



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Плеханова, Квазилинейные уравнения, не разрешимые относительно старшей производной по времени, *Сиб. матем. журн.*, 2015, том 56, номер 4, 909–921

DOI: 10.17377/smzh.2015.56.414

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.137.181.52

29 сентября 2024 г., 21:08:03



КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ,
НЕ РАЗРЕШИМЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО
СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

М. В. Плеханова

Аннотация. Представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения, разрешенного относительно старшей производной, с помощью функции Миттаг-Леффлера используется при изучении вырожденных линейных и квазилинейных эволюционных уравнений в случае выполнения некоторых специальных ограничений на нелинейную часть уравнения. Условия разрешимости, полученные для задачи Коши, упрощаются в ситуации, когда в качестве начального рассматривается обобщенное условие Шоултера — Сидорова. Полученные результаты использованы при исследовании начально-краевой задачи для уравнения движения жидкости Кельвина — Фойгта.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.414

Ключевые слова: уравнение высокого порядка, квазилинейное уравнение, вырожденное эволюционное уравнение, задача Коши, обобщенная задача Шоултера — Сидорова, начально-краевая задача.

1. Введение

Пусть \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} — банаховы пространства, заданы операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ (линейный и непрерывный из \mathfrak{X} в \mathfrak{Y}), $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ (линеен, замкнут и плотно определен в \mathfrak{X} , действует в \mathfrak{Y}) и нелинейный, вообще говоря, оператор $N : Y \rightarrow \mathfrak{Y}$, Y — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Предметом исследования является квазилинейное дифференциальное уравнение высокого порядка

$$\frac{d^m}{dt^m} Lx(t) = Mx(t) + N(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(m-1)}(t)) \quad (1.1)$$

с вырожденным оператором L при производной, т. е. в случае $\ker L \neq \{0\}$. Такие уравнения далее будем называть *вырожденными* или, следуя сложившейся традиции, *уравнениями соболевского типа* [1–3]. В класс уравнений вида (1.1) попадают многие уравнения и системы уравнений в частных производных, не разрешимые относительно старшей производной по выделенной переменной, которые встречаются при математическом моделировании различных процессов и явлений (см. [1, 3]).

Среди близких по тематике работ отметим монографию [4], касающуюся, в частности, вырожденных нелинейных эволюционных уравнений, монографию

Работа выполнена при поддержке лаборатории квантовой топологии Челябинского гос. университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020) и гранта Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-31125 мол.а).

[3], посвященную исследованию вопросов существования и разрушения решений уравнений в частных производных вида (1.1) с, вообще говоря, нелинейным оператором L , работы А. И. Кожанова (например, [5, 6]), И. А. Шипмарева с соавторами (см. [7] и др.).

В данном случае изучение разрешимости задач Коши и Шоултера — Сидорова для уравнения (1.1) проводится методами вырожденных полугрупп операторов, развитыми в работах Г. А. Свиридюка и В. Е. Федорова при исследовании вырожденных эволюционных уравнений первого порядка [2]. А именно, для линейных операторов в уравнении используется условие (L, p) -ограниченности оператора M . Это позволяет редуцировать (1.1) к системе двух уравнений, одно из которых является разрешенным относительно старшей производной, второе имеет при этой производной нильпотентный оператор, что упрощает его исследование. Близкий подход к изучению вырожденных полулинейных уравнений первого порядка использован в [8–11], а также в [12] при рассмотрении неполного вырожденного полулинейного уравнения второго порядка в случае $p = 0$.

Представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения, разрешенного относительно старшей производной, с помощью функции Миттаг-Леффлера используется при изучении вырожденных линейных и квазилинейных эволюционных уравнений в случае выполнения некоторых специальных ограничений на нелинейный оператор N . Условия разрешимости, полученные для задачи Коши, упрощаются в ситуации, когда в качестве начального рассматривается обобщенное условие Шоултера — Сидорова. Полученные результаты использованы при исследовании начально-краевой задачи для уравнения движения жидкости Кельвина — Фойгта порядка $L = 1$ (в обозначениях [13]).

2. Задача Коши для невырожденного уравнения

Для дальнейших рассмотрений определим функцию Миттаг-Леффлера

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (2.1)$$

Рассмотрим задачу Коши

$$z^{(k)}(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2.2)$$

для неоднородного дифференциального уравнения

$$z^{(m)}(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.3)$$

где $m \in \mathbb{N}$, A — ограниченный оператор на банаховом пространстве \mathfrak{Z} (т. е. $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$), $f : [0, T] \rightarrow \mathfrak{Z}$ при заданном $T \in (0, +\infty]$. Решением задачи (2.2), (2.3) назовем функцию $z \in C^m([0, T]; \mathfrak{Z})$, для которой выполняются равенства (2.2) и (2.3).

С использованием свойств функции Миттаг-Леффлера и ее производных нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $f \in C([0, T]; \mathfrak{Z})$. Тогда при любом $z_0 \in \mathfrak{Z}$ существует единственное решение задачи (2.2), (2.3), при этом оно имеет вид

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{m, k+1}(At^m) z_k + \int_0^t (t-s)^{m-1} E_{m, m}(A(t-s)^m) f(s) ds. \quad (2.4)$$

Пусть Z — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathfrak{Z}^m$, оператор $B : Z \rightarrow \mathfrak{Z}$, вообще говоря, нелинейный, $z_k \in \mathfrak{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$. Рассмотрим задачу Коши

$$z^{(k)}(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1, \quad (2.5)$$

для квазилинейного уравнения

$$z^{(m)}(t) = Az(t) + B(t, z(t), z^{(1)}(t), \dots, z^{(m-1)}(t)). \quad (2.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Более естественным было бы рассматривать уравнение (2.6) с оператором $A = 0$, поскольку оператор B зависит в том числе и от самой искомой функции z . Однако для использования полученных результатов при рассмотрении квазилинейного вырожденного уравнения понадобится именно такая постановка задачи.

