



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Трямкин, Свойство морфизма субэллиптических уравнений на группе поворотов-сдвигов, *Сиб. матем. журн.*, 2015, том 56, номер 5, 1171–1194

DOI: 10.17377/smzh.2015.56.516

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.137.164.43

20 ноября 2024 г., 10:37:00



СВОЙСТВО МОРФИЗМА СУБЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ГРУППЕ ПОВОРОТОВ–СДВИГОВ

М. В. Трямкин

Аннотация. Устанавливается свойство морфизма субэллиптических уравнений для отображений с ограниченным искажением, область определения которых лежит в группе поворотов-сдвигов, а область значений — в группе Гейзенберга. В качестве следствия показано, что всякое непостоянное локально ограниченное отображение с ограниченным искажением, области определения и значений которого лежат в группе поворотов-сдвигов, непрерывно, открыто и дискретно.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.516

Ключевые слова: группа поворотов-сдвигов, отображение с ограниченным искажением, горизонтальная дифференциальная форма, формула коплощади, формула замены переменной.

§ 1. Введение

В 60-е гг. прошлого века Ю. Г. Решетняк заложил основы теории отображений с ограниченным искажением в евклидовых пространствах (см. [1]). Пусть Ω — область в пространстве \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Отображение $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса Соболева $W_{n,\text{loc}}^1(\Omega)$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если выполняется неравенство $|Df(x)|^n \leq KJ(x, f)$ для п. в. $x \in \Omega$, где $K \geq 1$ — постоянная, $Df(x)$ — матрица Якоби отображения f в точке x , $|Df(x)|$ и $J(x, f)$ — ее операторная норма и якобиан соответственно. Ю. Г. Решетняк установил, что рассматриваемые отображения, если они отличны от постоянных, можно переопределить на множестве нулевой меры так, чтобы они стали непрерывными, открытыми и дискретными [1, гл. 2, § 6]. Фундаментальную роль в доказательстве этих свойств играет свойство морфизма решений некоторых эллиптических уравнений [1, гл. 2, теорема 5.1]: если $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ — отображение с ограниченным искажением, где Ω, Ω' суть открытые множества в \mathbb{R}^n , и функция $v \in C^2(\Omega')$ является решением уравнения

$$\operatorname{div}(|\nabla v(y)|^{n-2} \nabla v(y)) = 0,$$

то композиция $u = v \circ f$ служит обобщенным решением уравнения

$$\operatorname{div} \mathcal{A}(x, \nabla u(x)) = 0,$$

где $\mathcal{A}(x, \xi) = \langle \theta(x)\xi, \xi \rangle^{(n-2)/2} \theta(x)\xi$. Здесь угловые скобки обозначают скалярное произведение в \mathbb{R}^n , а θ — матричная функция, определенная почти всюду в Ω следующим образом:

$$\theta(x) = \begin{cases} (Df(x)^* Df(x))^{-1} J(x, f)^{2/n}, & \text{если } J(x, f) \neq 0, \\ \operatorname{Id}, & \text{если } J(x, f) = 0. \end{cases}$$

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.В25.31.0029).

В свою очередь, само свойство морфизма устанавливается на основе того факта, что для дифференциальных форм ω степени $n - 1$ справедливо соотношение

$$d(f^{\#}\omega) = f^{\#}d\omega, \quad (1)$$

где внешний дифференциал d понимается в смысле распределений. В евклидовых пространствах равенство (1) доказывается с помощью аппроксимации f гладкими отображениями (см., например, [2, 3]).

Проблемы, возникшие в теории дифференциальных уравнений в частных производных, естественным образом привели к задачам субримановой геометрии. Те же самые задачи возникли в геометрической теории управления, робототехнике, нейробиологии и др. Почти одновременно с этими задачами стали изучаться вопросы геометрического анализа на субримановых структурах (см. [4–7]).

Отметим несколько работ, посвященных изучению отображений с ограниченным искажением на субримановых многообразиях. Авторы статьи [8] исследовали упомянутые отображения на группах Карно, однако определение класса Соболева, которое они использовали, не может считаться естественным: в [8] требуется, чтобы компоненты отображения имели обобщенные производные вдоль негоризонтальных векторных полей. Н. С. Даирбеков (см., например, [9, 10]) на основе подхода Ю. Г. Решетняка получил основные топологические свойства отображений с ограниченным искажением на группе Гейзенберга. В работе [11] показано, что доказательство соотношения (1) на группах Карно ведет к нежелательным последствиям: гладкие отображения, аппроксимирующие f , не сохраняют горизонтальную структуру. В связи с этим возникла необходимость в выработке нового подхода к проверке равенства (1).

В [12] С. К. Водопьянов предложил новую идею доказательства соотношения (1) на двухступенчатых группах Карно. Метод, разработанный в [12], основан на рафинированном использовании формулы замены переменной с топологической степенью и позволяет установить (1), не используя аппроксимацию f гладкими функциями.

В настоящей работе с использованием подхода, развитого в [12], доказано равенство (1) и из него выведено свойство морфизма для отображений с ограниченным искажением на группе поворотов-сдвигов, которая входит в список трехмерных групп Ли, наделенных левоинвариантной субримановой структурой (см. [13]). Эта группа находит приложение, например, в задачах моделирования восприятия изображений зрительной системой человека (см. [14, 15]).

В теореме 1 мы формулируем свойство морфизма для отображений с ограниченным искажением $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}^1$, где $\Omega \subset \mathcal{RT}$. В теореме 2 при условии локальной ограниченности показано, что отображение с ограниченным искажением $F : \Omega \rightarrow \mathcal{RT}$ непрерывно, открыто и дискретно.

Автор благодарен профессору С. К. Водопьянову за постановку задачу и постоянное внимание к работе, а также признателен Д. В. Исангуловой, которая прочла первоначальный вариант рукописи и сделала ряд замечаний, способствовавших улучшению текста. Автор благодарен К. Фасслеру за указание на работу [16].

§ 2. Предварительные сведения

Группа поворотов-сдвигов \mathcal{RT} — это совокупность точек в \mathbb{R}^3 с групповой операцией

$$(x_1, y_1, \theta_1) \cdot (x_2, y_2, \theta_2) = (x_1 + x_2 \cos \theta_1 - y_2 \sin \theta_1, y_1 + x_2 \sin \theta_1 + y_2 \cos \theta_1, \theta_1 + \theta_2).$$

Легко видеть, что точка $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ служит единицей группы \mathcal{RT} .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Под группой поворотов-сдвигов в литературе также понимают группу $SE(2)$ движений евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 , сохраняющих ориентацию. Последняя диффеоморфна $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. Определенная выше группа \mathcal{RT} является универсальной накрывающей группы $SE(2)$.

Базисные левоинвариантные векторные поля имеют вид

$$\begin{aligned} X_1(g) &= (l_g)_*(\mathbf{0}) \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2(g) &= (l_g)_*(\mathbf{0}) \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ X_3(g) &= (l_g)_*(\mathbf{0}) \left\langle \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $g = (x, y, \theta) \in \mathcal{RT}$, $l_g : \mathcal{RT} \ni g' \mapsto g \cdot g'$ — левый сдвиг на элемент g , $(l_g)_*(\mathbf{0}) : T_0\mathcal{RT} \rightarrow T_g\mathcal{RT}$ — риманов дифференциал отображения l_g в единице группы. Из (2) следует, что справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$[X_1, X_2] = -X_3, \quad [X_3, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_3] = 0. \quad (3)$$

Равенства (3) означают, что алгебра Ли \mathfrak{g} левоинвариантных векторных полей группы поворотов-сдвигов представляется в виде $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, где $\mathfrak{g}_1 = \text{span}\{X_1, X_2\}$, $\mathfrak{g}_2 = \text{span}\{X_3\}$.

Зададим в касательном пространстве к единице группы скалярное произведение $\mathfrak{g}_0 : T_0\mathcal{RT} \times T_0\mathcal{RT} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая $\mathfrak{g}_0(X_i(\mathbf{0}), X_j(\mathbf{0})) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Чтобы получить левоинвариантную риманову метрику $\mathfrak{g}_g : T_g\mathcal{RT} \times T_g\mathcal{RT} \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in \mathcal{RT}$, на всей группе, «разнесем» это скалярное произведение согласно правилу

$$\mathfrak{g}_g((l_g)_*(\mathbf{0})\langle X_i(\mathbf{0}) \rangle, (l_g)_*(\mathbf{0})\langle X_j(\mathbf{0}) \rangle) = \mathfrak{g}_0(X_i(\mathbf{0}), X_j(\mathbf{0})), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

т. е. $\mathfrak{g}_g(X_i(g), X_j(g)) = \delta_{ij}$. Теперь можно задать на группе поворотов-сдвигов субриманову структуру: алгебра \mathfrak{g}_1 определяет вполне неголономное распределение $H\mathcal{RT}$ в касательном расслоении $T\mathcal{RT}$ со слоями¹⁾ $H_g\mathcal{RT} = \text{span}\{X_1(g), X_2(g)\}$, $g \in \mathcal{RT}$, а соответствие $g \mapsto \mathfrak{g}_g$, которое каждой точке $g \in \mathcal{RT}$ сопоставляет скалярное произведение в касательном пространстве к этой точке, определяет левоинвариантную риманову метрику в распределении $H\mathcal{RT}$. Группа \mathcal{RT} , наделенная указанной субримановой структурой, является пространством Карно — Каратеодори (см., например, [17, разд. 1]). Для скалярного произведения используем стандартное обозначение $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Расстояние Карно — Каратеодори $d_c(g, g')$ между точками $g, g' \in \mathcal{RT}$ определяется как точная нижняя грань длин всех горизонтальных кривых, соединяющих точки g, g' . Абсолютно непрерывная кривая называется *горизонтальной*, если ее касательный

¹⁾Подрасслоение $H\mathcal{RT}$ называется также *горизонтальным*, а слой $H_g\mathcal{RT}$ — *горизонтальным касательным пространством в точке g*.

вектор почти всюду принадлежит горизонтальному подрасслоению. Метрика Карно — Каратеодори левоинвариантна, т. е. $d_c(g, g') = d_c(\mathbf{0}, g^{-1}g')$. Пользуясь формулой для подсчета хаусдорфовой размерности пространства Карно — Каратеодори относительно метрики d_c (см. [17, теорема 3.1; 18, теорема 2]), получаем, что для группы поворотов-сдвигов хаусдорфова размерность равна $\dim \mathfrak{g}_1 + 2 \dim \mathfrak{g}_2 = 4$. Определим также субриманову квазиметрику $d_2(g', g) = \max\{(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^{1/2}, |\xi_3|^{1/2}\}$, где $g' = \exp(\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3)(g)$. Использование этой квазиметрики обусловлено тем, что в формуле коплощади [19, теорема 6.1], которая играет важную роль в доказательстве одного из утверждений настоящей статьи, фигурирует мера Хаусдорфа, определенная относительно d_2 . Через $\text{Box}_2(g, r)$ обозначим множество $\{g' \in \mathcal{RT} : d_2(g', g) < r\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Положим $d_\infty(g', g) = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|, |\xi_3|^{1/2}\}$. В силу [17, теорема 2.8] величины d_∞ и d_c локально эквивалентны, т. е. в некоторой ограниченной окрестности $U \subset \mathcal{RT}$ точки g справедливо соотношение $c_1 d_\infty(g', g'') \leq d_c(g', g'') \leq c_2 d_\infty(g', g'')$ для всех $g', g'' \in U$ с некоторыми постоянными $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$, не зависящими от g', g'' . Легко видеть из определений, что квазиметрики d_∞ и d_2 также локально эквивалентны. Следовательно, квазиметрика d_2 локально эквивалентна метрике d_c .

