4. Структура степеней негативной представимости линейных порядков

Для негативной эквивалентности η обозначим через $L(\eta)$ класс всех линейных порядков, негативно представимых над η.

На множестве негативных эквивалентностей на ω введем следующее бинарное отношение $\trianglelefteq_{NLO}$:

$$\eta_1 \trianglelefteq_{NLO} \eta_2 \Leftrightarrow L(\eta_1) \subseteq L(\eta_2).$$

Очевидно, что $\trianglelefteq_{NLO}$ является предпорядком (т. е. рефлексивным и транзитивным отношением) на множестве всех негативных эквивалентностей на ω. Тогда его симметричное замыкание $\equiv_{NLO}$ есть эквивалентность, факторизация по которой разбивает множество всех негативных эквивалентностей на $\equiv_{NLO}$-классы эквивалентности. Содержательно $\equiv_{NLO}$-эквивалентность двух эквивалентностей означает совпадение представимых над ними классов порядковых типов.

Если Π — семейство всех негативных эквивалентностей, то на $\Pi/\equiv_{NLO}$ действует частичный порядок, индуцированный предпорядком $\trianglelefteq_{NLO}$, который будем обозначать так же (корректность этого очевидна). Частично упорядоченное множество $\langle \Pi/\equiv_{NLO}; \trianglelefteq_{NLO} \rangle$ будем называть *структурой негативной представимости линейных порядков*, а его элементы — *степенями негативной* *представимости.* Далее, если будет ясно, о чем идет речь, структуру негативной представимости линейных порядков будем называть просто *структурой негативной представимости*, а ее элементы — *степенями.* Для сокращения обозначений через $d(\eta)$ будем обозначать степень эквивалентности η. Будем также говорить, что линейный порядок *представим над заданной степенью*, если он представим над некоторой (а значит, и над любой) эквивалентностью из этой степени.

Строение структуры негативной представимости линейных порядков отражает алгоритмическую природу эквивалентностей с точки зрения предоставляемых возможностей для реализации над ними важных объектов, каковыми являются линейные порядки. Ясно, что чем $\trianglelefteq_{NLO}$-выше расположена степень, тем больше реализационных возможностей она предоставляет. Такой подход может оказаться также полезным в рамках теоретической информатики.

Отметим, что конечные негативные эквивалентности (которые в данном случае, очевидно, будут вычислимыми) порождают изолированные степени в структуре негативной представимости, так как если число классов эквивалентности есть n, то над ней представим только порядковый тип, изоморфный конечному ординалу n. Отбросив все $\equiv_{NLO}$-классы, порожденные конечными эквивалентностями, получим ограничения отношений $\trianglelefteq_{NLO}, \equiv_{NLO}$ на бесконечные негативные эквивалентности. Всюду далее структура негативной представимости рассматривается в контексте отсутствия степеней, содержащих конечные эквивалентности.

Пусть Σ — множество бесконечных позитивных эквивалентностей и отношение $\eta_1 \trianglelefteq_{PLO} \eta_2$ на Σ означает, что всякий линейный порядок, позитивно представимый над η_1, позитивно представим и над η_2. Совершенно аналогично негативному случаю путем симметричного замыкания предпорядка $\trianglelefteq_{PLO}$ и факторизации относительно полученного отношения эквивалентности на множестве всех бесконечных позитивных эквивалентностей получим структуру позитивной представимости линейных порядков $\langle \Sigma/\equiv_{PLO}; \trianglelefteq_{PLO}\rangle$, которая оказалась совершенно отличной от структуры негативной представимости линейных порядков $\langle \Pi/\equiv_{NLO}; \trianglelefteq_{NLO}\rangle$. Так, в структуре позитивной представимости имеется бесконечная позитивная степень, над которой не определим никакой линейный порядок (см. предложение 2.2), в то время как над любой бесконечной негативной степенью представим плотный порядок. Из предложения 2.2 также следует, что существует наименьшая позитивная степень. Изучению основных свойств структуры $\langle \Sigma/\equiv_{PLO}; \trianglelefteq_{PLO}\rangle$ посвящена работа [10], в которой, в частности, показано, что эта структура не имеет наибольшего элемента, но имеет максимальный (им будет степень $d(\mathrm{id}\,\omega)$), существует бесконечно убывающая цепь позитивных степеней и имеются несравнимые степени (аналог теоремы Фридберга — Мучника). Некоторые принципиальные вопросы, рассмотренные в [10], в настоящий момент открыты для структуры $\langle \Pi/\equiv_{NLO}; \trianglelefteq_{NLO}\rangle$.

