Р. И. Окуонгае, М. Н. О. Ихиле, $L(\alpha)$-устойчивые неявные методы Рунге–Кутты переменного порядка со второй производной, *Сиб. журн. вычисл. матем.*, 2014, том 17, номер 4, 373–387

$\mathcal{AMS}$ subject classification: 65L05, 65L06

$L(\alpha)$-устойчивые неявные методы Рунге–Кутты переменного порядка со второй производной

Р.И. Окуонгае, М.Н.О. Ихиле

Department of Mathematics, University of Benin, P.M.B 1154, Benin City, Edo state, Nigeria
E-mails: okunoghae01@yahoo.co.uk (Окуонгае Р.И.), mnoikhilo@yahoo.com (Ихиле М.Н.О.)

Окуонгае Р.И., Ихиле М.Н.О. $L(\alpha)$-устойчивые неявные методы Рунге–Кутты переменного порядка со второй производной // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.— Новосибирск, 2014.— Т. 17, № 4.— С. 373–387.

В данной статье рассматривается обобщение популярных методов Рунге–Кутты (МРК) до методов Рунге–Кутты со второй производной (МРКВП) для прямого решения жестких начальных задач (НЗ) обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В этих методах используется техника коллокации и интерполяции. Последняя стадия входной аппроксимации идентична методу на выходе. МРКВП являются $L(\alpha)$-устойчивыми для исследуемых методов. Приводятся численные эксперименты, в которых один из этих методов сравнивается с методом Рунге–Кутты с двумя производными (МРКДП) и линейным многошаговым методом со второй производной (ЛММВП).

Ключевые слова: *вторая производная, метод Рунге–Кутты, коллокация, интерполяция.*

Okuonghae R.I., Ikhile M.N.O. $L(\alpha)$-stable variable order implicit second derivative Runge Kutta methods // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.— Novosibirsk, 2014.— Vol. 17, № 4.— P. 373–387.

This paper considers the extension of the popular Runge Kutta methods (RKMs) to second derivative Runge Kutta methods (SDRKMs) for the direct solution of stiff initial value problems (IVPs) of ordinary differential equations (ODEs). The methods are based on using collocation and interpolation techniques. The last stage of the input approximation is identical to the output method. The SDRKMs are $L(\alpha)$-stable for the methods examined. Numerical experiments are given comparing one of these methods with a two derivative Runge Kutta method (TDRKM) and a second derivative linear multistep method (SDLMM).

Key words: *second derivative, Runge Kutta method, collocation, interpolation.*

1. Введение

МРКВП представляют собой подкласс МРК с несколькими производными, обсуждавшийся в [9, 10]. Эти методы включают функцию со второй производной НЗ, такую как ЛММВП Энрайта [6]. Они могут быть одношаговыми многостадийными методами (см. [11, 12] соответственно). На МРК и МРКВП не влияет порядковый барьер Далквиста, существующий в ЛММ, рассматривавшихся в [5]. В работах [1–4] показано, что ЛММ, линейные многошаговые МРК и МРК являются подклассами суперкласса общих линейных методов (ОЛМ) или многостадийных-многозначных методов, предназначенных для численного решения НЗ в ОДУ:

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)), \quad x \in [x_0, X], \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $y : \Re \to \Re^m$ и $f : \Re^{m+1} \to \Re^m$. Цель данной статьи — построить высокоустойчивые МРКВП на основе коллокации из непрерывных линейных многошаговых методов Рунге–Кутты со второй производной (НЛМВП-МРК):

$$y(x_n + th) = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j(t) y_{n+j} + h \sum_{j=1}^{s} a_j(t) f_{n+t_j} + h^2 \sum_{j=1}^{s} \widehat{a}_j(t) f'_{n+t_j} \tag{2}$$

для получения МРКВП:

$$Y_i = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{ij}(t_i) y_{n+j} + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij}(t_i) F(Y_j) + h^2 \sum_{j=1}^{s} \widehat{a_{ij}}(t_i) F'(Y_j), \quad i = 1(1)s, \quad t_i \in [0, k], \tag{3}$$

$$y_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} \widehat{\alpha_j}(k) y_{n+j} + h \sum_{j=1}^{s} b_j(k) F(Y_j) + h^2 \sum_{j=1}^{s} \widehat{b_j}(k) F'(Y_j), \quad t = k, \tag{4}$$

где $\{Y_i = y(x_n + t_i h)\}_{i=1}^{s}$ — внутренние стадийные значения, $F(Y_j) = F(x_n + t_j h, Y_j)$ — стадийные производные, $F'(Y_j) = F'(x_n + t_j h, Y_j)$ — стадийные значения второй производной, $\{y_{n+j}\}_{j=0}^{k-1}$ и $\{y_{n+j}\}_{j=1}^{k}$ — $(k-1)$ вводов и выводов с шага интегрирования x_n на x_{n+1}, h — размер шага, $h = x_{n+1} - x_n$, k — номера шагов, а s — число стадий алгоритмов в (3) и (4) соответственно. Непрерывные коэффициенты $\alpha_{i,j}(t_i)$, $\widehat{\alpha_j}(t)$, $\widehat{a_j}(t_i)$, $b_j(t)$ и $\widehat{b_j}(t)$ — многочлены порядка, меньшего или равного p порядка (4). Переменная масштаба времени t в (2) определена как $t = (x - x_n)/h$. Вектор абсцисс, $c = [t_1, t_2, \ldots, t_s]^\top$, выбирается таким образом, чтобы получить устойчивые схемы высокого порядка с малыми константами ошибки. Выбор t, приводящий к получению устойчивых алгоритмов (4), рассматривался в [14–21]. Кроме того, в [22] отмечено, что методы коллокации — это неявные методы Рунге–Кутты, но не все неявные методы Рунге–Кутты являются методами коллокации.

НЛМВП-МРК в (4) — это метод коллокации; он является расширением линейного многошагового МРК, обсуждавшегося в [8] для численного решения НЗ в (1). Однако, поскольку это метод коллокации, он выгоден с точки зрения получения условий непрерывного порядка, непрерывной схемы и дискретного метода (см. [13–21]) без сложности корневых деревьев [1–4]. Кроме того, структура линейного многошагового МРК в (3) и (4) выгодна с точки зрения генерирования решения в любой требуемой выходной точке для получения плотных выходных данных. Интересно, что из (2) можно получить несколько хорошо известных методов в зависимости от того, как зафиксированы номер шага k, s, непрерывные коэффициенты $\widehat{a_j}(t)$, $\widehat{b_j}(t)$ и безразмерные переменные t в (3) и (4) соответственно. Таблица для НЛМВП-МРК в (3) и (4) — это расширенная таблица Бутчера:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
t_1 & \alpha_1(t_1) \ldots \alpha_k(t_1) & a_{11}(t_1) \ldots a_{1s}(t_1) & \widehat{a_{11}}(t_1) \ldots \widehat{a_{1s}}(t_1) \\
t_2 & \alpha_1(t_2) \ldots \alpha_k(t_2) & a_{21}(t_2) \ldots a_{2s}(t_2) & \widehat{a_{21}}(t_2) \ldots \widehat{a_{2s}}(t_2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
t_s & \alpha_1(t_s) \ldots \alpha_k(t_s) & a_{s1}(t_s) \ldots a_{ss}(t_s) & \widehat{a_{s1}}(t_s) \ldots \widehat{a_{ss}}(t_s) \\
\hline
 & \widehat{\alpha_1}(k) \ldots \widehat{\alpha_k}(k) & b_1(k) \ldots b_s(k) & \widehat{b_1}(k) \ldots \widehat{b_s}(k)
\end{array}. \tag{5}$$