Через \mathcal{H}_e^N обозначим N -мерную меру Хаусдорфа, определенную стандартным образом (см., например, [20, гл. 2, п. 2.1]) относительно евклидовой метрики. Сферическую меру Хаусдорфа $\mathcal{H}_{sr}^\nu(A)$, $\nu > 0$, $A \subset \mathcal{RT}$, относительно субримановой квазиметрики d_2 определим по формуле (см. [19, определение 3.12])

$$\mathcal{H}_{sr}^\nu(A) = \omega_\nu \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^\nu \mid \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(g_i, r_i) \supset A, g_i \in A, 0 < r_i \leq \delta \right\},$$

где ω_ν — нормирующий множитель, зависящий только от показателя размерности ν . Обратим внимание на отличие от стандартного определения сферической меры: в нашем случае центры g_i «шаров» $\text{Box}_2(g_i, r_i)$, покрывающих множество A , принадлежат этому множеству.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как известно (см., например, [21, гл. VII, § 1, п. 2, теорема 1]), на локально компактной группе Ли существует единственная с точностью до постоянного множителя лево- (соответственно право-)инвариантная мера (так называемая левая (соответственно правая) мера Хаара). Это значит, что на группе поворотов-сдвигов не возникает трудностей с выбором адекватной меры: в частности, меры \mathcal{H}_{sr}^4 и \mathcal{H}_e^3 пропорциональны, поскольку обе левоинвариантны.

Пусть Ω — область в \mathcal{RT} . Функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит пространству Соболева $W_p^1(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, если $u \in L_p(\Omega)$ и существуют обобщенные производные $X_1 u$, $X_2 u$ вдоль горизонтальных векторных полей, принадлежащие классу $L_p(\Omega)$. Пишем $u \in W_{p, \text{loc}}^1(\Omega)$, если $u \in W_p^1(U)$ для всякой области $U \Subset \Omega$, где $U \Subset \Omega$ означает, что $\bar{U} \subset \Omega$ и множество \bar{U} компактно. Локально суммируемая функция $X_i u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется обобщенной производной функции u вдоль векторного поля X_i , если $\int_\Omega X_i u \varphi d\mathcal{H}_{sr}^4 = - \int_\Omega u X_i^* \varphi d\mathcal{H}_{sr}^4$ для любой пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Здесь X_i^* — формально сопряженный к X_i оператор, определенный правилом

$$\int_\Omega X_i \eta \vartheta d\mathcal{H}_{sr}^4 = \int_\Omega \eta X_i^* \vartheta d\mathcal{H}_{sr}^4$$

для всех $\eta, \vartheta \in C_0^\infty(\Omega)$. Легко видеть, что на группе поворотов-сдвигов $X_i^* = X_i$. Для гладкой функции u (или имеющей обобщенные производные вдоль полей X_1, X_2) определим горизонтальный градиент $\nabla_h u = (X_1 u)X_1 + (X_2 u)X_2$ и его длину $|\nabla_h u| = \langle \nabla_h u, \nabla_h u \rangle^{1/2} = \sqrt{(X_1 u)^2 + (X_2 u)^2}$. Пусть в области $\Omega \subset \mathcal{RT}$ определено векторное поле $X = u_1 X_1 + u_2 X_2$. Если $u_1, u_2 \in C^1(\Omega)$, то горизонтальная дивергенция поля X определяется как $\operatorname{div}_h X = X_1 u_1 + X_2 u_2$. Если коэффициенты u_1, u_2 локально интегрируемы на Ω , то *горизонтальной дивергенцией поля X в смысле распределений* называется локально интегрируемая функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$\int_{\Omega} \langle X, \nabla_h \varphi \rangle dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3 = - \int_{\Omega} u \varphi dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3 \tag{4}$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Здесь и далее dX_1, dX_2 и dX_3 — это 1-формы, двойственные к полям X_1, X_2 и X_3 . Для дивергенции в смысле распределений также используем обозначение $\operatorname{div}_h X$, которое оправдано, поскольку обычная горизонтальная дивергенция гладкого векторного поля будет в то же время и дивергенцией в смысле распределений.

Следующее определение, сформулированное для общего случая многообразий Карно²⁾, можно найти, например, в [22, определение 6.1]. Если Ω — область в пространстве \mathbb{R}^n , то эта формулировка совпадает с определением классов Соболева, которое дано Ю. Г. Решетняком в [23].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область, (\mathbb{X}, r) — полное метрическое пространство. Отображение $f : \Omega \rightarrow \mathbb{X}$ принадлежит классу Соболева $W_{p,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{X})$, если выполнены следующие условия:

(А) функция $[f]_z : \Omega \ni x \mapsto r(f(x), z)$ принадлежит пространству $W_{p,\text{loc}}^1(\Omega)$ для всякого $z \in \mathbb{X}$;

(В) семейство функций $\nabla_h([f]_z)_{z \in \mathbb{X}}$ имеет мажоранту в $L_{p,\text{loc}}(\Omega)$, т. е. существует функция $h \in L_{p,\text{loc}}(\Omega)$, не зависящая от z , такая, что $|\nabla_h([f]_z)(x)| \leq h(x)$ для п. в. $x \in \Omega$.

В настоящей работе роль пространства \mathbb{X} будет играть либо группа \mathcal{RT} , либо группа Гейзенберга \mathbb{H}^1 . Однако удобнее пользоваться другим определением, которое «почти» эквивалентно определению 1 (см. замечание 5).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область, $1 \leq p < \infty$, \mathbb{G} — группа \mathcal{RT} или \mathbb{H}^1 . Отображение $f : \Omega \rightarrow \mathbb{G}$ принадлежит классу Соболева $W_{p,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$, если выполнены следующие условия:

(а) $d_{\mathbb{G}}(\mathbf{0}, f(g)) \in L_{p,\text{loc}}(\Omega)$, где $d_{\mathbb{G}}$ — метрика Карно — Каратеодори на группе \mathbb{G} ;

(б) $f \in \text{ACL}(\Omega)$, т. е. для всякой области $U \Subset \Omega$ и каждого слоения Γ_i , определенного левоинвариантным векторным полем $X_i, i = 1, 2$, ограничение $f : \gamma \cap U \rightarrow \mathbb{G}$ абсолютно непрерывно для $d\gamma$ -почти всех кривых $\gamma \in \Gamma_i$, где $\gamma(t) = \exp(tX_i)(g), g \in U$;

(с) производная $X_i f(g) = \frac{d}{dt} f(\exp tX_i(g))|_{t=0}, i = 1, 2$, которая существует почти всюду в Ω , лежит в горизонтальном пространстве $H_{f(g)}\mathbb{G}$ и в классе $L_{p,\text{loc}}(\Omega)$.

²⁾Локальная группа многообразия Карно — это группа Карно, в то время как локальная группа пространства Карно — Каратеодори является лишь нильпотентной и градуированной. Группа поворотов-сдвигов — это многообразие Карно, поскольку ее локальной группой служит группа Гейзенберга.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Мера $d\gamma$ на слое Γ_i в п. (b) определяется как внутреннее произведение $X_i \lrcorner (dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3)$ горизонтального векторного поля X_i и формы объема на группе \mathcal{RT} . Требование п. (c) принадлежности производных вдоль горизонтальных векторных полей горизонтальному подрасслоению называется также условием (*слабой*) *контактности*. Подчеркнем, что в определении 2 не предполагается существование (хотя бы в каком-нибудь смысле) производной вдоль третьего, вертикального, векторного поля X_3 .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если отображение удовлетворяет определению 2, то оно также удовлетворяет определению 1. В свою очередь, отображение класса Соболева в смысле определения 1 можно изменить на множестве нулевой меры так, что для него будут справедливы пункты определения 2. Указанные взаимоотношения между определениями 1 и 2 установлены, например, в [24, предложения 4.1, 4.2]. Несмотря на то, что в [24] классы Соболева рассматриваются на группах Карно, доказательства утверждений [24, утверждения 4.1, 4.2] с очевидными изменениями переносятся на случай группы поворотов-сдвигов.

Отображение $f \in W_{p,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$ *аппроксимативно h -дифференцируемо* почти всюду (см., например, [22, теорема 6.1] или [25, предложение 1.1]). Последнее означает, что для почти каждой точки $g \in \Omega$ существует горизонтальный гомоморфизм $Df(g) : \mathcal{G}^g \rightarrow \mathcal{G}^{f(g)}$ локальных групп Карно такой, что для любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_{sr}^4(\{g' \in B(g, r) \cap \Omega : d_{\mathbb{G}}(f(g'), Df(g)[g']) > \varepsilon d_c(g, g')\})}{\mathcal{H}_{sr}^4(B(g, r))} = 0,$$

где $B(g, r)$ — шар с центром в точке g радиуса r в метрике d_c . Отметим, что для п. в. $g \in \Omega$ соответствие $X_i(g) \mapsto X_i f(g)$, $i = 1, 2$, которое задает линейное отображение $D_h f(g) : H_g \mathcal{RT} \rightarrow H_{f(g)} \mathbb{G}$, порождает гомоморфизм $\widetilde{\text{exp}}^{-1} \circ Df(g) \circ \text{exp} : V \rightarrow \widetilde{V}$ алгебр Ли V и \widetilde{V} локальных групп Карно \mathcal{G}^g и $\mathcal{G}^{f(g)}$ соответственно, который для краткости также будем обозначать символом $Df(g) : V \rightarrow \widetilde{V}$. Символы exp и $\widetilde{\text{exp}}$ обозначают экспоненциальные отображения $\text{exp} : V \rightarrow \mathcal{G}^g$ и $\widetilde{\text{exp}} : \widetilde{V} \rightarrow \mathcal{G}^{f(g)}$.

Через \widehat{X}_i^g , $i = 1, 2, 3$, обозначаем нильпотентизированные векторные поля, порождающие алгебру V локальной группы Карно \mathcal{G}^g , $g \in \mathcal{RT}$. Если $u = \text{exp}\left(\sum_{i=1}^3 u_i \widehat{X}_i^g\right)(g) \in \mathcal{G}^g$ и $v = \text{exp}\left(\sum_{i=1}^3 v_i \widehat{X}_i^g\right)(g) \in \mathcal{G}^g$, то групповая операция в \mathcal{G}^g задается по формуле Кемпбелла — Хаусдорфа

$$u \cdot v = \text{exp}\left(\sum_{i=1}^3 v_i \widehat{X}_i^g\right) \circ \text{exp}\left(\sum_{i=1}^3 u_i \widehat{X}_i^g\right)(g).$$

Легко видеть, что точка g является единичным элементом группы \mathcal{G}^g . Как обычно, посредством отображения $\widehat{X}_i^g \mapsto \widehat{X}_i^g(g)$ будем отождествлять V и $T_g \mathcal{G}^g$. Напомним, что $\widehat{X}_i^g(g) = X_i(g)$. Таким образом, $T_g \mathcal{G}^g = T_g \mathcal{RT}$, поэтому можно рассматривать линейное отображение $Df(g) : T_g \mathcal{RT} \rightarrow T_{f(g)} \mathbb{H}^1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Более подробную информацию о локальных группах Карно, их горизонтальном гомоморфизме, h -дифференцируемости и нильпотентизированных полях можно найти в работах [19, 22, 25–27].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Отображение $f : \Omega \rightarrow \mathbb{G}$, $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область, \mathbb{G} — группа \mathcal{RT} или \mathbb{H}^1 , называется *отображением с ограниченным искажением*, если выполнены следующие условия:

- (i) $f \in W_{4,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$;
(ii) $|D_h f(g)|^4 \leq K \det Df(g)$ для п. в. $g \in \Omega$ и некоторой постоянной $K < \infty$.

§ 3. Свойство морфизма и его следствия

Здесь существенным образом используем результаты из [12]. Их непосредственное применение к задаче установления свойства морфизма для отображения $F : \Omega \rightarrow \mathcal{RT}$, $\Omega \subset \mathcal{RT}$, вызывает трудности, поскольку не удастся проверить [12, предложение 2.11], где устанавливаются свойства проекций в образе отображения F . Этот образ лежит в группе поворотов-сдвигов, которая в отличие от групп Карно не допускает введения структуры однородных растяжений. Чтобы обойти это препятствие, установим свойство морфизма для отображения $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}^1$, $\Omega \subset \mathcal{RT}$, образ которого лежит в группе Гейзенберга. Причина выбора этой группы будет указана ниже.