Вместо линейных порядков можно также рассматривать другие объекты, в том числе универсальные алгебры (не фиксируя сигнатуру), которые широко используются в абстрактных типах данных и объектно-ориентированном программировании. Так, например, над любой негативной эквивалентностью представима конечно-порожденная конгруэнц-простая алгебра [11], тогда как существуют позитивные эквивалентности, над которыми представимы только тривиальные структуры [12] (заданные проектирующими функциями и функциями-константами, которые, очевидно, представимы над любой эквивалентностью).

С другой стороны, разумные расширения класса рассматриваемых эквивалентностей также позволяют получать структуры с содержательными свойствами. Так, для эффективно отделимых эквивалентностей (которые содержат и негативные, и позитивные) показано, что они являются основой теории отделимых алгебр — отделимость нумерованной алгебры равносильна ее аппроксимируемости эффективно отделимыми [14]. В этой же работе показаны примеры использования классических условий конечности с точки зрения представимости алгебр над эквивалентностями — для нумерованных алгебр с артиновыми решетками конгруэнций их отделимость равносильна эффективной отделимости.

Цель настоящего раздела — изучение простейших свойств структуры негативной представимости, а также роли и места плотных линейных порядков в этой структуре. Из изложенного выше вытекает важный факт.

Счетный плотный линейный порядок представим над любой бесконечной степенью.

Предложение 4.1. *Структура негативной представимости имеет наибольший элемент.*

Доказательство. Выберем в $\langle \Pi/\equiv_{NLO}; \trianglelefteq_{NLO}\rangle$ степень, содержащую $\mathrm{id}\,\omega$. Следующий простой факт ввиду его важности выделен в качестве отдельного утверждения.

Лемма 4.1. *Всякий негативно представимый линейный порядок имеет вычислимую нумерацию.*

Доказательство. Для конечных порядков это очевидно. Пусть $(\langle L; \preceq\rangle, \nu)$ — негативный бесконечный линейный порядок, $\mathrm{tr}(\nu)$ — характеристическая трансверсаль его нумерационной эквивалентности, f — вычислимая функция, взаимно однозначно отображающая ω на $\mathrm{tr}(\nu)$. Определим на ω вычислимое отношение $\preceq_\omega$ следующим образом: $x \preceq_\omega y \Leftrightarrow \nu f(x) \preceq \nu f(y)$. Очевидно, что $\langle \omega; \preceq_\omega\rangle \cong \langle L; \preceq\rangle$. Лемма доказана.

Таким образом, всякий негативно представимый бесконечный линейный порядок представим над степенью $d(\mathrm{id}\,\omega)$, которая является наибольшей в структуре негативной представимости. Предложение доказано.

Важно отметить [2], что наличие позитивного представления линейного порядка вовсе не влечет существования его вычислимого представления.

По теореме 2.1 над всякой бесконечной негативной эквивалентностью представим плотный линейный порядок, по предложению 2.3 существует негативная эквивалентность, над которой не представим порядок, имеющий непредельный элемент, что порождает естественный вопрос: «является ли структура негативной представимости бесконечной?».

Теорема 4.1. *Существует бесконечно убывающая цепь степеней негативной представимости линейных порядков.*

Доказательство. Пусть $\alpha \subseteq \omega$ и $\eta(\alpha) = \alpha^2 \cup \mathrm{id}\,\omega$. В [15] А. С. Морозовым доказано, что для коперечислимого, но невычислимого α негативная представимость линейного порядка L над $\eta(\alpha)$ (являющейся в этом случае негативной) равносильна тому, что L имеет вычислимое представление и обладает хотя бы одной предельной точкой.

Таким образом, к примеру, порядок ω не является негативно представимым над негативной эквивалентностью $\eta(\alpha)$ для любого коперечислимого невычислимого α. Любой дискретный линейный порядок (т. е. не содержащий предельных точек) также негативно не представим над $\eta(\alpha)$. Следовательно, структура негативной представимости содержит по крайней мере два элемента.