Эквивалентная таблица имеет следующий вид:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
t & \alpha & A & \widehat{A} \\
\hline
 & \widehat{\alpha} & b & \widehat{b}
\end{array}. \tag{6}$$

ОЛМ-представление метода в (3) и (4) следующее:

$$\left(\begin{array}{c} Y \\ Y \\ \hline y^{[n]} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \widehat{A} & A & \alpha \\ \widehat{A} & A & \alpha \\ \hline \widehat{b} & b & \widehat{\alpha} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} h^2 F'(Y) \\ hF(Y) \\ \hline y^{[n-1]} \end{array}\right), \tag{7}$$

где $Y=(Y_1, Y_2, \ldots, Y_s)^\top$, $y^{[n]}=(y_{n+k}, y_{n+k-1}, \ldots, y_{n+1})^\top$, $F(Y)=(F(Y_1), F(Y_2), \ldots, F(Y_s))^\top$ и $F'(Y)=(F'(Y_1), F'(Y_2), \ldots, F'(Y_s))^\top$. Например, положив $k=1$, $\widehat{a_{ij}}(t_i)=0$ и $\widehat{b_j}(t)=0$ в (3) и (4) соответственно, мы получим одношаговые s-стадийные непрерывные методы Рунге–Кутты (МРК):

$$Y_i = y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}(t_i)F(Y_j), \quad i=1(1)s, \quad t_i\in[0,1], \tag{8}$$

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{s} b_j(1)F(Y_j). \tag{9}$$

Дискретный вариант НЛМ-МРК в (8) и (9) широко обсуждался в [1–4]. Теперь таблица Бутчера для одношагового s-стадийного МРК в (5) и (6) имеет следующий вид:

$$\begin{array}{c|cccc} t_1 & a_{11}(t_1) & a_{12}(t_1) & \ldots & a_{1s}(t_1)\\ t_2 & a_{21}(t_2) & a_{22}(t_2) & \ldots & a_{2s}(t_2)\\ \vdots & & \vdots & & \\ t_s & a_{s1}(t_s) & a_{s2}(t_s) & \ldots & a_{ss}(t_s)\\ \hline & b_1(1) & b_2(1) & \ldots & b_s(1) \end{array}. \tag{10}$$

Повторная фиксация $k=1$ в алгоритмах (3) и (4) дает непрерывный вариант неявного МРК (МРКДП) с двумя производными, обсуждавшийся в [11, 12]:

$$Y_i = y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}(t_i)F(Y_j) + h^2\sum_{j=1}^{s}\widehat{a_{ij}}(t_i)F'(Y_j), \quad i=1(1)s, \quad t_i\in[0,1], \tag{11}$$

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{s} b_j(1)F(Y_j) + h^2\sum_{j=1}^{s}\widehat{b_j}(1)F'(Y_j). \tag{12}$$

Непрерывные коэффициенты $\alpha_1(t_i)$ и $\widehat{\alpha_1}(t)$ предполагаются равными 1, и НЛМВП-МРК в (3) и (4) — неявный, если значения a_{ij}, $\widehat{a_{ij}}\neq 0$ по крайней мере для одного $i\le j$, $i,j=1(1)s$, и явный, если a_{ii}, $\widehat{a_{ij}}=0$ для всех $i\le j$, $i,j=1(1)s$. Явная схема НЛМВП-МРК подходит для численного решения нежестких НЗ в ОДУ, тогда как представляющие интерес неявные схемы используются для жестких НЗ.

Применив НЛМВП-МРК в (3) и (4) к тестовой скалярной функции

$$y'=\lambda y, \quad \mathrm{Re}(\lambda)>0, \tag{13}$$

мы получим $y_{n+k}=R(w,z)y_n$, где функция устойчивости $\pi(R,z)$ имеет вид:

$$\pi(R,z)=R^k-R(w,z)=R^k-\widehat{\alpha}w^\top-(zb+z^2\widehat{b})(1-zA-z^2\widehat{A})^{-1}\alpha w^\top, \quad z=\lambda h, \tag{14}$$

где $w=(1,R,R^2,\ldots,R^{k-1})$, $\widehat{\alpha}=(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1})$, $\alpha=[\alpha_{ij}]$. Для $k=1$ в (3) и (4) функция устойчивости имеет вид

$$\pi(R,z)=R-R(w,z)=R-1-(zb+z^2\widehat{b})(I-zA-z^2\widehat{A})^{-1}e, \tag{15}$$

где $e=(1,1,\ldots,1)^\top$. Однако для случая $k=1$ положим, что $R(z)=R(w,z)$.

2. Порядок, условия порядка, константы ошибки и согласованность

В статьях [2–4] показано, что условия порядка для МРК с функцией первой производной f порядка p могут быть получены при помощи корневых деревьев, тогда как в [11] и [12] соответственно использовался такой же подход, что и в [2] для получения условий порядка для (4). Здесь мы используем подход рядов Тейлора для получения необходимых условий порядка для предложенной схемы в (4), рассматривая ее как гибридный метод. Локальные ошибки усечения (ЛОУ) НЛМВП-МРК (3) и (4) задаются соответственно $\{E(t_i)\}_{i=1}^{s}$ и $E(k)$, где

$$\begin{aligned} E(t_i) = {} & \sum_{i=0}^{k} \alpha_{i,j} y(x_n + t_i h) - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j(t_i) y(x_n + jh) - h \sum_{j=1}^{s} a_j(t_i) y'(x_n + t_j h) - \\ & h^2 \sum_{j=1}^{s} \widehat{a_{ij}}(t_i) y''(x_n + t_j h), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} E(k) = {} & \sum_{j=0}^{k} \widehat{\alpha_j}(k) y(x_n + jh) - \sum_{j=0}^{k-1} \widehat{\alpha_j}(k) y(x_n + jh) - h \sum_{j=1}^{s} b(k) y'(x_n + t_j h) - \\ & h^2 \sum_{j=1}^{s} \widehat{b}(k) y''(x_n + t_j h), \end{aligned} \tag{17}$$