Напомним, что группой Гейзенберга \mathbb{H}^1 называется пространство \mathbb{R}^3 , снабженное групповой операцией

$$(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, c_1 + c_2 - 2b_1 a_2 + 2a_1 b_2).$$

Единицу $(0, 0, 0)$ группы \mathbb{H}^1 , как и на \mathcal{RT} , обозначим через $\mathbf{0}$.

Левинвариантные векторные поля выписываются следующим образом:

$$A = \frac{\partial}{\partial a} + 2b \frac{\partial}{\partial c}, \quad B = \frac{\partial}{\partial b} - 2a \frac{\partial}{\partial c}, \quad C = \frac{\partial}{\partial c}. \quad (5)$$

Единственное нетривиальное коммутационное соотношение имеет вид $[A, B] = -4C$. Алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ левинвариантных векторных полей распадается на сумму $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_1 \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_2$, где $\tilde{\mathfrak{g}}_1 = \text{span}\{A, B\}$, $\tilde{\mathfrak{g}}_2 = \text{span}\{C\}$. Введем скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$, относительно которого поля A, B, C ортонормальны, и определим на группе Гейзенберга расстояние Карно — Каратеодори \tilde{d}_c . Через dA, dB и dC обозначим дифференциальные 1-формы, двойственные к полям A, B и C . Для гладкой функции u (или имеющей обобщенные производные вдоль полей A, B) определим горизонтальный градиент $\nabla_h u = (Au)A + (Bu)B$ и его длину $|\nabla_h u| = \langle \nabla_h u, \nabla_h u \rangle^{1/2} = \sqrt{(Au)^2 + (Bu)^2}$. Пусть в области $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{H}^1$ определено векторное поле $X = u_1 A + u_2 B$. Если $u_1, u_2 \in C^1(\tilde{\Omega})$, то горизонтальная дивергенция поля X определяется как $\text{div}_h X = Au_1 + Bu_2$. Свойство морфизма формулируется следующим образом.

Теорема 1. Пусть $f : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ — отображение с ограниченным искажением области $\Omega \subset \mathcal{RT}$ в открытое множество $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{H}^1$. Предположим, что $w : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ — C^2 -гладкое решение в $\tilde{\Omega}$ уравнения

$$\text{div}_h(|\nabla_h w(q)|^2 \nabla_h w(q)) = 0. \quad (6)$$

Тогда композиция $w_f = w \circ f$ есть решение в области Ω уравнения

$$\text{div}_h \mathcal{A}(g, \nabla_h w_f(g)) = 0, \quad (7)$$

где горизонтальная дивергенция понимается в смысле распределений (см. (4)), $\mathcal{A}(g, \xi) = \langle G(g)\xi, \xi \rangle G(g)\xi$, а (2×2) -матрица $G(g)$ имеет вид

$$G(g) = \begin{cases} (\det Df(g))^{1/2} (D_h f(g)^* D_h f(g))^{-1}, & \text{если } \det Df(g) \neq 0, \\ \text{Id}, & \text{если } \det Df(g) = 0. \end{cases}$$

В теореме 1 участвуют матрицы $D_h f(g)$ и $Df(g)$. Найдем их явные формы. Выпишем сначала матрицу $D_h f(g)$ горизонтального аппроксимативного hc -дифференциала в базисах $\widehat{X}_1^g(g) = X_1(g)$, $\widehat{X}_2^g(g) = X_2(g)$ и $A(q)$, $B(q)$, где $q = f(g)$. Используя (5), для производной вдоль горизонтального векторного поля X_1 при п. в. $g \in \Omega$ получаем

$$\begin{aligned} X_1 f(g) &= X_1 f_1(g) \frac{\partial}{\partial a} + X_1 f_2(g) \frac{\partial}{\partial b} + X_1 f_3(g) \frac{\partial}{\partial c} \\ &= X_1 f_1(g)(A(q) - 2f_2(g)C(q)) + X_1 f_2(g)(B(q) + 2f_1(g)C(q)) + X_1 f_3(g)C(f(q)) \\ &= X_1 f_1(g)A(q) + X_1 f_2(g)B(q) + (2f_1(g)X_1 f_2(g) - 2f_2(g)X_1 f_1(g) + X_1 f_3(g))C(q). \end{aligned}$$

Для производной вдоль поля X_2 аналогично имеем

$$\begin{aligned} X_2 f(g) &= X_2 f_1(g)A(q) + X_2 f_2(g)B(q) \\ &\quad + (2f_1(g)X_2 f_2(g) - 2f_2(g)X_2 f_1(g) + X_2 f_3(g))C(q). \end{aligned}$$

Условие контактности в п. (с) определения 2 влечет равенства

$$\begin{aligned} 2f_1(g)X_1 f_2(g) - 2f_2(g)X_1 f_1(g) + X_1 f_3(g) &= 0, \\ 2f_1(g)X_2 f_2(g) - 2f_2(g)X_2 f_1(g) + X_2 f_3(g) &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица горизонтального аппроксимативного hc -дифференциала выписывается в виде

$$D_h f(g) = \begin{pmatrix} X_1 f_1(g) & X_2 f_1(g) \\ X_1 f_2(g) & X_2 f_2(g) \end{pmatrix}.$$

Теперь продолжим это линейное отображение до гомоморфизма $Df(g)$ алгебр Ли локальных групп Карно \mathcal{G}^g и $\mathcal{G}^{f(g)}$. Принимая во внимание (3) и [22, теорема 1.1(2)], получаем, что коммутационные соотношения для нильпотентизированных полей имеют вид

$$[\widehat{X}_1^g, \widehat{X}_2^g] = -\widehat{X}_3^g, \quad [\widehat{X}_3^g, \widehat{X}_2^g] = 0, \quad [\widehat{X}_1^g, \widehat{X}_3^g] = 0.$$

Учитывая их, а также коммутационные соотношения $[A, B] = -4C$, $[A, C] = [B, C] = 0$ на группе Гейзенберга, приходим к выводу, что гомоморфизм нильпотентных градуированных алгебр локальных групп Карно осуществляет линейное отображение

$$Df(g) = \begin{pmatrix} X_1 f_1(g) & X_2 f_1(g) & 0 \\ X_1 f_2(g) & X_2 f_2(g) & 0 \\ 0 & 0 & 4 \det D_h f(g) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Как известно, в обосновании теоремы 1 ключевую роль играет соотношение, по форме совпадающее с равенством (1), но записанное для так называемых горизонтальных дифференциальных форм. Прежде чем сформулировать соответствующее утверждение, дадим несколько определений.

Горизонтальными дифференциальными формами на группе Гейзенберга называются формы вида

$$\omega_1(q) = u_1(q) dB \wedge dC - u_2(q) dA \wedge dC, \quad \omega_2(q) = u_3(q) dA \wedge dB \wedge dC. \quad (9)$$

где u_1, u_2, u_3 — измеримые функции. Эти формы обращаются в нуль на горизонтальном касательном пространстве, чем и объясняется их название.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}^1$ — отображение класса $W_{p,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{H}^1)$, $p \geq 1$, $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область. Для форм вида (9) с коэффициентами, определенными на $f(\Omega)$, операция переноса задается следующим образом:

$$f^\# \omega_1(g)(\xi_1, \xi_2) = \omega(f(g))(Df(g)\langle \xi_1 \rangle, Df(g)\langle \xi_2 \rangle),$$

$$f^\# \omega_2(g)(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \omega(f(g))(Df(g)\langle \xi_1 \rangle, Df(g)\langle \xi_2 \rangle, Df(g)\langle \xi_3 \rangle)$$

для п. в. $g \in \Omega$ и $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in T_g \mathcal{RT}$.

Пусть D — открытое множество в \mathbb{H}^1 или \mathcal{RT} и ω — дифференциальная 2-форма с локально интегрируемыми на D коэффициентами. Дифференциальная 3-форма η называется *внешним дифференциалом формы ω в смысле распределений*, если равенство $\int_D \varphi \eta = - \int_D d\varphi \wedge \omega$ выполняется для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(D)$. Легко проверить, что для формы с гладкими коэффициентами ее обычный дифференциал является также и дифференциалом в смысле распределений.

В §4 покажем, что справедливо следующее утверждение, обобщающее равенство (1) на случай рассматриваемых нами отображений.

Предложение 1. *Предположим, что $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}^1$ — отображение класса $W_{4,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{H}^1)$, $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область. Пусть $U : \mathbb{H}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — векторное поле $U = (u_1, u_2) \in C^1$ такое, что $\text{div}_h U = Au_1 + Bu_2$ ограничено на \mathbb{H}^1 , и задана горизонтальная дифференциальная форма кистепени один*

$$\omega(q) = u_1(q) dB \wedge dC - u_2(q) dA \wedge dC.$$

Тогда справедливо равенство $d(f^\# \omega) = f^\# d\omega$, где внешний дифференциал d понимается в смысле распределений.

Из сформулированного предложения традиционным способом выводится теорема 1. Важным обстоятельством является тот факт, что решениями уравнения (6) служат координатные функции a, b, c , а также C^2 -гладкая сингулярная функция $\ln \|q\|$, $q = (a, b, c) \in \mathbb{H}^1$, где $\|q\| = ((a^2 + b^2)^2 + 16c^2)^{1/4}$ (см., например, [28, теорема 2] или [10, предложение 5.6]). Следовательно, теорема 1 говорит о том, что для отображения с ограниченным искажением f координатные функции $f_i(g)$, $i = 1, 2, 3$, и функция $\ln \|f(g)\|$ суть решения уравнения (7). Отсюда по схеме, предложенной Ю. Г. Решетняком в [1], получаем следующее

Предложение 2. *Пусть $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}^1$ — непостоянное отображение с ограниченным искажением, $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область. Тогда f непрерывно, открыто и дискретно.*

Из этого утверждения выведем топологические свойства непостоянных отображений с ограниченным искажением на группе поворотов-сдвигов, удовлетворяющих условию локальной ограниченности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Отображение $F : \Omega \rightarrow \mathcal{RT}$, $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область, называется *локально ограниченным*, если для всякой подобласти $\Omega' \Subset \Omega$ ее образ $F(\Omega')$ есть ограниченное множество.

Теорема 2. *Пусть $F : \Omega \rightarrow \mathcal{RT}$ — непостоянное локально ограниченное отображение с ограниченным искажением, $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область. Тогда F непрерывно и открыто; оно дискретно на всякой подобласти $\Omega' \Subset \Omega$.*

Прежде чем доказать эту теорему, поясним, почему выбрана группа Гейзенберга в теореме 1 и предложении 1 в качестве области значений. Выбор продиктован тем, что справедлива

Лемма 1 [16]. *Отображение $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) : \mathcal{RT} \rightarrow \mathbb{H}^1$, задаваемое формулой*

$$\psi(x, y, \theta) = (-x \cos \theta - y \sin \theta, \theta, 4x \sin \theta - 4y \cos \theta - 2x\theta \cos \theta - 2y\theta \sin \theta), \quad (10)$$

является контактным диффеоморфизмом.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Контактность означает здесь, что $\psi_*\mathfrak{g}_1 = \tilde{\mathfrak{g}}_1$.