Решением задачи (2.5), (2.6) на промежутке $[t_0, t_1]$ называется функция $z \in C^m([t_0, t_1]; \mathfrak{Z})$, для которой выполняются условия (2.5), $(t, z(t), z^{(1)}(t), \dots, z^{(m-1)}(t)) \in Z$ для $t \in [t_0, t_1]$ и верно равенство (2.6).

Стандартным образом доказывается следующее утверждение.

Лемма 2.1. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $B \in C(Z; \mathfrak{Z})$, $(t_0, z_0, z_1, \dots, z_{m-1}) \in Z$. Тогда функция $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathfrak{Z})$ является решением задачи (2.5), (2.6) в том и только в том случае, когда при $t \in [t_0, t_1]$

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (t - t_0)^k E_{m, k+1} (A(t - t_0)^m) z_k + \int_{t_0}^t (t - s)^{m-1} E_{m, m} (A(t - s)^m) B(s, z(s), z^{(1)}(s), \dots, z^{(m-1)}(s)) ds. \quad (2.7)$$

Здесь и далее черта над символом означает, что речь идет о наборе m элементов с индексами от нуля до $m - 1$, например $\bar{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{m-1})$. Пусть Z — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathfrak{Z}^m$, $S_\delta(\bar{z}) = \{\bar{y} \in \mathfrak{Z}^m : \|y_k - z_k\|_{\mathfrak{Z}} \leq \delta, k = 0, \dots, m - 1\}$. Отображение $B : Z \rightarrow \mathfrak{Z}$ будем называть *локально липшицевым по z* , если для любой точки $(t_0, \bar{z}) \in Z$ найдутся такие $\delta > 0$, $l > 0$, при которых $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times S_\delta(\bar{z}) \subset Z$ и при всех $(t, \bar{y}), (t, \bar{v})$ из множества $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times S_\delta(\bar{z})$ выполняется неравенство

$$\|B(t, \bar{y}) - B(t, \bar{v})\|_{\mathfrak{Z}} \leq l \sum_{k=0}^{m-1} \|y_k - v_k\|_{\mathfrak{Z}}.$$

Теорема 2.2. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $m \in \mathbb{N}$, Z — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathfrak{Z}^m$, отображение $B \in C(Z; \mathfrak{Z})$ локально липшицево по z . Тогда для любых $(t_0, z_0, z_1, \dots, z_{m-1}) \in Z$ существует такое $t_1 > t_0$, что задача (2.5), (2.6) имеет единственное решение на $[t_0, t_1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению леммы 2.1 достаточно показать, что уравнение (2.7) имеет единственное решение $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathfrak{Z})$ для некоторого $t_1 > t_0$.

В силу открытости множества Z можно выбрать $\tau > 0$ и $\delta > 0$ так, что $V = [t_0, t_0 + \tau] \times S_\delta(\bar{z}) \subset Z$, где вектор \bar{z} составлен из заданных в (2.5) элементов z_0, z_1, \dots, z_{m-1} . Обозначим через S множество всех функций $y \in C^{m-1}([t_0, t_0 + \tau]; \mathfrak{Z})$ таких, что выполняются неравенства $\|y^{(k)}(t) - z_k\|_{\mathfrak{Z}} \leq \delta$

при $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$. Зададим на S метрику $d(y, v) = \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{t \in [t_0, t_0 + \tau]} \|y^{(k)}(t) - v^{(k)}(t)\|_3$ и получим полное метрическое пространство S .

Используя стандартную технику, можно показать, что оператор G , определенный в S правой частью уравнения (2.7), при достаточно малом $\tau > 0$ отображает S в себя и является в нем строгим сжатием. \square

Теорема 2.3. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $m \in \mathbb{N}$, Z — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathfrak{Z}^m$, $n \in \mathbb{N}$, отображение $B \in C^n(Z; \mathfrak{Z})$ локально липшицево по z . Тогда для любых $(t_0, z_0, z_1, \dots, z_{m-1}) \in Z$ существует решение $z \in C^{m+n}([t_0, t_1]; \mathfrak{Z})$ задачи (2.5), (2.6) при некотором $t_1 > t_0$.

Доказательство. Имея возможность дифференцирования правой части уравнения (2.6), получаем дополнительную дифференцируемость его левой части, т. е. дополнительную гладкость решения. Это, в свою очередь, дает право дифференцировать правую часть еще раз на следующем шаге рассуждений. Цепочка рассуждений оборвется, когда справа старшая производная от B будет иметь порядок n . При этом в левой части равенства будет получена производная от функции z порядка $m + n$. \square

3. Вырожденное линейное неоднородное уравнение

Для исследования вырожденного уравнения будем использовать результаты теории вырожденных полугрупп операторов, доказательства которых можно найти в [2, с. 89–91, 95].

Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ — банаховы пространства, $\mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из \mathfrak{X} в \mathfrak{Y} . Множество линейных замкнутых операторов с областями определения, плотными в пространстве \mathfrak{X} , действующих в \mathfrak{Y} , обозначим через $\mathcal{C}l(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$. Если $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}$, то обозначения будут иметь вид $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ и $\mathcal{C}l(\mathfrak{X})$ соответственно. Через D_M будем обозначать область определения оператора M , снабженную нормой его графика $\|\cdot\|_{D_M} = \|\cdot\|_{\mathfrak{X}} + \|M \cdot\|_{\mathfrak{Y}}$.

Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$. Введем в рассмотрение L -резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X})\}$ оператора M и его L -спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$, а также положим $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L_\mu^L = L(\mu L - M)^{-1}$.