где $t_i \in [0,1]$, $i = 1(1)s$. Разложив (11) и (12) в ряды Тейлора в x_n, мы соответственно получим

$$h^\ell : \quad \frac{t_i^\ell}{\ell!} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{ij}; \quad \ell = 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} j\alpha_{ij} + \sum_{j=1}^{s} a_{ij}; \quad \ell = 1, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \frac{j^2 \alpha_{ij}}{2!} + \sum_{j=1}^{s} a_{ij} t_j + \sum_{j=1}^{s} \widehat{a_{ij}}; \quad \ell = 2, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \frac{j^\ell \alpha_{ij}}{\ell!} + \sum_{j=1}^{s} \frac{a_{ij} t_j^{\ell-1}}{(\ell-1)!} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\widehat{a_{ij}} t_j^{\ell-2}}{(\ell-2)!}; \quad \ell = 3, 4, \ldots, \quad i = 1(1)s, \end{cases} \tag{18}$$

$$h^\ell : \quad \frac{k^\ell}{\ell!} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \widehat{\alpha_{ij}}; \quad \ell = 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} j\widehat{\alpha_{ij}} + \sum_{j=1}^{s} \widehat{b_j}; \quad \ell = 1, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \frac{j^2 \widehat{a_{ij}}}{2!} + \sum_{j=1}^{s} b_j t_j + \sum_{j=1}^{s} \widehat{b_j}; \quad \ell = 2, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \frac{j^\ell \alpha_{ij}}{\ell!} + \sum_{j=1}^{s} \frac{b_j t_j^{\ell-1}}{(\ell-1)!} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\widehat{b_j} t_j^{\ell-2}}{(\ell-2)!}; \quad \ell = 3, 4, \ldots, \quad i = 1(1)s. \end{cases} \tag{19}$$

Справа — коэффициент h^ℓ в этом выражении. Пусть порядок стадий ЛМВП-МРК будет $p_1, p_2, \ldots, p_s$ соответственно. Тогда константы ошибки стадий изящно задаются следующим образом:

$$C_{p_i+1}^{(i)} = \frac{t_i^{p_i+1}}{(p_i+1)!} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j^{(p_i+1)} \alpha_j}{(p_i+1)!} - \sum_{j=1}^{\ell} \frac{t_j^{p_i} a_{ij}}{p_i!} - \sum_{j=1}^{s} \frac{t_j^{(p_i-1)} \widehat{a_{ij}}}{(p_i-1)!}; \quad p_i \geq 1, \quad i = 1(1)s. \tag{20}$$

Однако предполагается, что $p_1=p_2=p_3=\ldots=p_s=p$. Для ЛМВП-МРК (4) мы имеем p, где

$$C_{p+1}=\frac{k^{p+1}}{(p+1)!}-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{j^{(p+1)}\widehat{\alpha_j}}{(p+1)!}-\sum_{j=1}^{s}\frac{t_j^p b_j}{p!}-\sum_{j=1}^{s}\frac{t_j^{(p-1)}\widehat{b_j}}{(p-1)!};\quad p\geq 1. \tag{21}$$

Определение 1. Методы НЛМВП-МРК в (3) и (4) имеют порядок ошибки $p\geq 1$ при условии, что имеется константа C такая, что непрерывные ошибки локального усечения $\{E_i(t)\}$ стадий и $E(k)$ ЛМ-МРКВП удовлетворяют

$$\|\{E(t_i)\}_{i=1}^s\|=C(t_i)h^{p+1}+0(h^{p+2}),\quad i=1(1)s, \tag{22}$$

и

$$\|E(k)\|=C_k h^{p+1}+0(h^{p+2}), \tag{23}$$

где $\|\cdot\|$ может быть максимум-нормой, принятой для удобства. Порядок стадий и метода равны, и мы можем предположить, что этот метод равномерного порядка.

Определение 2. Стадии НЛМВП-МРК в (3) удовлетворяют условию предварительной согласованности, если

$$\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_{ij}=1,\quad i=1(1)s, \tag{24}$$

и условию согласованности, если, кроме того,

$$\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_{ij}+\sum_{j=1}^{s}a_{ij}=t_i,\quad i=1(1)s. \tag{25}$$

Определение 3. Говорят, что метод НЛМВП-МРК в (4) удовлетворяет условию предварительной согласованности, если

$$\sum_{j=0}^{k-1}\widehat{\alpha_{ij}}=1,\quad i=1(1)s, \tag{26}$$

и условию согласованости, если, кроме того, он удовлетворяет

$$\sum_{j=0}^{k-1}\widehat{\alpha_{ij}}+\sum_{j=1}^{s}\widehat{b_j}=k,\quad i=1(1)s. \tag{27}$$

Определение 4. Метод НЛМВП-МРК в (4) имеет нулевую устойчивость для фиксированного t при условии, что корни $(R_j,\, j=1(1)k)$ первого характеристического многочлена $\rho(R,t)$, определяемого как

$$\rho(R,t)=R^k-\sum_{j=0}^{k-1}\widehat{\alpha_j}R^j, \tag{28}$$

удовлетворяют $|R_j|\leq 1$ с простыми корнями $|R_j|=1$.

Определение 5. НЛМВП-МРК в (4) считается абсолютно устойчивым при z, если абсолютное значение корней $\{R_j\}_{j=0}^k$ в (14) меньше или равно единице.

Определение 6. НЛМВП-МРК в (4) считается A-устойчивым, если область абсолютной устойчивости численного интегратора лежит в открытой левой половине z-плоскости области абсолютной устойчивости.

Определение 7. НЛМВП-МРК в (4) считается L-устойчивым, если он является A-устойчивым и если (14) имеет абсолютные исчезающие корни при $z \to -\infty$.

Определение 8. НЛМВП-МРК в (4) считается $A(\alpha)$-устойчивым для некоторого $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$, если клин

$$S_\alpha = \{z : |Arg(-z)| < \alpha, z \neq 0\}$$

содержится в ее области абсолютной устойчивости. Самое большое значение α считается углом абсолютной устойчивости метода, а жестко устойчивый метод также является $A(\alpha)$-устойчивым (см. [3, с. 230]).

Определение 9. НЛМВП-МРК в (4) считается $L(\alpha)$-устойчивым для некоторого $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$, если он является $A(\alpha)$-устойчивым и если (14) имеет абсолютные исчезающие корни при $z \to -\infty$. Отметим, что $A(\frac{\pi}{2})$-устойчивость влечет A-устойчивость и $L(\frac{\pi}{2})$-устойчивость влечет L-устойчивость.

Коэффициенты МРКДП в [11, 12] были получены при помощи корневых деревьев (см. [1–4]). Пример неявного МРКДП, обсуждавшегося в [11, 12], — это двухстадийный метод четвертого порядка, коэффициенты которого представлены в расширенной таблице Бутчера:

$$\begin{array}{c|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{12} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{12} \end{array}. \tag{29}$$

Функция устойчивости — $R(z) = \dfrac{12 + 6z + z^2}{12 - 6z + z^2}$. Схема является A-устойчивой. Порядок других неявных методов РКДП, построенных в [11, 12], — от 3 до 6, методы 3 и 5 порядков являются L-устойчивыми, а методы 4 и 6 порядков являются A-устойчивыми соответственно.