Выпишем нужный нам ниже риманов дифференциал отображения (10) в базисах $X_1(g)$, $X_2(g)$, $X_3(g)$, $A(\psi(g))$, $B(\psi(g))$, $C(\psi(g))$. Для этого проделаем ряд вычислений, учитывая (2), (5), (10). Из равенств

$$X_1\psi_1(g) = -\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = -1, \quad X_1\psi_2(g) = 0,$$

$$X_1\psi_3(g) = \cos \theta(4 \sin \theta - 2\theta \cos \theta) + \sin \theta(-4 \cos \theta - 2\theta \sin \theta) = -2\theta$$

получаем, что

$$X_1\psi(g) = -\frac{\partial}{\partial a} - 2\theta \frac{\partial}{\partial c} = -A(\psi(g)).$$

Далее,

$$X_2\psi_1(g) = x \sin \theta - y \cos \theta, \quad X_2\psi_2(g) = 1,$$

$$X_3\psi_2(g) = 2x \cos \theta + 2y \sin \theta + 2x\theta \sin \theta - 2y\theta \cos \theta,$$

поэтому

$$\begin{aligned} X_2\psi(g) &= (x \sin \theta - y \cos \theta) \left(\frac{\partial}{\partial a} + 2\theta \frac{\partial}{\partial c} \right) + \frac{\partial}{\partial b} - 2(-x \cos \theta - y \sin \theta) \frac{\partial}{\partial c} \\ &= (x \sin \theta - y \cos \theta)A(\psi(g)) + B(\psi(g)). \end{aligned}$$

Наконец,

$$X_3\psi_1 = \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta = 0, \quad X_3\psi_2 = 0,$$

$$X_3\psi_3 = -\sin \theta(4 \sin \theta - 2\theta \cos \theta) + \cos \theta(-4 \cos \theta - 2\theta \sin \theta) = -4,$$

откуда

$$X_3\psi(g) = -4 \frac{\partial}{\partial c} = -4C(\psi(g)).$$

Таким образом,

$$\psi_*(g) = \begin{pmatrix} -1 & x \sin \theta - y \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Вспоминая вид матрицы (8) аппроксимативного hc -дифференциала, заключаем, что матрица $D\psi(g)$ совпадает с (11).

Доказательству теоремы 2 предпошлем следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $F : \Omega \rightarrow \mathcal{RT}$ — локально ограниченное отображение класса $W_{p,\text{loc}}^1(\Omega; \mathcal{RT})$, $p \geq 1$, $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область. Тогда отображение $f = \psi \circ F : \Omega \rightarrow \mathbb{H}^1$, где ψ — отображение (10), принадлежит классу $W_{p,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{H}^1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению 2 нужно проверить три пункта.

(а) $\tilde{d}_c(\mathbf{0}, f(g)) \in L_{p,\text{loc}}(\Omega)$.

Пусть $\Omega' \Subset \Omega$. В силу локальной ограниченности F множество $\overline{F(\Omega')}$ компактно. Поскольку ψ — гладкое контактное отображение, ψ локально липшицево относительно соответствующих субримановых метрик. Следовательно, для

компакта $K = \overline{F(\Omega')} \cup \{\mathbf{0}\}$ найдется постоянная $C = C(K)$ такая, что для всех $g \in \Omega'$

$$\tilde{d}_c(\mathbf{0}, \psi(F(g))) = \tilde{d}_c(\psi(\mathbf{0}), \psi(F(g))) \leq C d_c(\mathbf{0}, F(g)).$$

Так как $F \in W_{p,\text{loc}}^1(\Omega; \mathcal{RT})$, в силу п. (а) определения 2 имеем $d_c(\mathbf{0}, F(g)) \in L_p(\Omega')$. Учитывая последнее неравенство, получаем $\tilde{d}_c(\mathbf{0}, \psi(F(g))) \in L_p(\Omega')$.

(b) $f \in \text{ACL}(\Omega)$.

В самом деле, так как отображение ψ гладкое и в силу п. (b) определения 2 $F \in \text{ACL}(\Omega)$, то $\psi \circ F \in \text{ACL}(\Omega)$.

(c) производная $X_i f(g) = \frac{d}{dt} f(\exp t X_i(g))|_{t=0}$, $i = 1, 2$, которая существует почти всюду в Ω , лежит в горизонтальном пространстве $H_{f(g)} \mathbb{H}^1$ и в классе $L_{p,\text{loc}}(\Omega)$.

Поскольку $f = \psi \circ F \in \text{ACL}(\Omega)$, производные отображения $\psi \circ F$ вычисляются по классическому правилу дифференцирования композиции. Таким образом, для п. в. $g \in \Omega$ имеем $X_i f(g) = D\psi(F(g)) X_i F(g)$, где $X_i F(g) = \{X_i F_k(g)\}_{k=1}^3$ — вектор-столбец из производных компонент отображения F . Согласно п. (c) определения 2 векторы $X_i F(g)$, $i = 1, 2$, лежат в $H_{F(g)} \mathcal{RT}$. Так как ψ — контактное отображение, векторы $X_i f(g)$ лежат в $H_{f(g)} \mathbb{H}^1$, $i = 1, 2$.

Далее, пусть $\Omega' \Subset \Omega$. Из предыдущих рассуждений получаем, что при п. в. $g \in \Omega'$, $i = 1, 2$,

$$X_i f(g) = \begin{pmatrix} X_i F_1(g) + (F_1(g) \sin F_3(g) - F_2(g) \cos F_3(g)) X_i F_2(g) \\ X_i F_2(g) \\ -4X_i F_3(g) \end{pmatrix}.$$

Принимая во внимание локальную ограниченность отображения F , ограниченность синуса и косинуса, а также п. (c) определения 2 (т. е. $X_i F \in L_p(\Omega')$), выводим $X_i f \in L_p(\Omega')$. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $\Omega' \Subset \Omega$. Покажем, что $f = \psi \circ F : \Omega' \rightarrow \mathbb{H}^1$, где ψ — отображение (10), является отображением с ограниченным искажением. Для этого проверим пункты определения 3. П. (i) выполнен в силу леммы 2. Для проверки п. (ii) сначала отметим, что норма матрицы горизонтального h -дифференциала отображения ψ в точке $F(g)$ равна

$$|D_h \psi(F(g))| = \frac{\sqrt{2 + \alpha^2 + |\alpha| \sqrt{\alpha^2 + 4}}}{\sqrt{2}},$$

где $\alpha = F_1(g) \sin F_3(g) - F_2(g) \cos F_3(g)$. В силу локальной ограниченности F найдется такая постоянная $C = C(\Omega')$, что $|D_h \psi(F(g))|^4 \leq C$ на Ω' . Так как отображение F имеет ограниченное искажение, для п. в. $g \in \Omega'$

$$|D_h(\psi \circ F)(g)|^4 \leq |D_h \psi(F(g))|^4 \cdot |D_h F(g)|^4 \leq CK \det DF(g),$$

что завершает проверку п. (ii).

Итак, отображение $f : \Omega' \rightarrow \mathbb{H}^1$ согласно предложению 2 непрерывно, открыто и дискретно. Поскольку ψ^{-1} — диффеоморфизм, отображение $F = \psi^{-1} \circ f$ будет также непрерывным, открытым и дискретным на подобласти $\Omega' \Subset \Omega$. Легко видеть, что и на всей области Ω оно тоже непрерывно и открыто. Действительно, если $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность точек области Ω , сходящаяся к $g \in \Omega$, то она ограничена, т. е. $\{g_n\}_{n=1}^\infty \cup \{g\} \subset \Omega'$ для некоторой подобласти $\Omega' \Subset \Omega$. Так как F на Ω' непрерывно, $F(g_n) \rightarrow F(g)$, $n \rightarrow \infty$. Тем самым установлена непрерывность отображения $F : \Omega \rightarrow \mathcal{RT}$. Чтобы показать

его открытость, фиксируем открытое множество $U \subset \Omega$. Без ограничения общности можно считать, что оно связное. Пусть $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ — исчерпание области Ω подобластями $\Omega_n \Subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $U_n = U \cap \Omega_n \Subset \Omega$. Так как F открыто на U_n для всякого n , множество $F(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F(U_n)$ открыто. \square

§ 4. О доказательстве предложения 1

Предложение 1 будет доказано, если мы покажем (см. [12, лемма 2.8]), что отображение $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}^1$ класса $W_{4,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{H}^1)$, $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область, удовлетворяет равенству

$$\int_{\Omega} (A_{1k} X_1 \varphi + A_{2k} X_2 \varphi) d\mathcal{H}_{sr}^4 = 0, \quad k = 1, 2, \quad (12)$$

для любой функции $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ класса $C_0^\infty(\Omega)$. Здесь $A_{jk} = A_{jk}(g)$ — это элемент матрицы $\text{ad } Df(g) = [A_{jk}(g)]_{j,k=1,2,3}$, присоединенной к матрице $Df(g)$ аппроксимативного hc -дифференциала:

$$Df(g) \cdot \text{ad } Df(g) = \det Df(g) \cdot \text{Id}.$$

Равенство (12) в евклидовых пространствах и на группе Гейзенберга можно установить, аппроксимируя f гладкими отображениями (см. [1, 8]). Однако, как сказано во введении, уже на произвольных двухступенчатых группах Карно этот подход не работает. Воспользуемся новым методом, который был развит С. К. Водопьяновым в [12] без применения техники аппроксимаций. Этот метод основан на использовании формулы замены переменной в интеграле, которая справедлива, если отображение, осуществляющее замену, непрерывно, дифференцируемо почти всюду и обладает \mathcal{N} -свойством Лузина. Однако эта формула применяется опосредованно, поскольку принадлежность отображения f классу $W_{p,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{H}^1)$ с «предельным» показателем $p = 4$ не гарантирует упомянутых свойств. Чтобы обойти эти трудности, в [12] используется прием понижения размерности, а сама формула устанавливается на подмногообразии коразмерности один.

Наша цель — показать, что рассуждения из [12], носящие весьма общий характер, применимы и в том случае, когда область определения отображения f лежит в группе \mathcal{RT} .

В соотношении (12) функция $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу $C_0^\infty(\Omega)$, где Ω — область в группе \mathcal{RT} . Обозначим через Z множество критических точек $\{g \in \Omega \mid \nabla \varphi(g) = 0\}$, где $\nabla \varphi = \nabla_h \varphi + X_3 \varphi X_3$ — «полный» градиент функции φ . Согласно теореме Сарда имеем $\mathcal{H}_e^1(\varphi(Z)) = 0$ и, следовательно, для п. в. $t \in \varphi(\Omega)$ поверхность уровня $\varphi^{-1}(t)$ является непустым замкнутым (т. е. компактным без края) многообразием коразмерности один. Для каждого $t \in \varphi(\Omega) \setminus \varphi(Z)$ в силу компактности $\varphi^{-1}(t)$ найдутся $\alpha_t, \beta_t \in \mathbb{R}$ такие, что

$$0 < \alpha_t \leq |\nabla \varphi(g)|^{-1} \leq \beta_t \quad \text{для всех } g \in \varphi^{-1}(t). \quad (13)$$

Пусть $\chi = \{g \in \Omega \mid \nabla_h \varphi(g) = 0\}$ — множество характеристических точек. Если $t \in \varphi(\Omega) \setminus \varphi(Z)$, то ввиду [19, теорема 4.1]

$$\mathcal{H}_{sr}^3(\chi \cap \varphi^{-1}(t)) = 0 \quad (14)$$

и по [29, 30]

$$\mathcal{H}_e^2(\chi \cap \varphi^{-1}(t)) = 0. \quad (15)$$

Перейти на подмногообразии коразмерности один удается благодаря формуле коплощади, которая доказана для многообразий Карно и гладких контактных отображений в [19, теорема 6.1]. Выпишем эту формулу для нашего частного случая.

Формула коплощади. Пусть $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — функция класса $C_0^\infty(\Omega)$ на области $\Omega \subset \mathcal{RT}$. Тогда справедливо равенство

$$\int_{\Omega} \Phi(g) |\nabla_h \varphi(g)| d\mathcal{H}_{sr}^4(g) = C_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\varphi^{-1}(t)} \Phi(g') d\mathcal{H}_{sr}^3(g'),$$

где $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — функция такая, что произведение $\Phi(g) |\nabla_h \varphi(g)|$ интегрируемо, а постоянная C_1 зависит только от показателей размерности.

Нам также понадобится связь между мерами на поверхности уровня. Она сформулирована в [19, теорема 3.17] и в наших установках выглядит следующим образом.