Оператор M называется (L, σ) -ограниченным, если его L -спектр $\sigma^L(M)$ является ограниченным множеством, т. е.

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Лемма 3.1 [2, с. 89, 90]. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен, $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. Тогда проекторами являются операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}), \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma L_\mu^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}). \quad (3.1)$$

Положим $\mathfrak{X}^0 = \ker P$, $\mathfrak{Y}^0 = \ker Q$; $\mathfrak{X}^1 = \text{im } P$, $\mathfrak{Y}^1 = \text{im } Q$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на \mathfrak{X}^k ($D_{M_k} = D_M \cap \mathfrak{X}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 3.1 [2, с. 90, 91]. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда

- (i) $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^1; \mathfrak{Y}^1)$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}^0; \mathfrak{Y}^0)$, $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^k; \mathfrak{Y}^k)$, $k = 0, 1$;
- (ii) существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0; \mathfrak{X}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1; \mathfrak{X}^1)$.

Обозначим $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $H = M_0^{-1}L_0$. При $p \in \mathbb{N}_0$ оператор M называется (L, p) -ограниченным, если он (L, σ) -ограничен, $H^p \neq \mathbb{O}$, $H^{p+1} = \mathbb{O}$.

Лемма 3.2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, оператор M (L, σ) -ограничен, $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$,

$$X_{m,n}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) E_{m,n}(\mu t^m) d\mu, \quad t \geq 0.$$

Тогда для любого $t \geq 0$

$$X_{m,n}(t)P = PX_{m,n}(t) = X_{m,n}(t).$$

Доказательство. Возьмем контуры $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$, $\gamma_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r + 1\}$, тогда

$$\begin{aligned} X_{m,n}(t)P &= PX_{m,n}(t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma} \int_{\gamma_1} R_{\lambda}^L(M) R_{\mu}^L(M) E_{m,n}(\mu t^m) d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) E_{m,n}(\mu t^m) d\mu \int_{\gamma_1} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu} \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_1} R_{\lambda}^L(M) d\lambda \int_{\gamma} \frac{E_{m,n}(\mu t^m) d\mu}{\lambda - \mu} = X_{m,n}(t). \quad \square \end{aligned}$$

Отсюда очевидным образом получаем

Следствие 3.1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда $\mathfrak{X}^0 \subset \ker X_{m,n}(t)$, $\text{im } X_{m,n}(t) \subset \mathfrak{X}^1$ для любого $t \geq 0$.

Лемма 3.3. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда $X_{m,n}(t) = E_{m,n}(L_1^{-1} M_1 t^m)P$ при любом $t \geq 0$.

Доказательство. По теореме 3.1 $S_1 \equiv L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^1)$. Для $t \geq 0$ в силу леммы 3.2 и интегральной формулы Коши имеем

$$\begin{aligned} X_{m,n}(t) &= X_{m,n}(t)P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu I - S_1)^{-1} P E_{m,n}(\mu t^m) d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1} S_1^k P \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\mu^l t^{ml}}{(ml + n - 1)!} d\mu = E_{m,n}(S_1 t^m)P. \quad \square \end{aligned}$$

Решением задачи Коши

$$\frac{d^m}{dt^m} Lx(t) = Mx(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.2)$$

$$x^{(k)}(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.3)$$

называется функция $x \in C^{m-1}([0, T]; \mathfrak{X}) \cap C([0, T]; D_M)$, для которой $Lx \in C^m([0, T]; \mathfrak{Y})$, при этом для всех $t \in [0, T]$ выполняются равенство (3.2) и условия (3.3).

Следующее утверждение доказывается непосредственно.

Лемма 3.4. Пусть оператор $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ нильпотентен степени $p \in \mathbb{N}_0$, $H^k g \in C^{mk}([0, T]; \mathfrak{X})$, $k = 0, 1, \dots, p$. Тогда существует единственное решение уравнения

$$\frac{d^m}{dt^m} Hx(t) = x(t) + g(t), \quad (3.4)$$

при этом оно имеет вид

$$x(t) = - \sum_{k=0}^p \frac{d^{mk}}{dt^{mk}} H^k g(t). \quad (3.5)$$

Теорема 3.2. Пусть оператор M (L, p) -ограничен, $Qf \in C([0, T]; \mathfrak{B})$, $H^k M_0^{-1}(I - Q)f \in C^{mk}([0, T]; \mathfrak{X})$ при $k = 0, 1, \dots, p$,

$$\sum_{k=0}^p \frac{d^{mk+l}}{dt^{mk+l}} H^k M_0^{-1}(I - Q)f(t) = -(I - P)x_l, \quad l = 0, 1, \dots, m - 1. \quad (3.6)$$

Тогда существует единственное решение задачи (3.2), (3.3), при этом оно имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k X_{m,k+1}(t)x_k + \int_0^t (t-s)^{m-1} X_{m,m}(t-s) L_1^{-1} Qf(s) ds - \sum_{k=0}^p \frac{d^{mk}}{dt^{mk}} H^k M_0^{-1}(I - Q)f(t). \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $w(t) \equiv (I - P)x(t)$, $v(t) \equiv Px(t)$. В силу теоремы 3.1 имеем

$$\frac{d^m}{dt^m} Hw(t) = w(t) + M_0^{-1}(I - Q)f(t), \quad H \equiv M_0^{-1}L_0, \quad (3.8)$$

$$\frac{d^m}{dt^m} v(t) = S_1 v(t) + h(t), \quad S_1 \equiv L_1^{-1}M_1, \quad h(t) = L_1^{-1}Qf(t). \quad (3.9)$$

Согласно лемме 3.4 существует единственное решение уравнения (3.8)

$$w(t) = - \sum_{k=0}^p \frac{d^{mk}}{dt^{mk}} H^k M_0^{-1}(I - Q)f(t).$$

Отсюда следует необходимость условий согласования (3.6) этого решения с начальными данными из условий (3.3).