Рассмотрим эквивалентность вида $\eta_n = \eta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_1^2 \cup \dots \cup \alpha_n^2 \cup \operatorname{id}\omega$, где все α_i $(1 \leq i \leq n,\ n \geq 2)$ — коперечислимые невычислимые попарно не пересекающиеся множества. Покажем, что η_n — негативная эквивалентность.

Обозначим для каждого $1 \leq s \leq n$ через α_s^* пересечение дополнений всех α_i, кроме α_s, т. е. множество $\bigcap\limits_{1 \leq i \leq n,\ i \neq s} (\omega \setminus \alpha_i)$. Ясно, что α_s^* — перечислимое множество, являющееся объединением α_s и множества $\beta = \omega \setminus (\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n)$. Заметим, что для любой пары различных по модулю η_n натуральных чисел, лежащих в некотором α_s^*, хотя бы одно принадлежит β. Следовательно, для различных x, y имеет место $x \neq y \pmod{\eta_n} \Leftrightarrow \exists s, t : 1 \leq s \neq t \leq n (x \in \alpha_s^* \wedge y \in \alpha_t^*)$, что обеспечивает негативность η_n.

Лемма 4.2. *Для произвольного линейного порядка $\langle L; \leq_L \rangle$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\langle L; \leq_L \rangle$ негативно представим над η_n;*

(2) *$\langle L; \leq_L \rangle$ негативно представим и имеет хотя бы n предельных точек.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть порядок $\langle L; \leq_L \rangle$ негативно представим над η_n, т. е. он изоморфен негативному порядку $\langle \omega/\eta_n; \preceq \rangle$, определенному над η_n. Допустим, что L имеет менее n предельных точек. Тогда хотя бы одно из множеств $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, скажем α_s, представляет на фактор-множестве ω/η_n непредельный элемент, т. е. существуют такие натуральные a и b, что $a/\eta_n \prec \alpha_s \prec b/\eta_n$ (где $\prec = \preceq \setminus \operatorname{id}\omega$) и «между» a/η_n и b/η_n нет элементов, кроме α_s. Но тогда α_s, будучи пересечением двух перечислимых множеств $\{x \mid x \prec b\}$ и $\{x \mid a \prec x\}$, само перечислимо; противоречие.

(2) $\Rightarrow$ (1). По лемме 4.1 L имеет вычислимую нумерацию, поэтому с точностью до изоморфизма можно считать, что основным множеством L является множество натуральных чисел ω, на котором задан вычислимый линейный порядок $\preceq$. На $\langle \omega; \preceq \rangle$ зафиксируем n различных предельных точек (чисел, так как носитель порядка есть ω) $a_1 \prec \dots \prec a_n$. Разобьем ω на n вычислимых частей, которые назовем *блоками*, таким образом, что каждое a_i попадает в вычислимый блок A_i вместе с бесконечной частью (снизу/сверху или с обеих сторон), содержащей сходящуюся к a_i вычислимую последовательность. Например, если a_1 пределен снизу, то в качестве A_1 можно взять множество $\{x \mid x \preceq a_1\}$. Если a_1 пределен сверху, а a_2 пределен снизу, то фиксируем точку z в интервале $[a_1; a_2]$ и полагаем $A_1 = \{x \mid x \preceq z\}, A_2 = \{x \mid z \prec x \preceq a_2\}$. Важно обеспечить вычислимость каждого блока A_i и возможность построить внутри него вычислимую последовательность, сходящуюся к соответствующему предельному элементу a_i. Заметим, что таким образом исходный порядок фактически разбивается на n линейных подпорядков, представленных блоками, $\preceq$-отношения между которыми тривиальны: все элементы блока с меньшим номером $\prec$-меньше всех элементов блока с большим номером.

Построением по шагам покажем, что эквивалентность η_n имеет такое расширение η, содержащее ровно n вычислимых классов $\beta_1, \dots, \beta_n$, что для каждого $1 \leq i \leq n$ выполняется $\alpha_i \subset \beta_i$ и $\beta_i \setminus \alpha_i$ бесконечно.