Предложение 3. Пусть $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — функция класса $C_0^\infty(\Omega)$ на области $\Omega \subset \mathcal{RT}$ и $t \in \varphi(\Omega) \setminus \varphi(Z)$. Если $g \in \varphi^{-1}(t) \setminus \chi$, то

$$D_{\mathcal{H}_e^2} \mathcal{H}_{sr}^3(g) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_{sr}^3(\text{Box}_2(g, r) \cap \varphi^{-1}(t))}{\mathcal{H}_e^2(B_e(g, r) \cap \varphi^{-1}(t))} = C_2 \frac{|\nabla_h \varphi(g)|}{|\nabla \varphi(g)|},$$

где $B_e(g, r)$ — шар в евклидовой метрике и C_2 — постоянная, зависящая только от показателей размерности.

Формула коплощади и предложение 3 дают для (12) соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (A_{1k} X_1 \varphi + A_{2k} X_2 \varphi) d\mathcal{H}_{sr}^4 \\ &= C_1 C_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\varphi^{-1}(t)} \frac{A_{1k} X_1 \varphi + A_{2k} X_2 \varphi}{|\nabla \varphi|} d\mathcal{H}_e^2 = 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Последнее равенство будет доказано, если для связной компоненты $M \subset \varphi^{-1}(t)$, $t \in \varphi(\Omega) \setminus \varphi(Z)$, покажем, что

$$\int_M (\nu_1(g) A_{1k}(g) + \nu_2(g) A_{2k}(g)) d\mathcal{H}_e^2 = \int_M A_{1k} dX_2 \wedge dX_3 + A_{2k} dX_1 \wedge dX_3 = 0, \quad (16)$$

где $\nu_j(g) = |\nabla \varphi(g)|^{-1} X_j \varphi(g)$, $j = 1, 2$, суть горизонтальные компоненты вектора единичной нормали к M в точке g .

Пусть $T_g M$ — касательное пространство к M , рассматриваемое как подпространство в $T_g \mathcal{RT}$. Обозначим $\text{Box}_2^g(g, r) = \{g' \in \mathcal{G}^g \mid d_2^g(g', g) < r\}$, где d_2^g — квазиметрика в локальной группе \mathcal{G}^g . Поскольку (см. [27, лемма 2.1.26]) для достаточно малых по модулю коэффициентов a_i имеем

$$\exp \left(\sum_{i=1}^3 a_i X_i \right) (g) = \exp \left(\sum_{i=1}^3 a_i \hat{X}_i^g \right) (g), \quad (17)$$

найдется $r(g)$ такое, что $\text{Box}_2(g, r) = \text{Box}_2^g(g, r)$ при $r < r(g)$. Это позволяет придать для достаточно малых r смысл множеству $P_r = \text{Box}_2(g, r) \cap T_g M$, так

как экспоненциальное отображение $\exp : V \rightarrow \mathcal{G}^g$ позволяет трактовать векторы из $T_g M$ как элементы множества $\text{Box}_2^g(g, r) = \text{Box}_2(g, r)$, $r < r(g)$. Напомним, что мы отождествляем V и $T_g \mathcal{G}^g = T_g \mathcal{RT}$. Пусть $Df(g)|_{T_g M} : T_g M \rightarrow T_{f(g)} \mathbb{H}^1$ — ограничение отображения $Df(g) : T_g \mathcal{RT} \rightarrow T_{f(g)} \mathbb{H}^1$ на $T_g M$. Введем также проекцию $\text{Pr}_{q,k} : T_q \mathbb{H}^1 \rightarrow T_{q,k} \mathbb{H}^1$, полагая $\text{Pr}_{q,k}(aA(q) + bB(q) + cC(q))$ равным $bB(q) + cC(q)$ при $k = 1$ и $aA(q) + cC(q)$ при $k = 2$. Здесь $T_{q,k} \mathbb{H}^1 = \{v \in T_q \mathbb{H}^1 \mid v = \text{Pr}_{q,k}(v)\}$.

Под действием линейного отображения

$$\text{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g)|_{T_g M} : T_g M \rightarrow T_{f(g),k} \mathbb{H}^1$$

форма $\omega_1 = dB \wedge dC$ или $\omega_2 = dA \wedge dC$ переносится таким образом (см. в [12] равенство (2.18)):

$$\begin{aligned} (\text{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g)|_{T_g M})^\# \omega_k &= A_{1k} dX_2 \wedge dX_3 + A_{2k} dX_1 \wedge dX_3 \\ &= \det(\text{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g)|_{T_g M}) dV, \end{aligned} \quad (18)$$

где dV — форма объема на M . Справедливо также соотношение (см., например, [20, п. 3.3.1, лемма 1])

$$|\det(\text{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g)|_{T_g M})| = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_e^2((\text{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g))(P_r))}{\mathcal{H}_e^2(P_r)}. \quad (19)$$

Следуя [12], рассмотрим проектирование в образе отображения f , т. е. в группе Гейзенберга. Фиксируем точку $q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{H}^1$. Обозначим $\mathbb{H}_{q,1}^1 = \{(q_1, b, c) \in \mathbb{H}^1 \mid b, c \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{H}_{q,2}^1 = \{(a, q_2, c) \in \mathbb{H}^1 \mid a, c \in \mathbb{R}\}$. Определим отображение $\text{Pr}_k : \mathbb{H}^1 \rightarrow \mathbb{H}_{0,k}^1$, $k = 1, 2$, полагая

$$\begin{aligned} \text{Pr}_1((a, b, c)) &= (a, b, c) \cdot \exp(-aA)(\mathbf{0}) = (0, b, c + 2ab), \\ \text{Pr}_2((a, b, c)) &= (a, b, c) \cdot \exp(-bB)(\mathbf{0}) = (a, 0, c - 2ab). \end{aligned}$$

Приведем свойства введенных проекций, которые немедленно следуют из [12, предложение 2.11], где рассматривался случай общих групп Карно.

Предложение 4. *Справедливы следующие утверждения:*

- (1) для всякой точки $q \in \mathbb{H}^1$ риманов дифференциал отображения $l_q \circ \text{Pr}_q$ в $\mathbf{0}$ равен $\text{Pr}_{q,k}$, где l_q — левый сдвиг на элемент q ;
- (2) $\mathcal{H}_{st}^3(\text{Pr}_k(A)) \leq C_0 \mathcal{H}_{st}^3(A)$ для всякого \mathcal{H}_{st}^3 -измеримого множества $A \subset \mathbb{H}^1$, где постоянная C_0 не зависит от A .

Далее показываем, что отображение $f|_M$ обладает всеми свойствами, необходимыми для вывода формулы замены переменной. Наши рассуждения следуют аргументам, предложенным С. К. Водопьяновым для доказательства [12, предложение 2.12]. Мы лишь модифицируем их таким образом, чтобы они работали и на группе поворотов-сдвигов.

Предложение 5. *Пусть $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}^1$ — отображение класса $W_{4,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{H}^1)$, $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область. Для п. в. $t \in \varphi(\Omega)$ отображение $f : M \rightarrow \mathbb{H}^1$ обладает следующими свойствами*

- (i) отображение $f : M \rightarrow \mathbb{H}^1$ можно изменить на множестве \mathcal{H}_{st}^3 -меры нуль так, чтобы оно стало непрерывным;
- (ii) $f : M \rightarrow \mathbb{H}^1$ обладает \mathcal{N} -свойством Лузина;
- (iii) $\overline{\lim}_{g' \rightarrow g, g' \in M} \frac{\bar{d}_c(f(g'), f(g))}{d_c(g', g)} < \infty$ для \mathcal{H}_{st}^3 -п. в. точек $g \in M$;

(iv) f дифференцируемо для \mathcal{H}_{sr}^3 -п. в. $g \in M$ в следующем смысле:

$$\tilde{d}_c(f(g'), Df(g)[g']) = o(d_c(g', g)) \quad \text{при } M \cap \mathcal{G}^g \ni g' \rightarrow g;$$

(v) для \mathcal{H}_{sr}^3 -п. в. $g \in M$ справедливо равенство, где $M_r = \text{Box}_2(g, r) \cap M$:

$$\begin{aligned} |\det(\text{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g)|_{T_g M})| &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_e^2(\text{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g))(P_r)}{\mathcal{H}_e^2(P_r)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_e^2(f(g)(\mathbf{Pr}_k \circ Df(g))(M_r))}{\mathcal{H}_e^2(M_r)}; \end{aligned}$$

(vi) для \mathcal{H}_{sr}^3 -п. в. $g \in M$

$$J(g, \mathbf{Pr}_k \circ f|_M) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_{sr}^3((\mathbf{Pr}_k \circ f)(M_r))}{\mathcal{H}_{sr}^3(M_r)} = \frac{|\det(\text{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g)|_{T_g M})|}{\sqrt{\nu_1^2(g) + \nu_2^2(g)}};$$

(vii) для отображения $\mathbf{Pr}_k \circ f : M \rightarrow \mathbb{H}_{0,k}^1$ справедлива формула замены переменной:

$$\int_M u(g) J(g, \mathbf{Pr}_k \circ f|_M) d\mathcal{H}_{sr}^3(g) = \int_{\mathbb{H}_{0,k}^1} \left(\sum_{g \in f^{-1}(q)} u(g) \right) d\mathcal{H}_{sr}^3(q),$$

где $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая функция такая, что $u(g)J(g, \mathbf{Pr}_k \circ f|_M)$ интегрируемо на M относительно меры \mathcal{H}_{sr}^3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) ШАГ I. Согласно п. (A) определения 1 для фиксированного $q \in \mathbb{H}^1$ имеем $\tilde{d}_c(q, f(\cdot)) \in W_{4,\text{loc}}^1(\Omega)$. В силу [22, предложение 6.1] для компактного множества $\mathcal{O} = \text{spt } \varphi \subset \Omega$ найдутся множество $S \subset \mathcal{O}$ нулевой \mathcal{H}_{sr}^4 -меры и неотрицательная функция $\mu \in L_4(\mathcal{O})$ такие, что поточечная оценка

$$|\tilde{d}_c(q, f(g)) - \tilde{d}_c(q, f(g'))| \leq d_c(g, g')(\mu(g) + \mu(g')) \quad (20)$$

выполняется для всех $g, g' \in \mathcal{O} \setminus S$.

Чтобы установить п. (i), воспользуемся результатами из [31], а именно утверждением [31, теорема 8.7], которое представляет собой теорему вложения для класса функций, введенных в [31, определение 8.1]. Далее проверяем условия этого утверждения.

ШАГ II. Фиксируем $t \in \varphi(\Omega) \setminus \varphi(Z)$. Пусть M — связная компонента множества $\varphi^{-1}(t)$. Покажем, что функция $\tilde{d}_c(q, f(\cdot))$, ограниченная на поверхность M , удовлетворяет определению [31, определение 8.1]: существуют функция $\mu_M \in L_4(M)$ и множество S_M нулевой \mathcal{H}_e^2 -меры такие, что неравенство

$$|\tilde{d}_c(q, f(g)) - \tilde{d}_c(q, f(g'))| \leq d_c(g, g')(\mu_M(g) + \mu_M(g')) \quad (21)$$

справедливо для всех $g, g' \in M \setminus S_M$ относительно меры \mathcal{H}_e^2 .

Ниже для множества $A \subset \Omega$ через I_A обозначим индикатор этого множества (если $g \in A$, то $I_A(g) = 1$, если $g \notin A$, то $I_A(g) = 0$).

Можно положить $S_M = M \cap S$. Действительно, взяв в формуле коплощади $\Phi = I_S$, получим, что $\int_{\varphi^{-1}(t) \cap S} d\mathcal{H}_{sr}^3 = 0$ для п. в. $t \in \varphi^{-1}(\Omega)$. Можно

считать, что последнее равенство верно для фиксированного выше t . В силу предложения 3 и соотношения (15) имеем

$$0 = \int_{\varphi^{-1}(t) \cap S} d\mathcal{H}_{sr}^3(g) = \int_{\varphi^{-1}(t) \cap S} \frac{|\nabla_h \varphi(g)|}{|\nabla \varphi(g)|} d\mathcal{H}_e^2(g),$$

откуда, учитывая (15) и (13), выводим, что $\mathcal{H}_e^2(\varphi^{-1}(t) \cap S) = 0$.