В силу теоремы 3.1 оператор S_1 принадлежит $\mathcal{L}(\mathfrak{X}^1)$. Поэтому из теоремы 2.1 следует существование единственного решения задачи Коши $v^{(k)}(0) = Px_k$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$, для уравнения (3.9), при этом оно имеет вид

$$v(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{m,k+1}(S_1 t^m) Px_k + \int_0^t (t-s)^{m-1} E_{m,m}(S_1(t-s)^m) h(s) ds.$$

Ссылка на лемму 3.3 завершает доказательство. \square

Для уравнения (3.2) рассмотрим также часто возникающую в приложениях при рассмотрении вырожденных эволюционных уравнений обобщенную задачу Шоултера — Сидорова [14, 15]

$$P(x^{(k)}(0) - x_k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1. \quad (3.10)$$

Теорема 3.3. Пусть оператор M (L, p) -ограничен, $Qf \in C([0, T]; \mathfrak{B})$, $H^k M_0^{-1}(I - Q)f \in C^{mk}([0, T]; \mathfrak{X})$ при $k = 0, 1, \dots, p$. Тогда существует единственное решение задачи (3.2), (3.10), при этом оно имеет вид (3.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично предыдущему. Особенность обобщенного условия Шоултера — Сидорова заключается в том, что в начальный момент времени учитываются значения лишь проекций решения x на подпространство \mathfrak{X}^1 и его производных и, таким образом, нет необходимости в выполнении условий согласования (3.6).

4. Квазилинейное вырожденное уравнение высокого порядка

Рассмотрим полулинейное эволюционное уравнение

$$\frac{d^m}{dt^m} Lx(t) = Mx(t) + N(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(m-1)}(t)) \quad (4.1)$$

с операторами $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, нелинейным оператором $N : Y \rightarrow \mathfrak{Y}$, где Y — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}^m$.

Решением обобщенной задачи Шоуолтера — Сидорова (3.10), (4.1) на отрезке $[t_0, t_1]$ назовем такую функцию $x \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathfrak{X}) \cap C([t_0, t_1]; D_M)$, удовлетворяющую условиям (3.10), что $(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(m-1)}(t)) \in Y$, $Lx \in C^m([t_0, t_1]; \mathfrak{Y})$ при всех $t \in [t_0, t_1]$ и справедливо равенство (4.1).

Теорема 4.1. Пусть $p \in \mathbb{N}_0$, оператор M (L, p) -ограничен, множество Y открыто в $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}^m$, $V = Y \cap (\mathbb{R} \times (\mathfrak{X}^1)^m)$ открыто в $\mathbb{R} \times (\mathfrak{X}^1)^m$, для всех $(t, y_0, \dots, y_{m-1}) \in Y$ таких, что $(t, Py_0, \dots, Py_{m-1}) \in Y$, выполняется

$$N(t, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) = N(t, Py_0, Py_1, \dots, Py_{m-1}),$$

отображение $QN \in C^{\max\{0, mp-1\}}(V; \mathfrak{Y})$ локально липшицево по x и $H^k M_0^{-1}(I - Q)N \in C^{mk}(V; \mathfrak{X})$ при $k = 0, 1, \dots, p$. Тогда для любых $(t_0, x_0, \dots, x_{m-1}) \in V$ существует такое $t_1 > t_0$, что задача (3.10), (4.1) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть топология на Y определяется, например, нормой $\|(t, \bar{y})\|_{\mathbb{R} \times \mathfrak{X}^m} = |t| + \sum_{k=0}^{m-1} \|y_k\|_{\mathfrak{X}}$. Для $(t_0, \bar{x}) \in V$ возьмем окрестность

$$O_\delta(t_0, \bar{x}) = \left\{ (t, \bar{y}) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}^m : |t - t_0| + \sum_{k=0}^{m-1} \|y_k - x_k\|_{\mathfrak{X}} < \delta \right\},$$

лежащую в Y . Так как P — нетривиальный проектор, то $\|P\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \geq 1$. Тогда для любого $(t, \bar{y}) \in O_{\delta\|P\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}^{-1}}(t_0, \bar{x}) \subset Y$ имеем

$$|t - t_0| + \sum_{k=0}^{m-1} \|P(y_k - x_k)\|_{\mathfrak{X}} \leq |t - t_0| + \|P\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \sum_{k=0}^{m-1} \|y_k - x_k\|_{\mathfrak{X}} < \delta,$$

поэтому $(t, Py_0, Py_1, \dots, Py_{m-1}) \in O_\delta(t_0, \bar{x}) \subset Y$. Следовательно, существует такая окрестность в Y точки $(t_0, \bar{x}) \in V$, что $(t, Py_0, Py_1, \dots, Py_{m-1}) \in Y$ для всякого ее элемента (t_0, \bar{y}) .

Как и при доказательстве теоремы 3.2, поочередно домножим (4.1) слева на непрерывные операторы $L_1^{-1}Q$ и $M_0^{-1}(I - Q)$ и получим задачу

$$\begin{aligned} v^{(m)}(t) &= S_1 v(t) + L_1^{-1} Q N(t, v(t), v^{(1)}(t), \dots, v^{(m-1)}(t)), \\ v^{(k)}(t_0) &= Px_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\frac{d^m}{dt^m} Hw(t) = w(t) + M_0^{-1}(I - Q)N(t, v(t), v^{(1)}(t), \dots, v^{(m-1)}(t)) \quad (4.3)$$

для пары функций $v(t) = Px(t)$, $w(t) = (I - P)x(t)$. Здесь, как и выше, использованы обозначения $S_1 = L_1^{-1}M_1$, $H = M_0^{-1}L_0$. Задача (4.2) в силу теоремы 2.3 имеет единственное решение $v \in C^{\max\{m, m(p+1)-1\}}([t_0, t_1]; \mathfrak{X}^1)$ при некотором

$t_1 > t_0$, поскольку множество V открыто, оператор S_1 ограничен по теореме 3.1, а отображение $L_1^{-1}QN \in C^{\max\{0, mp-1\}}(V; \mathfrak{X})$ локально липшицево по x в силу условий данной теоремы.