Цель данной статьи — построить непрерывное расширение МРК со второй производной, подобное полученному Энрайтом [6] из схем в (4). Одношаговый метод (3) и (4) дает s-стадийный НМРКВП:

$$Y_i = y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}(t_i)F(Y_j) + h^2\widehat{a_{i1}}(t_i)F'(Y_1), \quad i = 1(1)s, \quad t_i \in [0, 1], \tag{30}$$

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{s} b_j(t)F(Y_j) + h^2\widehat{b_1}(t)F'(Y_1), \quad t = 1. \tag{31}$$

Вектор абсциссы c для s-стадийного МРКВП в (30), определяемый путем $c = [t_1 = \dfrac{1}{s}, t_2 = \dfrac{2}{s}, \ldots, t_s = 1]^\top$, дает дискретный вариант (30).

3. МРКВП на основе техники коллокации и интерполяции

Полиномиальная интерполяция совместно с коллокацией — очень полезный способ получения ЛММ на основе численных методов, таких как ЛММ, ЛММВП, блочные методы, и т. д. Ниже мы покажем, как их можно расширить для получения МРКВП равномерного порядка. Этот метод был успешно применен в [13–21]. Он позволяет получать методы высокого и равномерного по стадиям порядка по сравнению с теоретическим подходом Бутчера [4, 11, 12]. Пусть решением $y(x_n + t_i h)$ ОДУ (1) в точке x_{n+t_i} будет многочлен

$$y(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j x^j. \tag{32}$$

Дифференцируя (32) дважды по x, мы получим соответственно

$$y'(x) = f(x,y) = \sum_{j=1}^{N} j a_j x^{j-1}, \qquad y''(x) = f'(x,y) = \sum_{j=2}^{N} j(j-1) a_j x^{j-2}. \tag{33}$$

Используя коллокацию решения $y(x)$ при $x = x_{n+t_j}$, $j = 0(1)k$, и интерполяцию при $x = x_n$, мы получим линейную систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^N \\ 0 & 1 & 2x_{n+t_1} & 3x_{n+t_1}^2 & \dots & Nx_{n+t_1}^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & 2x_{n+t_s} & 3x_{n+t_s}^2 & \dots & Nx_{n+t_s}^{N-1} \\ 0 & 0 & 2 & 6x_{n+t_1} & \dots & N(N-1)x_{n+t_1}^{N-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ F(Y_1) \\ \vdots \\ F(Y_s) \\ F'(Y_1) \end{pmatrix}, \tag{34}$$

где $\{Y_i = y_{n+t_i}\}$ и $\{F(Y_i) = f(y_{n+t_i})\}_{i=1}^{s}$. Подставим значения t_i в вектор абсциссы $c = \left[\frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \dots, 1\right]^\top$ при $t_i = \frac{i}{s}$, $i = 1(1)s$), в (32) и решим полученную систему линейных уравнений (34) для $a_j, j = 0(1)N$. Подстановка полученных значений $a_j's$ в (32) и их оценивание при $x = x_n + t_i h$, $i = 1(1)s$, дает НМРКВП в (30) и (31) соответственно. Следовательно, наличие различных значений t в векторе абсциссы дает особый дискретный метод. Например, положив $s = 1$ в (30) и (31), мы получим соответственно

$$Y_1 = y_n + h a_{11}(t) F(Y_1) + h^2 \widehat{a_{11}}(t) F'(Y_1), \qquad y_{n+1} = y_n + h b_1(t) F(Y_1) + h^2 \widehat{b_1}(t) F'(Y_1), \tag{35}$$

так что при $N = 2$ в (32):

$$\begin{pmatrix} 1 & x_n & x_n^2 \\ 0 & 1 & 2x_{n+t_1} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ F(Y_1) \\ F'(Y_1) \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Теперь положим $t_1 = 1$ в (35) и решим полученную систему линейных уравнений (36) для $a_j, j = 0(1)N$. Снова, подставляя полученные значения $a_j's$ и $x = x_n + t_1 h$ в (32), получим непрерывный МРКВП для $s = 1$ следующего вида:

$$Y_1 = y_n + h t_1 F(Y_1) + h^2 \left(-t_1 + \frac{t_1^2}{2}\right) F'(Y_1), \qquad y_{n+1} = y_n + h t F(Y_1) + h^2 \left(-t + \frac{t^2}{2}\right) F'(Y_1). \tag{37}$$

Положив $t_1 = 1$ и $t = 1$ в (37), мы имеем

$$Y_1 = y_n + hF(Y_1) - \frac{h^2}{2} F'(Y_1), \qquad y_{n+1} = y_n + hF(Y_1) - \frac{h^2}{2} F'(Y_1). \tag{38}$$

Расширенная таблица Бутчера имеет следующий вид:

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \hline & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}. \tag{39}$$

Порядок $p = 2$, а функция устойчивости дискретного МРКВП12 есть $R(z) = \frac{2}{2 - 2z + z^2}$. Местоположение границы показывает, что этот метод является $L(90^\circ)$-устойчивым. $L(\pi/2)$-устойчивость влечет A-устойчивость. Аналогичным образом, положив $s = 2$ в (30) и (31), снова получим при $N = 3$ в (33):

$$Y_i = y_n + h\big[a_{i1}(t_i)F(Y_1) + a_{i2}(t_i)F(Y_2)\big] + h^2\widehat{a_{i1}}(t_i)F'(Y_1), \quad i = 1, 2, \quad t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = 1, \tag{40}$$

$$y_{n+1} = y_n + h\big[b_1(t)F(Y_1) + b_2(t)F(Y_2)\big] + h^2\widehat{b_1}(t)F'(Y_1), \quad t = 1. \tag{41}$$

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \\ 0 & 1 & 2x_{n+t_1} & 3x_{n+t_1}^2 \\ 0 & 1 & 2x_{n+t_2} & 3x_{n+t_2}^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_{n+t_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ F(Y_1) \\ F(Y_2) \\ F'(Y_1) \end{pmatrix}. \tag{42}$$

С использованием вышеприведенных процедур двухстадийный алгоритм НМРКВП третьего порядка имеет вид

$$y(x_n + th) = y_n + h\left[\left(2t^2 - \frac{4t^3}{3}\right)F(Y_1) + \left(t - 2t^2 + \frac{4t^3}{3}\right)F(Y_2)\right] + \left(-t + \frac{3t^2}{2} - \frac{2t^3}{3}\right)F'(Y_1). \tag{43}$$

Вставив значения абсциссы $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = 1$ в (39) и при $t = 1$ в (40), получим следующее:

$$Y_1 = y_n + \frac{h}{6}\big[2F(Y_1) + F(Y_2)\big] - \frac{5}{24}h^2F'(Y_1), \tag{44}$$

$$Y_2 = y_n + \frac{h}{6}\big[4F(Y_1) + 2F(Y_2)\big] - \frac{h^2}{6}F'(Y_1), \tag{45}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\big[4F(Y_1) + 2F(Y_2)\big] - \frac{h^2}{6}F'(Y_1). \tag{46}$$

Заметим, что последняя внутрення стадия (т. е. Y_2) идентична y_{n+1} на выходе, т. е. ($Y_2 = y_{n+1}$) (см. (45) и (46) соответственно).