Перейдем к функции μ_M . Так как $\mu \in L_4(\mathcal{O})$, по формуле коплощади

$$\infty > \int_{\Omega} I_{\mathcal{O}}(g) \frac{\mu^4(g)}{|\nabla_h \varphi(g)|} |\nabla_h \varphi(g)| d\mathcal{H}_{sr}^4 = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\varphi^{-1}(t)} I_{\mathcal{O}}(g') \frac{\mu^4(g')}{|\nabla_h \varphi(g')|} d\mathcal{H}_{sr}^3.$$

Следовательно, принимая во внимание предложение 3 и (13)–(15), можно считать, что для фиксированного выше t

$$\infty > \int_{\varphi^{-1}(t)} \frac{\mu^4(g')}{|\nabla \varphi(g')|} d\mathcal{H}_e^2(g') \geq \alpha_t \int_{\varphi^{-1}(t)} \mu^4(g') d\mathcal{H}_e^2(g').$$

Таким образом, в качестве функции μ_M следует взять ограничение $\mu|_M$ функции μ на поверхность M .

ШАГ III. В [31, теорема 8.7] требуется, чтобы мера \mathcal{H}_e^2 на поверхности M удовлетворяла следующей оценке снизу: для фиксированного шара B_0 с центром на M и постоянных $s, \gamma > 0, \sigma \geq 1$ выполнено $\mathcal{H}_e^2(M \cap B) \geq \gamma r^s$ для любого шара $B \subset B_0$ с центром на M радиуса r . Покажем, что эта оценка имеет место.

Фиксируем $g \in M$. Так как группа поворотов-сдвигов — это пространство Карно — Каратеодори глубины 2, согласно (1.16) в [32, теорема 1.3] найдутся постоянные $\gamma_1 = \gamma_1(\Omega_t, g) > 0, R_0 = R_0(\Omega_t, g) > 0$ такие, что для $0 < r < R_0$

$$P_X(\Omega_t; B(g, r)) \geq \gamma_1 \frac{\mathcal{H}_e^3(B(g, r))}{r}, \tag{22}$$

где $\Omega_t = \{g' \in \mathcal{RT} \mid \varphi(g') < t\}$, а $P_X(\Omega_t; B(g, r))$ — так называемый X -периметр множества Ω_t относительно шара $B(g, r)$, для которого справедливо двойное неравенство (см. соотношения (1.7) и (1.8) в [32])

$$\gamma_2^{-1} \int_{M \cap B(g, r)} |\nabla_h \varphi| d\mathcal{H}_e^2 \leq P_X(\Omega_t; B(g, r)) \leq \gamma_2 \int_{M \cap B(g, r)} |\nabla_h \varphi| d\mathcal{H}_e^2, \tag{23}$$

где $\gamma_2 = \gamma_2(\Omega_t) > 0$. В силу теоремы Vall-Box (см., например, [17, следствие 2.2]) найдется $r_0 > 0$ такое, что для $0 < r < r_0$

$$\gamma_3^{-1} r^4 \leq \mathcal{H}_e^3(B(g, r)) \leq \gamma_3 r^4, \tag{24}$$

где постоянная $\gamma_3 > 0$ не зависит от r . Используя (13) и (22)–(24), для $0 < r < R = \min\{R_0, r_0\}$ получаем

$$\gamma_2 \alpha_t^{-1} \mathcal{H}_e^2(B(g, r) \cap M) \geq \gamma_2 \int_{M \cap B(g, r)} |\nabla \varphi| d\mathcal{H}_e^2 \geq \gamma_2 \int_{M \cap B(g, r)} |\nabla_h \varphi| d\mathcal{H}_e^2 \geq \gamma_1 \frac{\gamma_3^{-1} r^4}{r},$$

откуда

$$\mathcal{H}_e^2(B(g, r) \cap M) \geq \gamma r^3, \tag{25}$$

где $\gamma = \alpha_t \gamma_1 \gamma_2^{-1} \gamma_3^{-1}$.

ШАГ IV. Результаты предыдущих шагов позволяют применить п. (3) теоремы 8.7 из [31] (положим $q = f(g)$ в (21)), откуда выводим, что отображение

$f : M \rightarrow \mathbb{H}^1$ можно переопределить на множестве нулевой \mathcal{H}_e^2 -меры так, чтобы оно удовлетворяло неравенству

$$\tilde{d}_c(f(g), f(g')) \leq C d_c(g, g')^{1/4} \left(\int_{M \cap B(g, 2r)} \mu^4 d\mathcal{H}_e^2 \right)^{1/4} \quad (26)$$

для всех $g \in M$ и $g' \in B(g, r) \cap M$, где $r \in (0, R/2)$, и некоторой постоянной C , которую можно считать зависящей только от M , поскольку γ_1 и R_0 , как сказано в [32, теорема 1.3], непрерывно зависят от $g \in M$, а M компактно.

Из (26) вытекает непрерывность (и даже гёльдеровость) отображения $f : M \rightarrow \mathbb{H}^1$.

(ii) ШАГ I. Пусть $A \subset M$ и $\mathcal{H}_{sr}^3(A) = 0$. В силу компактности M можно считать, что множество A содержится в шаре $B(g, R/4)$ с центром $g \in M$, где R определено на шаге III п. (i). Взяв достаточно малое $\varepsilon > 0$, подберем открытое в \mathcal{RT} множество U со следующими свойствами: $A \subset U$, \bar{U} — компактное множество в $B(g, R/2)$, $\mathcal{H}_{sr}^3(U \cap M) < \varepsilon$.

Группа поворотов-сдвигов, рассматриваемая как метрическое пространство с расстоянием d_c и мерой \mathcal{H}_{sr}^4 , является пространством однородного типа, поскольку в силу [17, предложение 2.2], замечаний 2 и 3 мера \mathcal{H}_{sr}^4 согласована с метрикой d_c через условие удвоения. В упомянутых пространствах справедлива лемма Уитни о покрытии (см. [33, (1.67)], где в формулировке речь идет об однородных группах, однако из доказательства видно, что нужны лишь свойства метрики и условие удвоения). Применяя ее, получаем, что существует последовательность точек $\{g_i \in U\}_{i \in \mathbb{N}}$ и чисел $\{r_i > 0\}_{i \in \mathbb{N}}$ таких, что

$$(W1) \quad U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(g_i, r_i);$$

$$(W2) \quad B(g_i, 5r_i) \subset U \text{ для всех } i \in \mathbb{N};$$

$$(W3) \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} I_{B(g_i, 5r_i)}(g') \leq Q \text{ для любой точки } g' \in U, \text{ где постоянная } Q \text{ зави-}$$

сит только от структурных констант метрического пространства $(\mathcal{RT}, d_c, \mathcal{H}_{sr}^4)$.

Отметим, что $5r_i < R$, поскольку $B(g_i, 5r_i) \subset U \subset B(g, R/2)$.

ШАГ II. Построим шары, покрывающие множество A , центры которых принадлежат A . Для этого рассмотрим шары $B(g_i, r_i)$ такие, что $B(g_i, r_i) \cap A \neq \emptyset$. Возьмем любую точку $g'_i \in B(g_i, r_i) \cap A$. Шары $B(g'_i, 2r_i)$ покрывают множество A , так как согласно неравенству треугольника $B(g_i, r_i) \subset B(g'_i, 2r_i)$. Используя (26) и (25), получаем оценку на диаметр образа шара:

$$(\text{diam } f(B(g'_i, 2r_i) \cap M))^3 \leq C_1 \mathcal{H}_e^2(B(g'_i, 2r_i) \cap M)^{1/4} \left(\int_{M \cap B(g'_i, 4r_i)} \mu^4 d\mathcal{H}_e^2 \right)^{3/4},$$

где постоянная C_1 не зависит от шаров $B(g'_i, 2r_i)$.

ШАГ III. Установим равенство $\mathcal{H}_c^3(f(A)) = 0$, которое равносильно следующему соотношению для вмести́мости по Хаусдорфу: $\mathcal{H}_{c, \infty}^3(f(A)) = 0$. Индекс « c » означает, что мера и вмести́мость, которые рассматриваются на подмножествах группы Гейзенберга, вычисляются относительно метрики \tilde{d}_c . Справедли-

ва цепочка неравенств, где постоянные C_2 и C_3 снова не зависят от шаров:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{c,\infty}^3(f(A)) &\leq C_1 \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_e^2(B(g'_i, 2r_i) \cap M)^{1/4} \left(\int_{M \cap B(g'_i, 4r_i)} \mu^4 d\mathcal{H}_e^2 \right)^{3/4} \\ &\leq C_2 \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{M \cap B(g'_i, 4r_i)} (1 + \mu^4) d\mathcal{H}_e^2 \leq C_3 \int_{M \cap U} (1 + \mu^4) \frac{|\nabla \varphi|}{|\nabla_h \varphi|} d\mathcal{H}_{sr}^3. \end{aligned}$$

В этой цепочке первое неравенство вытекает из оценки шага II, второе получено с помощью неравенства Юнга $ab \leq a^p/p + b^{p'}/p'$ с показателями $p = 4, p' = 4/3$, третье следует из включения $B(g'_i, 4r_i) \subset B(g_i, 5r_i)$, п. (W3) и предложения 3.

Для завершения доказательства осталось в неравенстве $\mathcal{H}_{sr}^3(U \cap M) < \varepsilon$ устремить ε к нулю.

(iii) Если $g \in M \setminus \chi$, то согласно [19, теорема 3.11(II)]

$$\mathcal{H}_e^2(\text{Box}_2(g, r) \cap M) = C_1 \frac{|\nabla \varphi(g)|}{|\nabla_h \varphi(g)|} r^3 (1 + o(1)) \quad \text{при } r \rightarrow 0,$$

где $o(1) \rightarrow 0$ равномерно по $g \in U \in \mathcal{RT}$, а постоянная C_1 зависит только от показателей размерности. С учетом замечания 2 отсюда следует, что мера \mathcal{H}_e^2 удовлетворяет условию удвоения для шаров с достаточно малыми радиусами:

$$\mathcal{H}_e^2(B(g, 2r) \cap M) \leq C_2 \mathcal{H}_e^2(B(g, r) \cap M)$$

при $0 < r < r_1$ и $g \in \mathcal{K}$, где $\mathcal{K} \subset M \setminus \chi$ — компактное множество. Это позволяет применить теорему Лебега [34, следствие 3], установленную в [34] для метрических пространств однородного типа: для \mathcal{H}_e^2 -п. в. $g \in M \setminus \chi$

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{g' \rightarrow g, g' \in M} \frac{\tilde{d}_c(f(g'), f(g))}{d_c(g', g)} \\ \leq C_3 \left(\overline{\lim}_{g' \rightarrow g, g' \in M} \frac{1}{\mathcal{H}_e^2(B(g', 2r) \cap M)} \int_{M \cap B(g', 2r)} \mu^4 d\mathcal{H}_e^2 \right) < \infty, \end{aligned}$$

где первое неравенство следует из (25), (26). Для завершения доказательства осталось вспомнить (15) и предложение 3.