Пусть $\delta_1, \dots, \delta_n$ — фиксированное семейство попарно не пересекающихся вычислимых бесконечных подмножеств перечислимого множества $\omega \setminus (\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n)$.

Шаг 0. Положим $\beta_i^0 = \delta_i \cup \{\min \alpha_i\}$, $1 \leq i \leq n$.

Шаг $s+1$. Берем наименьшее x из дополнения множества $\beta_1^s \cup \dots \cup \beta_n^s$ (конструкция обеспечивает эффективность выбора этого элемента) и начнем его проверять на предмет η_n-отвержения всеми β_i^s, кроме самое большее одного. Когда это произойдет добавляем x к тому β_i^{s+1}, которое его не отвергло.

Конец шага $s+1$.

Определим $\beta_i = \bigcup\limits_{s\in\omega} \beta_i^s$.

Индукцией по шагам построения легко показать, что каждый шаг успешно завершается с занесением текущего x в одно из β_i^s.

Каждый блок A_i является негативно представимым линейным порядком, содержащим хотя бы одну предельную точку, а потому он (по теореме 2.1 из [15], согласно которой всякий вычислимый линейный порядок, имеющий как минимум один предельный элемент, негативно представим над любой эквивалентностью типа $\eta(\alpha)$ для коперечислимого невычислимого α) представим над негативной эквивалентностью $\alpha_i^2 \cup \mathrm{id}\,\beta_i$, определенной на вычислимом множестве β_i. Теперь, объединив все β_i и доопределив порядок на все ω (любой элемент из β_i меньше любого элемента из β_j для всех $1 \le i < j \le n$), получаем негативное представление линейного порядка $\langle L; \le_L\rangle$ над η_n. Лемма доказана.

Напомним, что $\lhd_{NLO} = \unlhd_{NLO} \setminus \mathrm{id}\,\Pi/\equiv_{NLO}$.

Пусть $\eta_0 = \mathrm{id}\,\omega$, $\eta_1 = \alpha_1^2 \cup \mathrm{id}\,\omega, \dots, \eta_n = \alpha_1^2 \cup \dots \cup \alpha_n^2 \cup \mathrm{id}\,\omega, \dots$, где все α_i коперечислимые невычислимые и попарно не пересекающиеся. Тогда согласно лемме 4.2 $\dots \lhd_{NLO} d(\eta_n) \lhd_{NLO} \dots \lhd_{NLO} d(\eta_1) \lhd_{NLO} d(\eta_0)$. Теорема доказана.

Заметим, что степень $d(\eta_0) = d(\mathrm{id}\,\omega)$ наибольшая в структуре негативной представимости.

Следствие 4.1. *Структура бесконечных степеней негативной представимости линейных порядков бесконечна.*

Следствие 4.2. *Структура бесконечных степеней негативной представимости линейных порядков содержит множество степеней, упорядоченное по типу* $1+\omega^*$.

Доказательство. Пусть η — негативная эквивалентность, каждый смежный класс которой невычислим. Например, $\eta = \{\langle x, y\rangle \mid \gamma_x \triangle \gamma_y \subseteq \alpha\}$, где γ — каноническая нумерация конечных множеств, $\triangle$ — симметрическая разность и α — невычислимое коперечислимое множество. Тогда η — негативная эквивалентность, каждый смежный класс которой невычислим (см. предложение 2.3). Рассмотрим степень $d(\eta)$ и бесконечно убывающую цепь степеней $\dots \lhd_{NLO} d(\eta_n) \lhd_{NLO} \dots \lhd_{NLO} d(\eta_1) \lhd_{NLO} d(\eta_0)$, построенную в теореме 4.1. Заметим, что всякий линейный порядок, представимый над степенью $d(\eta)$, имеет бесконечное количество предельных точек. Допустим противное, и пусть $\langle \omega/\eta; \preceq\rangle$ — негативный линейный порядок с конечным числом предельных элементов. Тогда почти любой элемент этого порядка (за исключением конечного числа предельных) непредельный, т. е. имеет как непосредственного $\preceq$-предшественника, так и непосредственного $\preceq$-последователя, а потому вычислим (см. последний абзац доказательства предложения 2.3). С другой стороны, для всякого $n \in \omega$ существует линейный порядок, а именно негативно представимый и имеющий ровно n предельных точек, который представим над степенью $d(\eta_n)$, но по лемме 4.2 не представим над $d(\eta_{n+1})$ и тем более над $d(\eta)$. Таким образом, существует бесконечно убывающая цепь степеней негативной представимости линейных порядков $\cdots \triangleleft_{NLO} d(\eta_n) \triangleleft_{NLO} \cdots \triangleleft_{NLO} d(\eta_1) \triangleleft_{NLO} d(\eta_0)$, целиком расположенная над степенью $d(\eta)$. Следствие доказано.