Зная v , используя нильпотентность оператора H и формулу (3.5), найдем решение

$$w(t) = - \sum_{k=0}^p \frac{d^{mk}}{dt^{mk}} H^k M_0^{-1} (I - Q) N(t, v(t), v^{(1)}(t), \dots, v^{(m-1)}(t)) \quad (4.4)$$

уравнения (4.3), где $\frac{d^{mk}}{dt^{mk}} H^k M_0^{-1} (I - Q) N(t, v(t), v^{(1)}(t), \dots, v^{(m-1)}(t))$ — полная производная по переменной t mk -го порядка соответствующего отображения $t \rightarrow H^k M_0^{-1} (I - Q) N(t, v(t), v^{(1)}(t), \dots, v^{(m-1)}(t))$. Таким образом, существует решение $x = v + w$ исходной задачи. \square

В отличие от рассмотренной обобщенной задачи Шоултера — Сидорова задача Коши

$$x^{(k)}(t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (4.5)$$

для изучаемого класса уравнений, как и в линейном случае, требует условия согласования начальных данных с правой частью уравнения. Под решением задачи (4.1), (4.5) на отрезке $[t_0, t_1]$ будем понимать такую функцию $x \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathfrak{X}) \cap C([t_0, t_1]; D_M)$, удовлетворяющую условиям (4.5), что $(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(m-1)}(t)) \in Y$, $Lx \in C^m([t_0, t_1]; \mathfrak{Y})$ при всех $t \in [t_0, t_1]$ и выполняется (4.1).

Теорема 4.2. Пусть $p \in \mathbb{N}_0$, оператор M (L, p) -ограничен, множество Y открыто в $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}^m$, $V = Y \cap (\mathbb{R} \times (\mathfrak{X}^1)^m)$ открыто в $\mathbb{R} \times (\mathfrak{X}^1)^m$, для всех $(t, y_0, \dots, y_{m-1}) \in Y$ таких, что $(t, Py_0, \dots, Py_{m-1}) \in Y$, выполняется

$$N(t, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) = N(t, Py_0, Py_1, \dots, Py_{m-1}),$$

отображение $QN \in C^{\max\{0, m(p+1)-2\}}(V; \mathfrak{Y})$ локально липшицево по переменной x , отображение $H^k M_0^{-1} (I - Q) N$ принадлежит $C^{mk+m-1}(V; \mathfrak{X})$ при $k = 0, 1, \dots, p$ и для $(t_0, x_0, \dots, x_{m-1}) \in V$ при $n = 0, 1, \dots, m-1$ выполняются равенства

$$(I - P)x_n = - \sum_{k=0}^p \frac{d^{mk+n}}{dt^{mk+n}} \Big|_{t=t_0} H^k M_0^{-1} (I - Q) N(t, v(t), v^{(1)}(t), \dots, v^{(m-1)}(t)),$$

где $v \in C^{\max\{m, m(p+2)-2\}}([t_0, t_1]; \mathfrak{X}^1)$ — решение задачи (4.2). Тогда задача (4.1), (4.5) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО почти не отличается от предыдущего. Заметим лишь, что условие согласования означает в точности выполнение условий, соответствующих условиям (4.5) в начальный момент времени для решения (4.4) уравнения (4.3). Для проверки этих условий понадобятся производные от функции v до порядка $m(p+2) - 2$, а не до порядка $m(p+1) - 1$, как в теореме 4.1. По тем же причинам отображение $H^k M_0^{-1} (I - Q) N$ должно быть класса $C^{mk+m-1}(V; \mathfrak{Y})$, а не $C^{mk}(V; \mathfrak{Y})$. \square

В теоремах 4.1, 4.2 добавление в уравнение (4.1) слагаемого $f(t)$ не изменит ситуации, так как новый оператор $N(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(m-1)}(t)) + f(t)$ будет удовлетворять всем условиям этих теорем при достаточно гладкой функции f , если им удовлетворял оператор N . В рассматриваемой далее ситуации это не

так, поскольку используется условие $\text{im } N \subset \mathfrak{Y}^1$. В этом случае имеет смысл рассмотреть уравнение

$$\frac{d^m}{dt^m} Lx(t) = Mx(t) + N(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(m-1)}(t)) + f(t). \quad (4.6)$$