Расширенная таблица Бутчера этого дискретного МРКВП23 при $s = 2$ и $p = 3$ имеет следующий вид:

$$\begin{array}{c|cc|cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{24} & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \hline & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \end{array}. \tag{47}$$

Функция устойчивости МРКВП23 следующая: $R(z) = \frac{-(24 + 8z + z^2)}{-24 + 16z - 5z^2 + z^3}$. Формула в (47) имеет угол абсолютной устойчивости 87° и является $L(87^\circ)$-устойчивой (см. рис. 1). С использованием вышеприведенных процедур мы получим следующий дискретный МРКВП, приведенный в расширенной таблице Бутчера для $s = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ и порядка 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 соответственно.

Для $s = 3$, $p = 4$ мы имеем

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
\frac{1}{3} & \frac{11}{144} & \frac{11}{36} & -\frac{7}{144} & -\frac{1}{8} & 0 & 0\\
\frac{2}{3} & \frac{5}{18} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{18} & -\frac{1}{9} & 0 & 0\\
1 & \frac{3}{16} & \frac{3}{4} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{18} & 0 & 0\\
\hline
 & \frac{3}{16} & \frac{3}{4} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{18} & 0 & 0
\end{array}. \tag{48}$$

Функция устойчивости МРКВП34 такая: $R(z) = \dfrac{648 + 270z + 48z^2 + 4z^3}{648 - 378z + 102z^2 - 17z^3 + 2z^4}$. Мы нашли, что (48) является $L(81^\circ)$-устойчивым.

Для $s = 4$, $p = 5$ мы имеем

$$\begin{array}{c|cccc|cccc}
\frac{1}{4} & \frac{143}{2160} & \frac{69}{160} & \frac{-11}{80} & \frac{-97}{4320} & \frac{-251}{2880} & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{2} & \frac{41}{540} & \frac{11}{20} & \frac{-3}{20} & \frac{13}{540} & \frac{-29}{360} & 0 & 0 & 0\\
\frac{3}{4} & \frac{3}{80} & \frac{117}{160} & \frac{-3}{80} & \frac{3}{160} & \frac{-27}{320} & 0 & 0 & 0\\
1 & \frac{13}{135} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{14}{135} & \frac{-7}{90} & 0 & 0 & 0\\
\hline
 & \frac{13}{135} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{14}{135} & \frac{-7}{90} & 0 & 0 & 0
\end{array}. \tag{49}$$

Функция устойчивости МРКВП45:

$$R(z) = \frac{-(15360 + 6912z + 1392z^2 + 156z^3 + 9z^4)}{-15360 + 8448z - 2160z^2 + 340z^3 - 37z^4 + 3z^5}.$$

МРКВП45 обладает свойством $L(73^\circ)$-устойчивости. Область устойчивости показана на рисунке.

Аналогичным образом, для $s = 5$, $p = 6$ мы имеем

$$\begin{array}{c|ccccc|ccccc}
\frac{1}{5} & \frac{5861}{9600} & \frac{-817}{675} & \frac{1373}{800} & \frac{-251}{150} & \frac{65399}{86400} & \frac{-19}{288} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{2}{5} & \frac{152}{225} & \frac{-679}{675} & \frac{119}{75} & \frac{-353}{225} & \frac{481}{675} & \frac{-14}{225} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{3}{5} & \frac{2151}{3200} & \frac{-23}{25} & \frac{1389}{800} & \frac{-81}{50} & \frac{2341}{3200} & \frac{-51}{800} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{4}{5} & \frac{101}{150} & \frac{-628}{675} & \frac{46}{25} & \frac{-112}{75} & \frac{959}{1350} & \frac{-14}{225} & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & \frac{775}{1152} & \frac{-25}{27} & \frac{175}{96} & \frac{-25}{18} & \frac{2831}{3456} & \frac{-19}{288} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
 & \frac{775}{1152} & \frac{-25}{27} & \frac{175}{96} & \frac{-25}{18} & \frac{2831}{3456} & \frac{-19}{288} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}. \tag{50}$$

Функция устойчивости МРКВП56:

$$R(z) = \frac{225000 + 75000z + 10500z^2 + 750z^3 + 24z^4}{225000 - 150000z + 48000z^2 - 9750z^3 + 1399z^4 - 149z^5 + 12z^6}.$$

МРКВП56 является L-устойчивым (см. теорему ниже).

Для $s = 6$ и $p = 7$ таблица Бутчера имеет следующий вид:

$$\begin{array}{c|cccccc|cccccc}
\frac{1}{6} & \frac{-818579}{3628800} & \frac{19987}{30240} & \frac{-25561}{60480} & \frac{9403}{45360} & \frac{-14879}{241920} & \frac{1231}{151200} & \frac{-19087}{362880} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{-31303}{226800} & \frac{317}{420} & \frac{-559}{1260} & \frac{611}{2835} & \frac{-107}{1680} & \frac{53}{6300} & \frac{-1139}{22680} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{-4069}{26880} & \frac{953}{1120} & \frac{-779}{2240} & \frac{337}{1680} & \frac{-541}{8960} & \frac{9}{1120} & \frac{-137}{2688} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{2}{3} & \frac{-4051}{28350} & \frac{779}{945} & \frac{-226}{945} & \frac{802}{2835} & \frac{-127}{1890} & \frac{41}{4725} & \frac{-143}{2835} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{5}{6} & \frac{-22411}{145152} & \frac{575}{672} & \frac{-1175}{4032} & \frac{3775}{9072} & \frac{5}{5376} & \frac{13}{2016} & \frac{-3715}{72576} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \frac{-997}{8400} & \frac{107}{140} & \frac{-23}{140} & \frac{29}{105} & \frac{103}{560} & \frac{41}{700} & \frac{-41}{840} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & \frac{-997}{8400} & \frac{107}{140} & \frac{-23}{140} & \frac{29}{105} & \frac{103}{560} & \frac{41}{700} & \frac{-41}{840} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\ . \tag{51}$$

Функция устойчивости МРКВП67:

$$R(z)=\frac{-19595520-9331200z-2073600z^2-280800z^3-25182z^4-1490z^5-50z^6}{-19595520+10264320z-2540160z^2+393120z^3-42462z^4+3388z^5-207z^6+10z^7}.$$

Схема в (51) является L-устойчивой.