5. Негативные представления поля рациональных чисел

Напомним [2, гл. 6, § 1], что если $\langle A; \Sigma \rangle$ — счетная алгебра вычислимой сигнатуры, то ее *нумерацией* будем называть всякое такое отображение ν множества натуральных чисел ω на основное множество алгебры A, для которого существует вычислимое семейство F вычислимых функций, представляющих операции Σ алгебры A в нумерации ν, т. е. всякая операция $\sigma \in \Sigma$ представляется соответствующей ей функцией $f \in F$ $(\forall \bar{x} \, (\sigma \nu \bar{x} = \nu f \bar{x}))$. Если η — эквивалентность на ω, то алгебру $\langle A; \Sigma \rangle$ будем называть *представимой над* η, если существует нумерация этой алгебры с нумерационной эквивалентностью, равной η, т. е., равносильно, найдется такое вычислимое семейство F вычислимых функций, согласованных с эквивалентностью η (из η-эквивалентности аргументов следует η-эквивалентность значений), что $\langle A; \Sigma \rangle$ изоморфна фактор-алгебре вычислимой алгебры $\langle \omega; F \rangle$ по конгруэнции η. Всякая алгебра, представимая над эквивалентностью η, называется *η-алгеброй.* Заметим, что любая не более чем счетная алгебра эффективной сигнатуры имеет нумерацию (например, индуцированную геделевской нумерацией абсолютно свободной Σ-алгебры от счетного множества свободных порождающих, так как любая Σ-алгебра есть гомоморфный образ абсолютно свободной от подходящего числа свободных порождающих).

Алгебра называется *вычислимо* (*позитивно*, *негативно*) *представимой*, если она является η-алгеброй для подходящей вычислимой (позитивной, негативной) эквивалентности η.

Пусть $\mathbf{Q} = \langle Q; +, * \rangle$ — поле рациональных чисел. Заметим, что всякая позитивная нумерация поля вычислима, так как любое поле — простая алгебра [2]. В то же время в [16] доказано существование невычислимой негативной нумерации поля $\mathbf{Q}$. Такие нумерации являются весьма специфическими, так как далеко не над каждой негативной эквивалентностью определимо поле $\mathbf{Q}$. К примеру, эквивалентность хотя бы с одним вычислимым смежным классом назовем *локально вычислимой.* Соответственно нумерацию назовем *локально вычислимой*, если таковой является ее нумерационная эквивалентность. Имеет место

Теорема 5.1. *Всякая локально вычислимая нумерация поля рациональных чисел вычислима.*

Доказательство. Пусть ν — локально вычислимая нумерация поля $\mathbf{Q}$ и вычислимые функции $\oplus, \odot$ обозначают представления операций $+, *$ соответственно поля $\langle Q; +, * \rangle$ в нумерации ν. Допустим, что m/η — вычислимый смежный класс нумерационной эквивалентности $\eta = \{\langle x, y \rangle \mid \nu x = \nu y\}$. Покажем, что в этом случае любой η-класс n/η также вычислим. В самом деле, если $\nu m = a$ и $n/\eta = b$, то зафиксируем некоторый ν-номер, скажем k, рационального числа $a - b$, т. е. $k \in \nu^{-1}(a - b)$. Тогда $x \in n/\eta \Leftrightarrow x \oplus k \in m/\eta$, поэтому вопрос «$\nu x = \nu n$?» алгоритмически разрешим.