Теорема 4.3. Пусть $p \in \mathbb{N}_0$, оператор M (L, p) -ограничен, множество Y открыто в $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}^m$, $V = Y \cap (\mathbb{R} \times (\mathfrak{X}^1)^m)$ открыто в $\mathbb{R} \times (\mathfrak{X}^1)^m$, отображение $N \in C(Y; \mathfrak{Y})$ локально липшицево по x , $\text{im } N \subset \mathfrak{Y}^1$, $Qf \in C(\mathbb{R}; \mathfrak{Y})$ и $H^k M_0^{-1}(I-Q)f \in C^{mk+m-1}([t_0, t_1]; \mathfrak{X})$ при $k = 0, 1, \dots, p$. Тогда для любого $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) \in Y$ существует такое $t_1 > t_0$, что задача (3.10), (4.6) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{im } N \subset \mathfrak{Y}^1$, то $(I - Q)N \equiv 0$, $QN \equiv N$. В этом случае уравнение (4.6) после действия на обе его части оператора $M_0^{-1}(I - Q)$ принимает вид

$$\frac{d^m}{dt^m} Hw(t) = w(t) + M_0^{-1}(I - Q)f.$$

В силу нильпотентности оператора H это уравнение согласно лемме 3.3 имеет единственное решение

$$w(t) = - \sum_{k=0}^p \frac{d^{mk}}{dt^{mk}} H^k M_0^{-1}(I - Q)f(t).$$

Учитывая, что $x(t) = v(t) + w(t)$, остается с помощью теоремы 3.2 показать однозначную разрешимость задачи

$$\begin{aligned} v^{(m)}(t) &= S_1 v(t) + L_1^{-1} Qf(t) \\ &+ L_1^{-1} N(t, v(t) + w(t), v^{(1)}(t) + w^{(1)}(t), \dots, v^{(m-1)}(t) + w^{(m-1)}(t)), \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$v^{(k)}(t_0) = Px_k, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1,$$

получаемой из задачи (3.10), (4.6) с помощью действия оператора $L_1^{-1}Q$. При этом учитывается, что в правой части уравнения нелинейный оператор

$$\begin{aligned} &B(t, v(t), v^{(1)}(t), \dots, v^{(n)}(t)) \\ &= L_1^{-1} N(t, v(t) + w(t), v^{(1)}(t) + w^{(1)}(t), \dots, v^{(m-1)}(t) + w^{(m-1)}(t)) + L_1^{-1} Qf(t) \end{aligned}$$

непрерывен, а также локально липшицев по v в силу условий теоремы. \square

Теорема 4.4. Пусть $p \in \mathbb{N}_0$, оператор M (L, p) -ограничен, множество Y открыто в $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}^m$, $V = Y \cap (\mathbb{R} \times (\mathfrak{X}^1)^m)$ открыто в $\mathbb{R} \times (\mathfrak{X}^1)^m$, отображение $N \in C(Y; \mathfrak{Y})$ локально липшицево по x , $\text{im } N \subset \mathfrak{Y}^1$, $Qf \in C(\mathbb{R}; \mathfrak{Y})$ и $H^k M_0^{-1}(I-Q)f \in C^{mk+m-1}([t_0, t_1]; \mathfrak{X})$ при $k = 0, 1, \dots, p$. Тогда для заданных $(t_0, x_0, \dots, x_{m-1}) \in Y$, при $n = 0, 1, \dots, m - 1$ удовлетворяющих равенствам

$$(I - P)x_n = - \sum_{k=0}^p \frac{d^{mk+n}}{dt^{mk+n}} \Big|_{t=t_0} H^k M_0^{-1}(I - Q)f(t), \quad (4.8)$$

существует такое $t_1 > t_0$, что задача (4.5), (4.6) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При проводимых в доказательстве предыдущей теоремы рассуждениях для рассматриваемой в данном случае задачи Коши появятся

дополнительные условия согласования (4.8) так же, как при доказательстве теоремы 4.2. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В приложениях, когда оператор M (L, p) -ограничен, он часто является не замкнутым, а непрерывным: $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$. В этом случае естественным было бы рассматривать уравнение

$$\frac{d^m}{dt^m} Lx(t) = R(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(m-1)}(t)). \quad (4.9)$$

Однако в теоремах 4.1–4.4 вся структура вырожденного уравнения и соответственно условия теорем о разрешимости начальных задач для него определяются наличием (L, p) -ограниченности оператора M , т. е. взаимным соответствием двух операторов L и M . Поэтому предложенный метод исследования для уравнения (4.9) не подходит. Но, с другой стороны, появляется возможность исследования этого уравнения с помощью подбора такого оператора $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, что при переходе к уравнению (4.1) с нелинейным оператором $N(t, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) = R(t, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) - My_0$ условия теоремы о разрешимости выполняются.

5. Один случай слабого вырождения

В разд. 4 существенно использовалось либо условие независимости нелинейного оператора от элементов из \mathfrak{X}^0 , либо условие принадлежности образа нелинейного оператора подпространству \mathfrak{Y}^1 . Рассмотрим случай другого ограничения на нелинейность при слабом вырождении уравнения ($p = 0$). Именно, рассмотрим уравнение

$$\frac{d^m}{dt^m} Lx(t) = Mx(t) + N(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(m-1)}(t)), \quad (5.1)$$

где по-прежнему $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $N : Y \rightarrow \mathfrak{Y}$, Y — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}^m$. Через $[(I - Q)N]'_{x_{m-1}}(t, z_0, z_1, \dots, z_{m-1})$ обозначим производную Фреше оператора $(I - Q)N$ по последнему аргументу в точке $(t, z_0, z_1, \dots, z_{m-1}) \in Y$. Для краткости обозначим также $P_0 \equiv I - P$.