(iv) ШАГ I. Из [22, предложение 6.2] следует, что $\mathcal{O} = \bigcup_{i=0}^{\infty} T_i$, где $\mathcal{O} = \text{spt } \varphi \subset \Omega$, $\mathcal{H}_{sr}^4(T_0) = 0$, и $f : T_i \rightarrow \mathbb{H}^1$ липшицево для каждого $i \geq 1$. Согласно [22, теорема 4.1] отображение $f : T_i \rightarrow \mathbb{H}^1$ h_c -дифференцируемо п. в. на T_i , т. е. для \mathcal{H}_{sr}^4 -п. в. $g \in T_i$ существует (горизонтальный) гомоморфизм $Df(g) : \mathcal{G}^g \rightarrow \mathcal{G}^{f(g)}$ локальных групп Карно такой, что

$$\tilde{d}_c(f(g'), Df(g)[g']) = o(d_c(g, g')) \quad \text{при } T_i \cap \mathcal{G}^g \ni g' \rightarrow g.$$

ШАГ II. Обозначим $\Sigma = \{g \in M \mid \overline{\lim}_{g' \rightarrow g, g' \in M} \frac{\tilde{d}_c(f(g'), f(g))}{d_c(g', g)} = \infty\}$. Из п. (iii) следует, что $\mathcal{H}_{sr}^3(\Sigma) = 0$. П. (iii) означает также, что каждая точка $g \in M \setminus \Sigma$ принадлежит множествам

$$A_k = \left\{ g \in M \mid \frac{\tilde{d}_c(f(g), f(g'))}{d_c(g, g')} \leq k \quad \forall g' \in B(g, k^{-1}) \cap M \right\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

начиная с некоторого $k_0(g)$. Легко видеть, что $A_k \subset A_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Фиксируем $k \in \mathbb{N}$ и представим A_k с точностью до множества нулевой \mathcal{H}_{sr}^3 -меры как объединение дизъюнктного набора непустых множеств $A_{k,1} \subset B(g_1^k, r_1)$, $A_{k,2} \subset B(g_2^k, r_2), \dots$, где $g_j^k \in A_k$ и $r_j < (2k)^{-1}$ для всех $j \in \mathbb{N}$, т. е. $A_k = Z_k \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_{k,j}$, где $\mathcal{H}_{sr}^3(Z_k) = 0$. Тогда ограничение $f_{k,j} = f|_{A_{k,j}}$ удовлетворяет условию Липшица для всех j и продолжается по непрерывности до отображения $\bar{f}_{k,j} : \bar{A}_{k,j} \rightarrow \mathbb{H}^1$.

ШАГ III. Проверим корректность этого продолжения: если $(M \setminus \Sigma) \cap (\bar{A}_{k,j} \setminus A_{k,j}) \neq \emptyset$, то $\bar{f}_{k,j} : (E \setminus \Sigma) \cap \bar{A}_{k,j} \rightarrow \mathbb{H}^1$ совпадает с $f : (E \setminus \Sigma) \cap \bar{A}_{k,j} \rightarrow \mathbb{H}^1$. Пусть $g \in (M \setminus \Sigma) \cap (\bar{A}_{k,j} \setminus A_{k,j})$. Тогда $g \in A_l$ для некоторого $l > k$, откуда $A_l \cap B(g, l^{-1}) \supset A_{k,j} \cap B(g, l^{-1})$, поэтому

$$f(g) = \lim_{g' \rightarrow g, g' \in A_l} f(g') = \lim_{g' \rightarrow g, g' \in A_{k,j}} f(g') = \bar{f}_{k,j}(g).$$

ШАГ IV. Фиксируем $i \geq 1$. Пусть $g \in (M \setminus \Sigma) \cap \bar{A}_{k,j} \cap T_i$ — точка hc -дифференцируемости липшицева отображения $\bar{f}_{k,j} : \bar{A}_{k,j} \cap T_i \rightarrow \mathbb{H}^1$ и точка \mathcal{H}_{sr}^3 -плотности³⁾ множества $\bar{A}_{k,j} \cap T_i$. Утверждение п. (iv) будет установлено, если покажем, что g — точка hc -дифференцируемости отображения $f : M \rightarrow \mathbb{H}^1$.

По определению $A_{k,j}$ неравенство $\tilde{d}_c(f_{k,j}(g''), f_{k,j}(g')) \leq kd_c(g'', g')$ выполняется для всех $g'' \in A_{k,j}$ и $g' \in B(g'', k^{-1}) \cap M$. Продолжив это неравенство на $\bar{A}_{k,j}$ по непрерывности, получим, что

$$\tilde{d}_c(\bar{f}_{k,j}(g''), f_{k,j}(g')) \leq kd_c(g'', g')$$

для всех $g'' \in \bar{A}_{k,j} \cap T_i$ и всех $g' \in B(g'', k^{-1}) \cap M$.

ШАГ V. Поскольку g — точка \mathcal{H}_{sr}^3 -плотности множества $\bar{A}_{k,j} \cap T_i$, для точки $g' \in M \cap \mathcal{G}^g$ ввиду [22, свойство 2.1] найдется точка $g'' \in \bar{A}_{k,j} \cap T_i$ такая, что

$$d_c(g'', g') = o(d_c(g, g')) \quad \text{при } g' \rightarrow g.$$

Обозначим hc -дифференциал отображения $\bar{f}_{k,j}$ в точке g через $L = Df(g)$. В достаточно малой окрестности точки g имеем

$$\begin{aligned} \tilde{d}_c(f(g'), Lg') &\leq \tilde{d}_c(f_{k,j}(g'), \bar{f}_{k,j}(g'')) + \tilde{d}_c(\bar{f}_{k,j}(g''), Lg'') + \tilde{d}_c(Lg'', Lg') \\ &\leq kd_c(g', g'') + o(d_c(g, g'')) + \tilde{d}_c(Lg'', Lg') = o(d_c(g, g')) + \tilde{d}_c(Lg'', Lg'). \end{aligned}$$

II. (iv) будет установлен, если покажем, что

$$\tilde{d}_c(Lg', Lg'') = o(d_c(g, g')) \quad \text{при } g' \rightarrow g.$$

Согласно локальной аппроксимационной теореме (см., например, [17, теорема 2.7]) имеем

$$\tilde{d}_c(Lg', Lg'') = \tilde{d}_c^{f(g)}(Lg', Lg'') + o(\tilde{d}_c^{f(g)}(f(g), Lg')) \quad \text{при } g' \rightarrow g. \quad (27)$$

³⁾Относительно меры \mathcal{H}_{sr}^3 почти каждая точка множества $((M \setminus \Sigma) \cap \bar{A}_{k,j} \cap T_i) \setminus \chi$ является точкой плотности, поскольку на любой компактной части этого множества мера удовлетворяет условию удвоения. В силу (14) \mathcal{H}_{sr}^3 -почти все точки множества $(M \setminus \Sigma) \cap \bar{A}_{k,j} \cap T_i$ являются его точками плотности.

Оценим первое слагаемое в этом равенстве. Ввиду однородности гомоморфизма L относительно растяжений на локальных группах Карно, а также его непрерывности⁴), при $g' \neq g''$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{d}_c^{f(g)}(Lg', Lg'')}{d_c^g(g', g'')} &\leq \sup_{u \neq v} \frac{\tilde{d}_c^{f(g)}(Lu, Lv)}{d_c^g(u, v)} \\ &= \sup_{w \neq \mathbf{0}} \frac{\tilde{d}_c^{f(g)}(\mathbf{0}, Lw)}{d_c^g(\mathbf{0}, w)} = \sup_{d_c^g(\mathbf{0}, w)=1} \tilde{d}_c^{f(g)}(\mathbf{0}, Lw) = C < \infty. \end{aligned}$$

По локальной аппроксимационной теореме

$$d_c^g(g', g'') = d_c(g', g'') + o(d_c(g, g')) \quad \text{при } g' \rightarrow g.$$

Таким образом,

$$\tilde{d}_c^{f(g)}(Lg', Lg'') \leq C d_c^g(g', g'') = C d_c(g', g'') + o(d_c(g, g')) = o(d_c(g, g')) \quad \text{при } g' \rightarrow g.$$

Перейдем ко второму слагаемому в (27). Из неравенства треугольника и определения hc -дифференцируемости выводим

$$\begin{aligned} \tilde{d}_c^{f(g)}(f(g), Lg') &\leq \tilde{d}_c^{f(g)}(f(g), f(g')) + \tilde{d}_c^{f(g)}(f(g'), Lg') \\ &= \tilde{d}_c^{f(g)}(f(g), f(g')) + o(d_c(g, g')) \quad \text{при } g' \rightarrow g. \end{aligned}$$

Локальная аппроксимационная теорема и липшицевость f на $\bar{A}_{k,j} \cap T_i$ дают

$$\begin{aligned} \tilde{d}_c^{f(g)}(f(g), f(g')) &= \tilde{d}_c(f(g), f(g')) + o(\tilde{d}_c(f(g), f(g'))) \\ &\leq k d_c(g, g') + o(d_c(g, g')) \quad \text{при } g' \rightarrow g. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$o(\tilde{d}_c^{f(g)}(f(g), Lg')) = o(d_c(g, g')) \quad \text{при } g' \rightarrow g.$$

(v) Благодаря левым сдвигам можно считать, что $g = \mathbf{0}$ — это точка дифференцируемости (в смысле п. (iv)) отображения f . Напомним, что T_0M рассматриваем как подпространство в $T_0\mathcal{RT} = T_0\mathcal{G}^0$. Пусть вектор $\xi = \sum_{i=1}^3 \xi_i \hat{X}_i^{\mathbf{0}}(\mathbf{0}) =$

$\sum_{i=1}^3 \xi_i X_i(\mathbf{0})$ принадлежит множеству $T_0M \cap \text{Вох}_2(\mathbf{0}, r)$, где r мало настолько,

что выполняется равенство (17). Тогда $\Xi = \exp\left(\sum_{i=1}^3 \xi_i \hat{X}_i^{\mathbf{0}}\right)(\mathbf{0})$ является элементом группы \mathcal{G}^0 . Подчеркнем, что точка Ξ не обязательно попадает на поверхность M . В результате возникает «зазор» между множествами $Df(\mathbf{0})(P_r)$ и $Df(\mathbf{0})(M_r)$, где $P_r = T_0M \cap \text{Вох}_2(\mathbf{0}, r)$ и $M_r = M \cap \text{Вох}_2(\mathbf{0}, r)$. Напомним снова, что символ $Df(\mathbf{0})$ обозначает как гомоморфизм локальных групп Карно \mathcal{G}^0 и $\mathcal{G}^{f(\mathbf{0})}$, так и линейное отображение пространств $T_0\mathcal{RT}$ и $T_{f(\mathbf{0})}\mathbb{H}^1$. В этом пункте покажем, что этот «зазор» незначителен.

Положим $|\Xi| = d_2^{\mathbf{0}}(\mathbf{0}, \Xi) = \max\{(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^{1/2}, |\xi_3|^{1/2}\}$. Тогда $|\xi_1| = O(|\Xi|)$, $|\xi_2| = O(|\Xi|)$, $|\xi_3| = O(|\Xi|^2)$ при $|\Xi| \rightarrow 0$. Пусть $e : T_0M \rightarrow M$ — экспоненциальное отображение касательной плоскости T_0M на поверхность M . При $|\Xi| \rightarrow 0$ имеем

$$e(\xi) = \exp((\xi_1 + o(|\Xi|))\hat{X}_1^{\mathbf{0}} + (\xi_2 + o(|\Xi|))\hat{X}_2^{\mathbf{0}} + (\xi_3 + o(|\Xi|^2))\hat{X}_3^{\mathbf{0}})(\mathbf{0}).$$

⁴)Напомним, что гомоморфизм групп Ли предполагается непрерывным.