Теперь зафиксируем некоторый ν-номер e рационального числа 1 (мультипликативной единицы поля $\mathbf{Q}$). Из предыдущего следует, что e/η — вычислимое множество. Рассмотрим две вычислимые последовательности: $\dots, -2e, -e, 0, e, 2e, \dots$, где ne обозначает n-е аддитивное кратное числа e, и $-1/2, -1/3, \dots, 0,$

$\dots, 1/3, 1/2$, где $1/n$ (с соответствующим знаком) обозначает «первое такое z, которое подтверждает условие $z \odot ne \in e/\eta$».

Легко заметить, что процедура разрешения каждого класса ne равномерно зависит от n. Действительно, для того чтобы узнать «$x \in ne/\eta$?» (предварительно исключив случай $\nu x = 0$), достаточно убедиться в справедливости равносильного соотношения «$x \odot 1/n \in e/\eta$?». Аналогично процедура разрешения каждого класса $(1/n)/\eta$ также равномерна по n.

Далее, для любого рационального числа a, отличного от нуля и представимого в виде дроби p/q (не обязательно несократимой), можно эффективно найти некоторый его ν-номер, взяв p-кратное аддитивное от $1/qe$. Окончательная процедура распознавания будет следующей.

Для двух данных натуральных x, y убедимся в том, что оба они не лежат в смежном классе, нумерующем число нуль (иначе задача распознавания решена), и если это так, найдем такие $p_1/q_1, p_2/q_2$, что $x \in (p_1/q_1)/\eta, y \in (p_2/q_2)/\eta$. Для этого проверим условия $x \odot q_1/p_1 \in e/\eta$ и $y \odot q_2/p_2 \in e/\eta$, что гарантированно произойдет через конечное число шагов. Если соответствующие дроби равны, то $\nu x = \nu y$, иначе $\nu x \neq \nu y$.

Корректность описанных алгоритмов основана на существовании и единственности аддитивно и мультипликативно (кроме нуля) обратных элементов. Теорема доказана.

Обозначим через $\mathbf{Q}_{\leq}$ упорядоченное поле рациональных чисел (вместе с естественным порядком).

Следствие 5.1. *Существует негативная эквивалентность, над которой негативно не представимо упорядоченное поле* $\mathbf{Q}_{\leq}$.

В самом деле, если η — невычислимая негативная эквивалентность, имеющая хотя бы один вычислимый смежный класс (например, $\eta = \alpha^2 \cup \mathrm{id}\,\omega$, где α невычислимое коперечислимое), то $\mathbf{Q}_{\leq}$ над η не представимо, так как иначе над η было бы представимо и поле $\mathbf{Q}$, что означало бы вычислимость η.

Таким образом, свойство «универсальности» счетных плотных линейных порядков, заключающееся в их негативной определимости над любой бесконечной негативной эквивалентностью, в случае поля рациональных чисел не имеет места. Тем не менее, используя эффективность характеристических трансверсалей негативных эквивалентностей, можно ввести метрические свойства и развить аналог упорядоченного поля рациональных чисел над любой бесконечной негативной эквивалентностью на основе частично вычислимых функций.

Пусть η — бесконечная негативная эквивалентность и $\langle \omega/\eta; \trianglelefteq \rangle$ — негативный линейный порядок, изоморфный порядковому типу τ рациональных чисел (существующий по теореме 2.1). Выберем любое вычислимое представление порядкового типа τ, которое обозначим через $\langle \omega; \preceq_Q \rangle$, т. е. на ω зададим вычислимый плотный линейный порядок $\preceq_Q$.

Напомним, что нумерованная модель (M, μ) называется *эффективно сводимой* к нумерованной модели (N, ν), если существует изоморфизм φ из M на N, являющийся морфизмом соответствующих нумерованных множеств, т. е. для подходящей вычислимой функции f имеет место $\varphi\mu = \nu f$.

Предложение 5.1. *Порядок* $\langle \omega; \preceq_Q \rangle$ *эффективно сводится к* $\langle \omega/\eta; \trianglelefteq \rangle$.

Доказательство. Зафиксируем некоторый эффективный пересчет $\mathrm{tr}(\eta) = \{t_0, t_1, \dots\}$ и построим эффективное отображение f множества натуральных чисел на $\mathrm{tr}(\eta)$ следующим образом.

Шаг 0. $f(0) = t_0$.

Шаг 1. Если t_1 строго $\lhd$-больше (меньше) t_0, то эффективно выбираем первое натуральное n, строго $\prec_Q$-большее (соответственно $\prec_Q$-меньшее) 0, и полагаем $f(n) = t_1$.