Теорема 5.1. Пусть оператор M $(L, 0)$ -ограничен, множество Y открыто в $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}^m$, $W = Y \cap (\mathbb{R} \times (\mathfrak{X}^0)^m)$ открыто в $\mathbb{R} \times (\mathfrak{X}^0)^m$, отображение $QN \in C(Y; \mathfrak{Y})$ локально липшицево по x , $(I - Q)N \in C^1(Y; \mathfrak{Y})$, для всех $(t, z_0, z_1, \dots, z_{m-1}) \in Y$ таких, что $(t, P_0 z_0, P_0 z_1, \dots, P_0 z_{m-1}) \in Y$, выполняется равенство

$$N(t, z_0, z_1, \dots, z_{m-1}) = N(t, P_0 z_0, P_0 z_1, \dots, P_0 z_{m-1}),$$

отображение $[(I - Q)N]'_{x_{m-1}}(t, z_0, z_1, \dots, z_{m-1}) : \mathfrak{X}^0 \rightarrow \mathfrak{X}^0$ является биекцией при всех $(t, z_0, z_1, \dots, z_{m-1})$ из окрестности точки $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) \in Y$ и $(I - P)x_0 + M_0^{-1}(I - Q)N(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) = 0$. Тогда существует такое $t_1 > t_0$, что задача (4.5), (5.1) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 4.1, вместо (4.3) получим уравнение

$$0 = w(t) + M_0^{-1}(I - Q)N(t, w(t), w^{(1)}(t), \dots, w^{(m-1)}(t)).$$

Оно разрешимо относительно $w^{(n)}$ при t из некоторого интервала $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ по теореме о неявной функции в силу существования обратного оператора $(M_0^{-1}[(I - Q)N]'_{x_{m-1}}(t, z_0, z_1, \dots, z_{m-1}))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^0)$. Получим уравнение

$w^{(m-1)}(t) = G(t, w(t), w^{(1)}(t), \dots, w^{(m-2)}(t))$ с непрерывно дифференцируемым отображением G по совокупности переменных. Из теоремы 2.2 следует существование решения задачи $w^{(k)}(t_0) = (I - P)x_k$, $k = 0, 1, \dots, m - 2$, для последнего уравнения. Остается установить разрешимость задачи для линейного неоднородного уравнения

$$v^{(m)}(t) = S_1 v(t) + L_1^{-1} Q N(t, w(t), w^{(1)}(t), \dots, w^{(n)}(t)),$$

$$v^{(k)}(t_0) = P x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1.$$

6. Начально-краевая задача для уравнения движения жидкости Кельвина — Фойгта

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим систему уравнений

$$a(1 - \mu_1 \Delta) z_{tt} + (b - \mu_2 \Delta) z_t - \mu_3 \Delta z + a^2(z_t \cdot \nabla) z_t + b^2(z \cdot \nabla) z + ab[(z_t \cdot \nabla) z + (z \cdot \nabla) z_t] + r(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [t_0, T], \quad (6.1)$$

$$\nabla \cdot z = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times [t_0, T], \quad (6.2)$$

с граничным условием

$$z(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [t_0, T], \quad (6.3)$$

и начальными условиями

$$z(x, 0) = \psi_0(x), \quad z_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (6.4)$$

которая описывает движение жидкости Кельвина — Фойгта порядка $L = 1$ (система уравнений (0.47) в [13]). Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3)$ — функция памяти от вектора скорости, задаваемая интегралом Вольтерра от него, $r = \nabla p$ — градиент давления жидкости. Константы $a, b, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ и функция $f : \bar{\Omega} \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ известны.

Введем обозначения $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^3$, $\mathcal{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \nabla \cdot v = 0\}$. Замыкание линейала \mathcal{L} по норме пространства \mathbb{L}_2 обозначим через \mathbb{H}_σ , \mathbb{H}_π — ортогональное дополнение к \mathbb{H}_σ в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в \mathbb{L}_2 . Обозначим через $\Pi : \mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{H}_\pi$ соответствующий ортопроектор вдоль \mathbb{H}_σ , $\Sigma = I - \Pi$. Также будут использоваться пространства $\mathbb{H}^1 = (H^1(\Omega))^3$, \mathbb{H}_σ^1 — замыкание \mathcal{L} в норме \mathbb{H}^1 , $\mathbb{H}^2 = (H^2(\Omega))^3$, $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$.

Линейный замкнутый оператор $A : \mathbb{H}_\sigma \rightarrow \mathbb{H}_\sigma$, действующий на \mathbb{H}_σ^2 по правилу $A = \Sigma \Delta$, как известно [16], имеет дискретный конечнократный спектр, сгущающийся лишь на $-\infty$.

Условие (6.3) и уравнение (6.2) означают, что можно ограничиться поиском вектор-функций z со значениями $z(\cdot, t)$ в подпространстве \mathbb{H}_σ^2 . Положим

$$\mathfrak{X} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi, \quad \mathfrak{Y} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi. \quad (6.5)$$

В этих пространствах задачу (6.1)–(6.4) можно свести к задаче (3.10), (4.1) с помощью операторов

$$L = \begin{pmatrix} a(1 - \mu_1 A) & 0 \\ -a\mu_1 \Pi \Delta & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y}), \quad M = \begin{pmatrix} \mu_3 A & 0 \\ \mu_3 \Pi \Delta & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y}). \quad (6.6)$$

Нелинейный оператор задается формулой

$$N(t, z, r, z_t, r_t) = -(b - \mu_2 \Delta) z_t - a^2(z_t \cdot \nabla) z_t - b^2(z \cdot \nabla) z - ab[(z_t \cdot \nabla) z + (z \cdot \nabla) z_t] + f(x, t). \quad (6.7)$$

Лемма 6.1. Пусть пространства \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} определены в (6.5), а операторы L и M — формулами (6.6), $\mu_1 \neq 0$, $\mu_1^{-1} \notin \sigma(A)$. Тогда оператор M $(L, 0)$ -ограничен, при этом

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mu_3 \Pi \Delta (1 - \mu_1 A)^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mu_1 \Pi \Delta (1 - \mu_1 A)^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $v \in \mathbb{H}_\sigma$ при $|\mu| > \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|\mu_3 \lambda_k|}{|a(1 - \mu_1 \lambda_k)|}$

$$\begin{aligned} \|(\mu a - (\mu a \mu_1 + \mu_3)A)^{-1} v\|_{\mathbb{H}_\sigma^2}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + \lambda_k^2) |\langle v, \varphi_k \rangle|^2}{|\mu a - (\mu a \mu_1 + \mu_3) \lambda_k|^2} \\ &\leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, \varphi_k \rangle|^2 = C_1 \|v\|_{\mathbb{H}_\sigma}, \end{aligned}$$