Для $s = 7$ и $p = 8$ мы имеем

$$\begin{array}{c|ccccccc|cccccc}
\frac{1}{7} & \frac{-1557739}{5644800} & \frac{108497}{141120} & \frac{-347233}{564480} & \frac{255581}{635040} & \frac{-202261}{1128960} & \frac{33473}{705600} & \frac{-28549}{5080320} & \frac{-751}{17280} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{2}{7} & \frac{-107441}{529200} & \frac{628}{735} & \frac{-3761}{5880} & \frac{2747}{6615} & \frac{-2167}{11760} & \frac{179}{3675} & \frac{-61}{10584} & \frac{-41}{980} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{3}{7} & \frac{-5323}{25088} & \frac{14601}{15680} & \frac{-34521}{62720} & \frac{9319}{23520} & \frac{-22317}{125440} & \frac{741}{15680} & \frac{-211}{37632} & \frac{-265}{6272} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{4}{7} & \frac{-4579}{22050} & \frac{2018}{2205} & \frac{-1027}{2205} & \frac{9412}{19845} & \frac{-829}{4410} & \frac{542}{11025} & \frac{-23}{3969} & \frac{-278}{6615} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{5}{7} & \frac{143593}{677376} & \frac{8735}{9408} & \frac{-18575}{37632} & \frac{24275}{42336} & \frac{9115}{75264} & \frac{419}{9408} & \frac{-1835}{338688} & \frac{-265}{6272} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{6}{7} & \frac{-4003}{19600} & \frac{222}{245} & \frac{-891}{1960} & \frac{379}{735} & \frac{3}{3920} & \frac{123}{1225} & \frac{-41}{5880} & \frac{-41}{980} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \frac{-26971}{115200} & \frac{2849}{2880} & \frac{-6769}{11520} & \frac{8813}{12960} & \frac{-3493}{23040} & \frac{3857}{14400} & \frac{751}{20736} & \frac{-751}{17280} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & \frac{-26971}{115200} & \frac{2849}{2880} & \frac{-6769}{11520} & \frac{8813}{12960} & \frac{-3493}{23040} & \frac{3857}{14400} & \frac{751}{20736} & \frac{-751}{17280} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\ . \tag{52}$$

Функция устойчивости МРКВП78 имеет следующий вид: $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$,

$$\begin{aligned}
P(z) &= 16602626880 + 8004837960z + 1821206520z^2 + 257147100z^3 + 24835944z^4 + \\
&\quad 1691676z^5 + 79128z^6 + 2160z^7, \\
Q(z) &= 16602626880 - 8597788920z + 2117682000z^2 - 328744920z^3 + 35928564z^4 - \\
&\quad 2925447z^5 + 183400z^6 - 9054z^7 + 360z^8.
\end{aligned}$$

Этот метод является L-устойчивым, что означает A-устойчивость.

Для $s = 8$ и $p = 9$ мы имеем

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{5}{8} & \frac{3}{4} & \frac{7}{8} & 1 & \\
\hline
\frac{-50363}{196000} & \frac{-1341617}{5292000} & \frac{-815839}{3136000} & \frac{-170323}{661500} & \frac{-175753}{677376} & \frac{-50363}{196000} & \frac{-453653}{1728000} & \frac{-39169}{165375} & \frac{-39169}{165375} \\
\frac{5623}{5600} & \frac{432031}{453600} & \frac{182053}{179200} & \frac{14251}{14175} & \frac{587645}{580608} & \frac{5623}{5600} & \frac{2117731}{2073600} & \frac{13382}{14175} & \frac{13382}{14175} \\
\frac{-2001}{2800} & \frac{-65539}{75600} & \frac{-140367}{179200} & \frac{-6751}{9450} & \frac{-141565}{193536} & \frac{-2001}{2800} & \frac{-516803}{691200} & \frac{-2866}{4725} & \frac{-2866}{4725} \\
\frac{2699}{3360} & \frac{191803}{272160} & \frac{73319}{107520} & \frac{25717}{34020} & \frac{1453675}{1741824} & \frac{2699}{3360} & \frac{1063153}{1244160} & \frac{5561}{8505} & \frac{5561}{8505} \\
\frac{-59}{224} & \frac{-7571}{18144} & \frac{-1459}{3584} & \frac{-953}{2268} & \frac{-103235}{290304} & \frac{-59}{224} & \frac{-1357}{41472} & \frac{-67}{567} & \frac{-67}{567} \\
\frac{6009}{28000} & \frac{125131}{756000} & \frac{145179}{896000} & \frac{3916}{23625} & \frac{30733}{193536} & \frac{6009}{28000} & \frac{1132831}{3456000} & \frac{3842}{23625} & \frac{3842}{23625} \\
\frac{-347}{8400} & \frac{-26659}{680400} & \frac{-20659}{537600} & \frac{-3331}{85050} & \frac{-66235}{1741824} & \frac{-347}{8400} & \frac{35707}{6220800} & \frac{6854}{42525} & \frac{6854}{42525} \\
\frac{169}{39200} & \frac{13273}{3175200} & \frac{5149}{1254400} & \frac{1657}{396900} & \frac{16565}{4064256} & \frac{169}{39200} & \frac{6589}{2073600} & \frac{3956}{99225} & \frac{3956}{99225} \\
\hline
\frac{-401}{11200} & \frac{-32377}{907200} & \frac{-12881}{358400} & \frac{-4063}{113400} & \frac{-41705}{1161216} & \frac{-401}{11200} & \frac{-149527}{4147200} & \frac{-989}{28350} & \frac{-989}{28350} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
. \qquad (53)
$$

Функция устойчивости МРКВП89 имеет следующий вид: $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$,

$$
\begin{aligned}
P(z) = {} & 209754626457600 + 89619554304000z + 20793069932544z^2 + 1842182791680z^3 + \\
& 238174077120z^4 + 6088520520z^5 + 680549706z^6 - 388395z^7, \\
Q(z) = {} & 209754626457600 - 120135072153600z + 67101013905408z^2 - 6751116062208z^3 + \\
& 905272960704z^4 - 60175428728z^5 + 2317116834z^6 - 65144241z^7 + 711585z^8.
\end{aligned}
$$

Схема в (53) является $L(72^\circ)$-устойчивой.

Для $s = 9$ и $p = 10$ функция устойчивости МРКВП910 такая: $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$,

$$
\begin{aligned}
P(z) = {} & 2(9762996322800 + 4773020424480z + 1116918920880z^2 + 165618273240z^3 + \\
& 17341805565z^4 + 1349794530z^5 + 79752114z^6 + 3559194z^7 + 114624z^8 + 2240z^9), \\
Q(z) = {} & 19525992645600 - 9979951796640z + 2450793315600z^2 - 383912978400z^3 + \\
& 42942204270z^4 - 3636959130z^5 + 241300215z^6 - 12800565z^7 + 549819z^8 - \\
& 19298z^9 + 560z^{10}.
\end{aligned}
$$

Местонахождение границы этого метода показывает, что он является $L(88^\circ)$-устойчивым.