Пусть $A_s = \{a_{i_1} \prec_Q \cdots \prec_Q a_{i_k}\}$ — строго $\preceq_Q$-упорядоченная область определенности функции f, построенная к концу шага s, и соответственно $\alpha_s = \{f(a_{i_1}) \lhd \cdots \lhd f(a_{i_k})\}$ — строго $\unlhd$-упорядоченная область значений f.

Шаг $s+1$. Если $s+1$ четное, то выбираем первое натуральное число a из $\omega \setminus A_s$ и посвятим данный шаг нахождению его f-образа. Для этого «координатизируем» a относительно A_s, т. е. найдем такое натуральное m, что $a_{i_m} \prec_Q a \prec_Q a_{i_{m+1}}$, и положим $f(a) = t$, где t — первое в пересчете $\mathrm{tr}(\eta)$ такое число, что справедливо $f(a_{i_m}) \lhd t \lhd f(a_{i_{m+1}})$ (заметим, что в силу плотности порядка $\langle \omega/\eta; \unlhd\rangle$ такое число существует, а ввиду его негативности это число найдется эффективно).

Если $s+1$ нечетное, то выбираем первое в пересчете $\mathrm{tr}(\eta)$ число t из $\omega \setminus \alpha_s$ и аналогично предыдущему посвятим данный шаг нахождению f-прообраза t, для чего так же, как и в предыдущем случае, эффективно определим такое m, что $f(a_{i_m}) \lhd t \lhd f(a_{i_{m+1}})$, и положим $f(a) = t$, где a — наименьшее натуральное число из $\omega \setminus A_s$, удовлетворяющее условию $a_{i_m} \prec_Q a \prec_Q a_{im+1}$.

Конец шага $s+1$.

Очевидно, что вычислимая функция f, описанная приведенной челночной процедурой, осуществляет эффективное изоморфное сведение порядка $\langle \omega; \preceq_Q\rangle$ к $\langle \omega/\eta; \unlhd\rangle$. Корректность конструкции обеспечивается плотностью обоих порядков, гарантирующей успешное завершение каждого шага.

По построению отображение φ из $\langle \omega; \preceq_Q\rangle$ на $\langle \omega/\eta; \unlhd\rangle$, определенное правилом $\varphi(n) = f(n)/\eta$, есть изоморфизм, являющийся морфизмом, так как φ эффективно поддерживается на номерах вычислимой функцией f. Предложение доказано.

Важное замечание. Заметим, что f-образ всякой вычислимой $\preceq_Q$-щели вычислим, так как f-образ $\preceq_Q$-щели в $\langle \omega/\eta; \unlhd\rangle$ делит ω/η на два вычислимо перечислимых класса, являющихся η-замыканиями соответствующих трансверсальных элементов, все элементы одного из которых строго $\unlhd$-меньше всех элементов другого класса. Однако f-образ вычислимого $\preceq_Q$-сечения может и не быть вычислимым. В самом деле, пусть η — негативная эквивалентность с невычислимым смежным классом γ и $f(m) = \min \gamma$, являющимся трансверсальным элементом для η. Тогда число m является рубежом двух вычислимых сечений в $\langle \omega; \preceq_Q\rangle$, в одном из которых m $\preceq_Q$-наибольший в нижнем классе сечения (назовем его A), в другом — $\preceq_Q$-наименьший в верхнем классе соответствующего $\preceq_Q$-сечения (которое обозначим через B). Допустим, что f-образы обоих этих сечений вычислимы. Но тогда как $f(A)$, так и $f(B)$ — вычислимые η-замкнутые множества, вычислимое пересечение которых есть γ; противоречие.