Ввиду (8) матрица $Df(\mathbf{0})$ имеет вид

$$Df(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 \\ \delta_3 & \delta_4 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_5 \end{pmatrix}.$$

Для определенности примем $k = 1$. Тогда

$$\Pr_{f(\mathbf{0}),1} Df(\mathbf{0})[\Xi] = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_3 \xi_1 + \delta_4 \xi_2 \\ \delta_5 \xi_3 \end{pmatrix},$$

$$\Pr_{f(\mathbf{0}),1} Df(\mathbf{0})[e(\xi)] = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_3 \xi_1 + \delta_4 \xi_2 + o(|\Xi|) \\ \delta_5 \xi_3 + o(|\Xi|^2) \end{pmatrix}.$$

Отсюда выводим, что расстояние между этими элементами группы Гейзенберга удовлетворяет оценке

$$\tilde{d}_2(\Pr_{f(\mathbf{0}),1} Df(\mathbf{0})[\Xi], \Pr_{f(\mathbf{0}),1} Df(\mathbf{0})[e(\xi)]) = o(|\Xi|) \quad \text{при } |\Xi| \rightarrow 0,$$

из которой следует, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_e^2(\Pr_{f(\mathbf{0}),1} \circ Df(\mathbf{0}))(P_r)}{\mathcal{H}_e^2(P_r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_e^2(\Pr_{f(\mathbf{0}),1} \circ Df(\mathbf{0}))(M_r)}{\mathcal{H}_e^2(M_r)},$$

поскольку риманова метрика мажорируется субримановой. Согласно п. (1) предложения 4 риманов дифференциал отображения $l_{f(\mathbf{0})} \circ \mathbf{Pr}_1$ в $\mathbf{0}$ равен $\mathbf{Pr}_{f(\mathbf{0}),1}$, следовательно,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_e^2(\Pr_{f(\mathbf{0}),1} \circ Df(\mathbf{0}))(M_r)}{\mathcal{H}_e^2(M_r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_e^2(f(\mathbf{0})(\mathbf{Pr}_1 \circ Df(\mathbf{0}))(M_r))}{\mathcal{H}_e^2(M_r)}.$$

Для завершения доказательства осталось вспомнить равенство (19).

(vi) ШАГ I. Фиксируем точку $g \in M$. Можно считать, что в ней конечен предел из п. (iii), значит, для некоторого $k > 0$ справедливо неравенство $\tilde{d}_c(f(g), f(g')) \leq kd_c(g, g')$ для всех $g' \in B(g, 1/k) \cap M$, откуда

$$\tilde{d}_c(f(g), f(g')) = O(d_c(g, g')) \quad \text{при } B(g, 1/k) \cap M \ni g' \rightarrow g. \quad (28)$$

Также можно полагать, что g — точка дифференцируемости в смысле п. (iv), т. е.

$$\tilde{d}_c(f(g'), Df(g)[g']) = o(d_c(g, g')) \quad \text{при } \mathcal{G}^g \cap M \ni g' \rightarrow g. \quad (29)$$

Из неравенства треугольника и (28), (29) следует, что в достаточно малой окрестности точки g

$$\tilde{d}_c(f(g), Df(g)[g']) = O(d_c(g, g')) \quad \text{при } M \ni g' \rightarrow g. \quad (30)$$

Легко убедиться непосредственным вычислением (как в п. (v)), что соотношение (29) при наличии оценок (28), (30) влечет равенство

$$\tilde{d}_c(\mathbf{Pr}_k(f(g')), \mathbf{Pr}_k(Df(g)[g'])) = o(d_c(g, g')) \quad \text{при } M \ni g' \rightarrow g,$$

из которого следует, что

$$\mathcal{H}_{sr}^3((\mathbf{Pr}_k \circ f)(M_r)) = (1 + o(1)) \mathcal{H}_{sr}^3(\mathbf{Pr}_k(Df(g)(M_r))) \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad (31)$$

поскольку в точках дифференцируемости (в смысле п. (iv)) отображения f имеют

$$\mathcal{H}_{sr}^3(f(M_r)) = (1 + o(1))\mathcal{H}_{sr}^3(Df(g)(M_r)) \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

ШАГ II. Если $A \subset \mathbb{H}_{q,k}^1$, то $\mathcal{H}_{sr}^3(A) = C_2\mathcal{H}_e^2(A)$, где C_2 — постоянная из предложения 3. В самом деле, пусть для определенности $k = 1$. Тогда в предложении 3 следует положить $\varphi((a, b, c)) = a$, $(a, b, c) \in \mathbb{H}^1$. Получим $\nabla_h \varphi((a, b, c)) = \nabla \varphi((a, b, c)) = A(a, b, c)$.

Сделаем еще одно наблюдение: если $q' \in \mathbb{H}_{0,k}^1$ и $q \in \mathbb{H}^1$, то, как легко видеть, $q \cdot q' \in \mathbb{H}_{q,k}^1$.

ШАГ III. С учетом (31), инвариантности субримановой меры относительно левого сдвига, шага II, предложения 3 и п. (v) получаем

$$\begin{aligned} J(g, \mathbf{Pr}_k \circ f|_M) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_{sr}^3((\mathbf{Pr}_k \circ f)(M_r))}{\mathcal{H}_{sr}^3(M_r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_{sr}^3(\mathbf{Pr}_k(Df(g)(M_r)))}{\mathcal{H}_{sr}^3(M_r)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_{sr}^3(f(g) \mathbf{Pr}_k(Df(g)(M_r)))}{\mathcal{H}_{sr}^3(M_r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{C_2 \mathcal{H}_e^2(f(g) \mathbf{Pr}_k(Df(g)(M_r)))}{C_2 \sqrt{\nu_1^2(g) + \nu_2^2(g)} \mathcal{H}_e^2(M_r)} \\ &= \frac{|\det(\mathbf{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g)|_{T_g M})|}{\sqrt{\nu_1^2(g) + \nu_2^2(g)}}. \end{aligned}$$

(vii) Согласно п. (ii) настоящего утверждения и п. (2) предложения 4 отображение $\mathbf{Pr}_k \circ f|_M : M \rightarrow \mathbb{H}_{0,k}^1$ обладает \mathcal{N} -свойством Лузина. Кроме того, оно непрерывно, а искажение меры получено в п. (vi). Это позволяет стандартными рассуждениями получить формулу замены переменной. \square

Равенство (12) будет установлено, если проделаем вычисления, вполне аналогичные тем, которые проведены в цепочке равенств (2.29) в [12]. Пп. (vi) и (vii) предложения 5 вместе с соотношениями (16) и (18) приводят к выкладке:

$$\begin{aligned} \int_M (\nu_1(g)A_{1k}(g) + \nu_2(g)A_{2k}(g)) d\mathcal{H}_e^2(g) &= \int_M \frac{\det(\mathbf{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g)|_{T_g M})}{\sqrt{\nu_1^2(g) + \nu_2^2(g)}} d\mathcal{H}_{sr}^3(g) \\ &= \int_M J(g, \mathbf{Pr}_k \circ f|_M) \text{sign}(\det(\mathbf{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g)|_{T_g M})) d\mathcal{H}_{sr}^3(g) \\ &= \int_{\mathbb{H}_{0,k}^1} \sum_{g \in f^{-1}(q)} \text{sign}(\det(\mathbf{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g)|_{T_g M})) d\mathcal{H}_{sr}^3(q) \\ &= \int_{\mathbb{H}_{0,k}^1} \text{deg}(q, \mathbf{Pr}_k \circ f|_M) d\mathcal{H}_{sr}^3(q) = 0, \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из того, что отображение $\mathbf{Pr}_k \circ f|_M : M \rightarrow \mathbb{H}_{0,k}^1$ гомотопно постоянному, поэтому его топологическая степень равна 0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
2. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 3. С. 629–658.
3. Wojarski B., Iwaniec T. Analytic foundations of the theory of quasiconformal mappings in \mathbf{R}^n // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. 1983. V. 8, N 2. P. 257–324.

4. Mostow G. D. Strong rigidity of locally symmetric spaces. Princeton, NJ.: Princeton Univ. Press, 1973. (Ann. Math. Studies; № 78).
5. Pansu P. Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. of Math. 1989. V. 129, N 2. P. 1–60.
6. Korányi A., Reimann H. M. Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111, N 1. P. 1–87.
7. Водопьянов С. К. Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.
8. Heinonen J., Holopainen I. Quasiregular maps on Carnot groups // J. Geom. Anal. 1997. V. 7, N 1. P. 109–148.
9. Даирбеков Н. С. Свойство морфизма для отображений с ограниченным искажением на группе Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 811–823.
10. Даирбеков Н. С. Отображения с ограниченным искажением на группах Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 3. С. 567–590.
11. Dairbekov N. S. Mappings with bounded distortion of two-step Carnot groups // Proceedings on Analysis and Geometry (S. K. Vodopyanov, ed.). Novosibirsk: Sobolev Inst. Press, 2000. P. 122–155.
12. Vodopyanov S. K. Foundations of the theory of mappings with bounded distortion on Carnot groups // Contemp. Math. 2007. V. 424. P. 303–344.
13. Agrachev A., Barilari D. Sub-Riemannian structures on 3D Lie groups // J. Dynam. Control Systems. 2012. V. 18, N 1. P. 21–44.
14. Citti G., Sarti A. A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space // J. Math. Imaging Vis. 2006. V. 24, N 3. P. 307–326.
15. Hladky R., Pauls S. Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neuro-biological image completion model // J. Math. Imaging Vis. 2010. V. 36, N 1. P. 1–27.
16. Fässler K., Koskela P., Le Donne E. Nonexistence of quasiconformal maps between certain metric measure spaces // International Mathematics Research Notices. 2014. <http://imrn.oxfordjournals.org/content/early/2014/09/20/imrn.rnu153.full.pdf+html>.
17. Basalaev S. G., Vodopyanov S. K. Approximate differentiability of mappings of Carnot–Carathéodory spaces // Eurasian Math. J. 2013. V. 4, N 2. P. 10–48.
18. Mitchell J. On Carnot–Carathéodory metrics // J. Differ. Geom. 1985. V. 21. P. 35–45.
19. Karmanova M., Vodopyanov S. Coarea formula for smooth contact mappings of Carnot — Carathéodory spaces // Acta Appl. Math. 2013. V. 128. P. 67–111.
20. Гариени Р., Эванс Л. Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск: Науч. книга, 2002.
21. Бурбаки Н. Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. М.: Наука, 1970.
22. Vodopyanov S. K. Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // Contemp. Math. 2007. V. 424. P. 247–301.
23. Решетняк Ю. Г. Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.
24. Vodop'yanov S. K. \mathcal{P} -Differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Proceedings on Analysis and Geometry (S. K. Vodopyanov, ed.). Novosibirsk: Sobolev Institute Press, 2000. P. 603–670.
25. Водопьянов С. К., Исангулова Д. В. Дифференцируемость отображений пространств Карно — Каратеодори в топологии Соболева и BV -топологии // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 46–67.
26. Водопьянов С. К. Дифференцируемость отображений в геометрии многообразий Карно // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 251–271.
27. Karmanova M., Vodop'yanov S. Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // Analysis and mathematical physics, trends in mathematics. Basel/Switzerland: Birkhäuser-Verl., 2009. P. 233–335.
28. Kaplan A. Fundamental solutions for a class of hypoelliptic PDE generated by composition of quadratic forms // Trans. Amer. Math. Soc. 1980. V. 258, N 1. P. 147–153.
29. Derridj M. Un problème aux limites pour une classe d'opérateurs du second ordre hypoelliptiques // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 1971. V. 21, N 4. P. 99–148.
30. Derridj M. Sur un théorème de traces // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 1972. V. 22, N 2. P. 73–83.
31. Hajlasz P. Sobolev spaces on metric-measure spaces // Contemp. Math. 2003. V. 338. P. 173–218.

- 32. Capogna L., Garofalo N. Ahlfors type estimates for perimeter measures in Carnot — Carathéodory spaces // J. Geom. Anal. 2006. V. 16, N 4. P. 455–497.
- 33. Folland G. B., Stein E. M. Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton NJ.: Princeton Univ. Press, 1982. (Mathematical Notes; V. 28).
- 34. Водопьянов С. К., Ухлов А. Д. Функции множества и их приложения в теории пространств Лебега и Соболева. I // Мат. тр. 2003. Т. 6, № 2. С. 14–65.

Статья поступила 19 декабря 2013 г., окончательный вариант — 1 июня 2015 г.

Трямкин Максим Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
maxtryamkin@yandex.ru