Для $s = 10$ и $p = 11$ функция устойчивости МРКВП1011 такая: $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$,

$$
\begin{aligned}
P(z) = {} & 69854400000000000 + 31254797700000000z + 5418414592500000z^2 + \\
& 1157655615750000z^3 + 62173779480000z^4 + 7436379935000z^5 + 280039536900z^6 + \\
& 13643666100z^7 + 426144348z^8 + 4477032z^9, \\
Q(z) = {} & 69854400000000000 - 38599602300000000z - 14516333107500000z^2 + \\
& 2680147373250000z^3 - 182517790020000z^4 + 5565795830000z^5 + 72448591900z^6 - \\
& 17565992675z^7 + 938745198z^8 - 22402491z^9 + 12852z^{10}.
\end{aligned}
$$

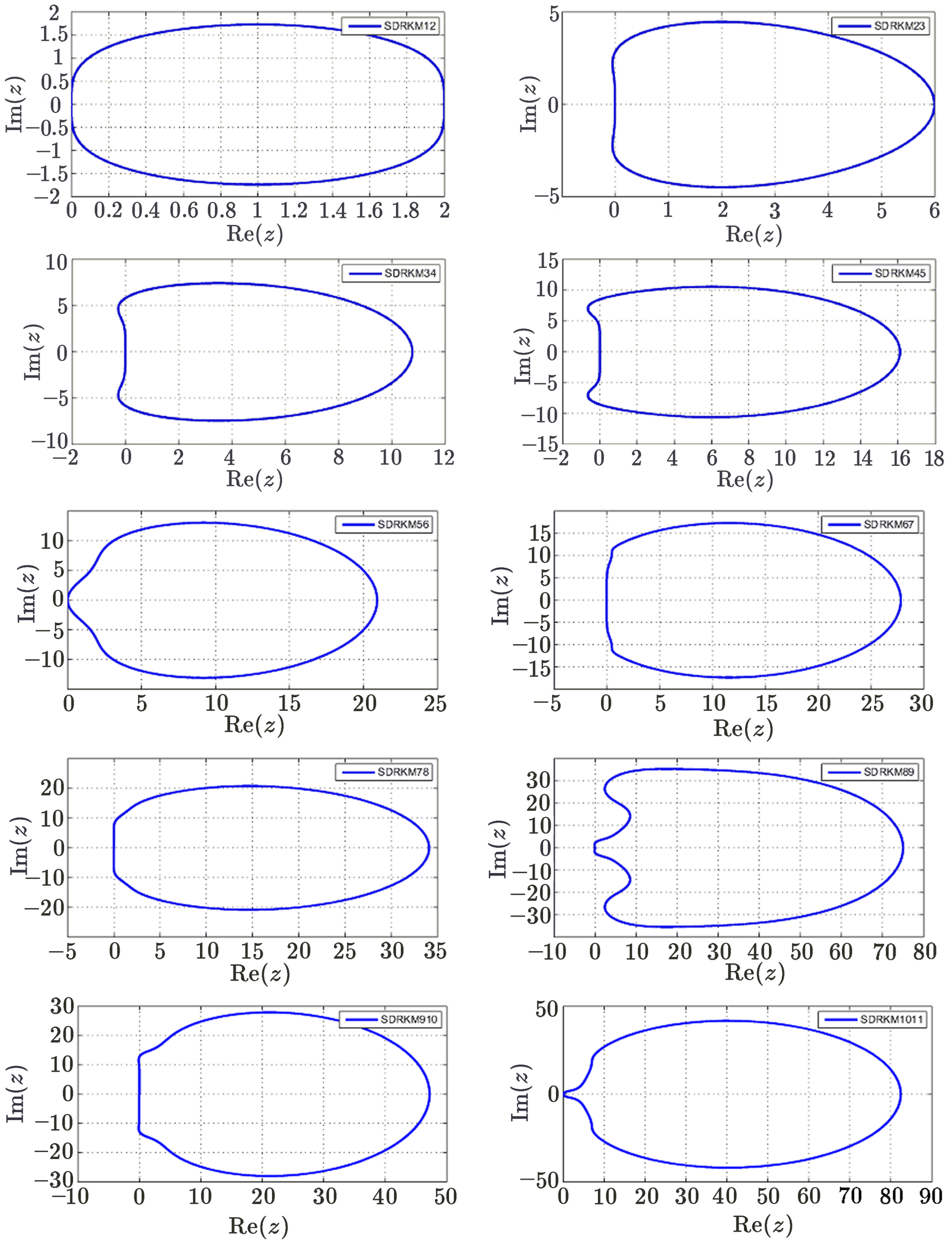

Рис. Область абсолютной устойчивости МРКВП в (4)

Угол абсолютной устойчивости $\alpha = 90°$, что означает L-устойчивость (см. рис.) Из рисунка следует, что для неявных МРКВП наблюдаются процессы нулевой устойчивости.

Теорема. *МРКВП* (4) *является* $A(\alpha)$*-устойчивым и таким, что*

$$R(-\infty) = 1 - \widehat{b}\widehat{A}^{-1}e = 0, \tag{54}$$

$\widehat{A}$ *не сингулярна и он является* $L(\alpha)$*-устойчивым. Действительно, если* $\alpha = \frac{\pi}{2}$, *он является* L*-устойчивым.*

Из этой теоремы следует, что МРКВП (4) удовлетворяет определениям 7, 8 и 9 соответственно. Теорема доказана.

4. Численные эксперименты и выводы

В данном пункте мы представим и сравним численные результаты для МРКВП (47), предложенного в данной статье, с МРКДП (29) из [12] и ЛММВП [6]. Для иллюстрации используем неявный МРКВП из (47), МРКДП из (29) и ЛММВП:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h\left(\frac{29}{48}f_{n+2} + \frac{5}{12}f_{n+1} - \frac{1}{48}f_n\right) - h^2\frac{1}{8}f'_{n+2}, \quad p = 4, \tag{55}$$

который рассматривался в [6] для решения следующих НЗ.

Задача 1.

$$\begin{cases} y_1' = -0.04y_1 + 10^4 y_2 y_3, & y_1(0) = 1, \\ y_2' = 0.04y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3\times 10^7 y_2^2, & y_2(0) = 0, \\ y_3' = 3\times 10^7 y_2^2, & y_3(0) = 0, \\ x \in [0, 15], \quad h = 0.0001. \end{cases} \tag{56}$$

Задача 2.

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2, & y_1(0) = 2, \\ y_2'(x) = ((1 - y_1(x)^2)y_2(x) - y_1(x))/\varepsilon, & y_2(0) = 0, \\ \varepsilon = 10^{-\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3, \quad x \in [0, 5], \quad h = 0.0001. \end{cases} \tag{57}$$

Реализация этих методов проводилась с использованием подхода фиксированного размера шага. Поскольку (4) — неявный метод, вычислим стадии путем решения полученной системы нелинейных уравнений:

$$\phi_i = Y_i - y_n - h\sum_{j=1}^{s-1} a_{ij}F(Y_j) - ha_{ss}F(Y_s) - h^2\sum_{j=1}^{s-1}\widehat{a_{ij}}F'(Y_j) - h^2\widehat{a_{ss}}F'(Y_s), \quad i = 1(1)s. \tag{58}$$

Из (11), используя метод Ньютона–Рафсона, мы получим

$$Y_i^{[v+1]} = Y_i^{[v]} - e_i^{[v]}, \tag{59}$$

$$(I_s \otimes I_m - (hA \otimes J(Y_i^{[v]}) + h^2\widehat{A} \otimes (J'(Y_i^{[v]}))e_i^{[v]} = \phi_i, \tag{60}$$

где J и J' — матрицы Якоби:

$$J(Y_i^{[v]}) = F'(Y_i^{[v]}) = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}; \quad J'(Y_i^{[v]}) = F''(Y_i^{[v]}), \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots, N, \tag{61}$$

$$\phi_i^{[v]}=Y_i^{[v]}-y_n-h\sum_{j=1}^{s-1}a_{ij}F(Y_j)-ha_{ss}F(Y_s^{[v]})-h^2\sum_{j=1}^{s-1}\widehat{a_{ij}}F'(Y_j)-h^2\widehat{a_{ss}}F'(Y_s^{[v]}),\quad i=1(1)s. \tag{62}$$

В нашем случае из (35) $\widehat{a_{ss}}=0$. Для эффективной реализации нам необходимо выполнить следующие шаги для получения стадийных значений:

(i) задать предсказанное стадийное значение Y_i,

(ii) вычислить последовательность итераций $Y_i^{[v+1]}$, аппроксимирующих Y_i, с использованием формулы (59),

(iii) остановиться, когда сойдется итерация Ньютона. Вставить результат $Y_i^{[v+1]}$ в (4) для получения решения y_n при x_n.