Пусть $\langle A; \Sigma\rangle$ — частичная алгебра. Эквивалентность θ на основном множестве этой алгебры назовем *конгруэнцией*, если для любой Σ-операции и любых наборов соответствующей местности из эквивалентности аргументов и определенности значений следует их (значений) эквивалентность, т. е.

$$\forall \sigma \in \Sigma[\forall \bar{x}, \bar{y}(\bar{x} = \bar{y} \pmod{\theta} \wedge \sigma\bar{x}\downarrow \wedge \sigma\bar{y}\downarrow \rightarrow \sigma\bar{x} = \sigma\bar{y} \pmod{\theta})].$$

Рассмотрим вычислимое упорядоченное поле рациональных чисел $\mathbf{Q}_{\leq} = \langle \omega; +, *, \leq \rangle$, заданное на множестве ω. Выберем любую бесконечную негативную эквивалентность η и зафиксируем плотный линейный порядок $\langle \omega/\eta; \trianglelefteq \rangle$ типа τ, негативно определенный над ней. По предложению 5.1 существует эффективный изоморфизм $\varphi : \langle \omega \leq \rangle \to \langle \omega/\eta; \trianglelefteq \rangle$, поддерживаемый на номерах подходящей вычислимой функцией f.

Построим частичное η-поле следующим образом. Определим на $\mathrm{tr}(\eta)$ две операции $\oplus, \otimes$:

$$x \oplus y = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)), \quad x \otimes y = f(f^{-1}(x) * f^{-1}(y)).$$

Очевидно, что в частичной алгебре $\langle \omega; \oplus, \otimes \rangle$ эквивалентность η есть конгруэнция, так как значения операций определены только на η-трансверсальных элементах. Рассмотрим фактор-поле $\langle \omega/\eta; \oplus, \otimes \rangle$ этого частичного поля вместе с линейным порядком $\trianglelefteq$. Тогда, очевидно, справедливо

Предложение 5.2. *Вычислимая функция f осуществляет эффективный изоморфизм $\mathbf{Q}_{\leq}$ на упорядоченное поле $\langle \omega/\eta; \oplus, \otimes, \trianglelefteq \rangle$.*

Теперь в рамках $\langle \omega/\eta; \oplus, \otimes, \trianglelefteq \rangle$ (для любой бесконечной негативной эквивалентности η) можно рассматривать основные понятия, касающиеся упорядоченного поля рациональных чисел, в том числе эффективные пределы и вычислимые сечения.

Отметим, что принципиальный вопрос о существовании невычислимого негативного представления упорядоченного поля рациональных чисел в настоящий момент открыт.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
2. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
3. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Науч. книга, 1999.
4. *Мальцев А. И.* К общей теории алгебраических систем // Мат. сб. 1954. Т. 35, № 1. С. 3–20.
5. *Мальцев А. И.* Конструктивные алгебры. I // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 3–60.
6. *Мальцев А. И.* Позитивные и негативные нумерации // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160, № 2. С. 278–280.
7. *Мартин-Леф П.* Очерки по конструктивной математике. М.: Мир, 1975.
8. *Feiner L.* Hierarchies of Boolean algebras // J. Symb. Log. 1970. V. 35, N 2. P. 365–373.
9. *Morozov A. S., Truss J. K.* On computable automorphisms of the rational numbers // J. Symb. Log. 2001. V. 66, N 3. P. 1458–1470.
10. *Fokina E. B., Khoussainov B., Semukhin P., Turetsky D.* Linear orders realized by C. E. Equivalence relations // J. Symb. Log. 2016. V. 81, N 2. P. 463–482.
11. *Касымов Н. Х.* Об алгебрах над негативными эквивалентностями // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 1. С. 76–80.
12. *Касымов Н. Х.* Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 3. С. 145–176.
13. *Касымов Н. Х., Ибрагимов Ф. Н.* Структурная характеризация рекурсивно отделимых моделей // Докл. АН РУз. 1998. № 11. С. 14–16.
14. *Касымов Н. Х.* О гомоморфизмах на эффективно отделимые алгебры // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 47–66.
15. *Касымов Н. Х., Морозов А. С.* Об определимости линейных порядков над негативными эквивалентностями // Алгебра и логика. 2016. Т. 55, № 1. С. 37–57.

16. *Khoussainov B., Slaman T., Semukhin P.* Π_1^0-Presentations of algebras // Archive Math. Log. 2006. V. 45, N 6. P. 769–781.

Статья поступила 16 января 2017 г.

Касымов Надимулла Хабибуллаевич, Дадажанов Рузмат Норматович
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
ул. Университетская, 4, Ташкент 100174, Республика Узбекистан
nadim59@mail.ru, dadajonovrn@mail.ru