поэтому $(\mu a - (\mu a \mu_1 + \mu_3)A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma; \mathbb{H}_\sigma^2)$. При таких $\mu \in \mathbb{C}$ оператор

$$(\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} (\mu a - (\mu a \mu_1 + \mu_3)A)^{-1} & 0 \\ (\mu a \mu_1 \Pi \Delta + \mu_3 \Pi \Delta)(\mu a - (\mu a \mu_1 + \mu_3)A)^{-1} & I \end{pmatrix}$$

непрерывно действует из \mathbb{L}_2 в $\mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi$. Таким образом, оператор M (L, σ) -ограничен, при этом

$$\begin{aligned} R_\mu^L(M) &= \begin{pmatrix} (\mu a - (\mu a \mu_1 + \mu_3)A)^{-1} a(1 - \mu_1 A) & 0 \\ (\mu a \mu_1 \Pi \Delta + \mu_3 \Pi \Delta)(\mu a - (\mu a \mu_1 + \mu_3)A)^{-1} a(1 - \mu_1 A) & 0 \end{pmatrix}, \\ L_\mu^L(M) &= \begin{pmatrix} a(1 - \mu_1 A)(\mu a - (\mu a \mu_1 + \mu_3)A)^{-1} & 0 \\ -a \mu_1 \Pi \Delta (\mu a - (\mu a \mu_1 + \mu_3)A)^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью интегралов Коши (3.1) вычисляются формулы для проекторов (6.8). Так как $L(I - P) = 0$, то $L_0 = 0$, $H = 0$, поэтому оператор M $(L, 0)$ -ограничен. \square

Теорема 6.1. Пусть $\mu_1 \neq 0$, $\mu_1^{-1} \notin \sigma(A)$, $\psi_0, \psi_1 \in \mathbb{H}_\sigma^2$, $f \in C([0, T]; \mathbb{L}_2)$. Тогда при некотором $t_1 \in (0, T]$ существует единственное решение $v \in C^2([t_0, t_1]; \mathbb{H}_\sigma^2)$, $r \in C([t_0, t_1]; \mathbb{H}_\pi)$ задачи (6.1)–(6.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нелинейный оператор (6.7) не зависит от r и r_t , поэтому в силу формулы (6.8) для проектора P удовлетворяет условию теоремы 4.1 о независимости от элементов из $(\mathfrak{X}^0)^m$. Для удобства сократим его обозначение до $N(t, z, z_t)$. Ввиду непрерывного вложения \mathbb{H}^2 в пространство $\mathbb{W}_4^1 = (W_4^1(\Omega))^3$ при каждом $t \in [t_0, t_1]$ имеем

$$\|N(t, z, z_t)\|_{\mathbb{L}_2} \leq c_1 \|z_t\|_{\mathbb{H}^2} + c_2 \|z\|_{\mathbb{W}_4^1}^2 + c_3 \|z\|_{\mathbb{W}_4^1} \|z_t\|_{\mathbb{W}_4^1} + c_2 \|z_t\|_{\mathbb{W}_4^1}^2 + \|f(\cdot, t)\|_{\mathbb{L}_2},$$

поэтому $N : [t_0, T] \times \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\sigma^2 \rightarrow \mathbb{L}_2$. Непрерывность этого оператора так же легко доказывается с помощью теорем вложения. В силу леммы 6.1 и по теореме 4.1 получим требуемое. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Отметим, что методы работы [12], используемые при исследовании неполных вырожденных полулинейных эволюционных уравнений второго порядка, не позволяют исследовать задачу (6.1)–(6.4), поскольку система уравнений в данном случае содержит производные первого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
2. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.
3. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
4. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov–Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002.
5. Кожанов А. И. О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, неразрешенных относительно старшей производной // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 2. С. 359–376.
6. Кожанов А. И. Начально-краевая задача для уравнения типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 1. С. 70–75.
7. Кайкина Е. И., Наумкин П. И., Шишмарёв И. А. Задача Коши для уравнения типа Соболева со степенной нелинейностью // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69, № 1. С. 61–114.
8. Свиридюк Г. А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно ограниченным оператором // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 4. С. 828–831.
9. Свиридюк Г. А., Сукачева Т. Г. О разрешимости нестационарной задачи динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости // Мат. заметки. 1998. Т. 63, № 3. С. 442–450.
10. Федоров В. Е., Давыдов П. Н. О нелокальных решениях полулинейных уравнений соболевского типа // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 3. С. 338–347.
11. Федоров В. Е., Давыдов П. Н. Полулинейные вырожденные эволюционные уравнения и нелинейные системы гидродинамического типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 267–270.
12. Замышляева А. А., Бычков Е. В. Фазовое пространство модифицированного уравнения Буссинеска // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2012. № 18. С. 13–19.
13. Осколков А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина — Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.
14. Showalter R. E. Nonlinear degenerate evolution equations and partial differential equations of mixed type // SIAM J. Math. Anal. 1975. V. 6, N 1. P. 25–42.
15. Сидоров Н. А. Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией // Мат. заметки. 1984. Т. 35, № 4. С. 569–578.
16. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961.

Статья поступила 16 июня 2014 г., окончательный вариант — 25 марта 2015 г.

Плеханова Марина Васильевна
Челябинский гос. университет, лаборатория квантовой топологии,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001;
Южно-Уральский гос. университет
(национальный исследовательский университет),
пр. Ленина, 76, Челябинск 454080
mariner79@mail.ru