Ошибка в таблицах (1) и (2) соответственно отражает различия между численным решением методом Гаусса, неявным двухстадийным МРК четвертого порядка, обсуждавшимся в [3, с. 219], и вычисленными решениями МРКВП (4), МРКДП (29) и ЛММВП [6] соответственно. Ниже представлены численные результаты для задачи 1 и задачи 2 соответственно.

Таблица 1. Ошибка МРКВП (4) по сравнению с МРКДП (29) и ЛММВП [6] для задачи 1

x	МРКВП (4) Ошибка	МРКДП (29) Ошибка	ЛММВП [6] Ошибка
1.0	$1.626215110003826e-007$	$1.3590202851276e-002$	$2.485445892081306e-002$
5.0	$2.436397169985893e-007$	$3.1510742603058e-002$	$5.015324203239041e-002$
10.0	$2.136475410197125e-007$	$4.0305728166995e-002$	$5.895230005429641e-002$
15.0	$1.857441769836932e-007$	$4.6064015503024e-002$	$6.352435581929522e-002$

Таблица 2. Ошибка МРКВП (4) по сравнению с МРКДП (29) и ЛММВП [6] для задачи 2

ε	МРКВП (4) Ошибка	МРКДП (29) Ошибка	ЛММВП [6] Ошибка
10^{-1}	$2.424761301502e-003$	$1.219999656854043e-010$	$1.284591246273643e+000$
10^{-2}	$1.2930970667575e-002$	$2.947218025184384e-009$	$3.439091950964245e+000$
10^{-3}	$1.68698964234851e-001$	$3.455559443898970e-005$	$2.776183862257391e-001$

Численные результаты, представленные в табл. 1, показывают, что новый МРКВП из (49) превосходит МРКДП в (29) и двухстадийный ЛММВП четвертого порядка, представленный в [6] для задачи 1. Однако результаты табл. 2 показывают, что МРКДП из (29) лучше, чем МРКВП (4), а ЛММВП [6] и МРКВП лучше, чем ЛММВП [6]. Таким образом, представляется, что МРКДП и МРКВП подходят для сингулярно возмущенных задач.

Благодарности. Авторы поблагодарят профессора Дж.С. Бутчера за полезные замечания, сделанные им во время подготовки данной статьи.

Литература

1. **Butcher J.C.** A multistep generalization of Runge Kutta methods with four or five stages // J. ACM. — 1967. — Vol. 14, № 1. — P. 84–99.
2. **Butcher J.C.** The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations: Runge Kutta and General Linear Methods. — Chichester: Wiley, 1987.

3. **Butcher J.C.** Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Second Edition. — Chichester: Wiley, 2008.
4. **Butcher J.C.** Trees and numerical methods for ordinary differential equations // Numerical Algorithms. — 2010. — Vol. 53. — P. 153–170.
5. **Dahlquist G.** A special stability problem for linear multistep methods // BIT. — 1963. — Vol. 3. — P. 27–43.
6. **Enright W.H.** Second derivative multistep methods for stiff ODEs // SIAM. J. Numer. Anal. — 1974. — Vol. 11, iss. 2. — P. 321–331.
7. **Fatunla S.O.** Numerical Methods for Initial Value Problems in ODEs. — New York: Academic Press, 1988.
8. **Hairer E., Wanner G.** Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. — Berlin: Springer-Verlag, 1996.
9. **Kastlunger K.H., Wanner G.** Runge Kutta processes with multiple nodes // Computing (Arch. Elektron. Rechnen). — 1972. — P. 9–24.
10. **Kastlunger K.H., Wanner G.** On Turan type implicit Runge Kutta methods // Computing (Arch. Elektron. Rechnen). — 1972. — P. 317–325.
11. **Chan R.P.K., Tsai A.Y.J.** On explicit two-derivative Runge Kutta methods // Numerical Algorithms. — 2010. — Vol. 53, № 2–3. — P. 171–194.
12. **Tsai A.Y.J.** Two-derivative Runge Kutta methods for differential equations // Ph.D. Thesis. — New Zealand, Auckland: University of Auckland, 2011.
13. **Ikhile M.N.O., Okuonghae R.I.** Stiffly stable continuous extension of second derivative LMM with an off-step point for IVPsin ODEs // J. Nig. Assoc. Math. Physics. — 2007. — Vol. 11. — P. 175–190.
14. **Okuonghae R.I.** Stiffly Stable Second Derivative Continuous LMM for IVPs in ODEs // Ph.D. Thesis. — Nigeria, Benin City: Dept. of Math., University of Benin, 2008.
15. **Okuonghae R.I.** A class of continuous hybrid LMM for stiff IVPs in ODEs // Annals of the Alexandru Ioan Cuza University. Mathematics. — 2012. — Vol. LVIII, iss. 2. — P. 239–258.
16. **Okuonghae R.I, Ikhile M.N.O.** A continuous formulation of $A(\alpha)$-stable second derivative linear multistep methods for stiff IVPs and ODEs // J. of Algorithms and Comp. Technology. — 2011. — Vol. 6, № 1. — P. 79–101.
17. **Okuonghae R.I., Ogunleye S.O., and Ikhile M.N.O.** Some explicit general linear methods for IVPs in ODEs // J. of Algorithms and Comp. Technology. — 2013. — Vol. 7, № 1. — P. 41–63.
18. **Okuonghae R.I., Ikhile M.N.O.** $A(\alpha)$-stable linear multistep methods for stiff IVPs in ODEs // Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica. — 2011. — Vol. 50, № 1. — P. 75–92.
19. **Okuonghae R.I., Ikhile M.N.O.** The numerical solution of stiff IVPs in ODEs using modified second derivative BDF // Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica. — 2012. — Vol. 51, № 1. — P. 51–77.
20. **Okuonghae R.I., Ikhile M.N.O.** On the construction of high order $A(\alpha)$-stable hybrid linear multistep methods for stiff IVPs and ODEs // Numerical Analysis and Appl. — 2012. — Vol. 5, № 3. — P. 231–241.
21. **Okuonghae R.I., Ikhile M.N.O.** A class of hybrid linear multistep methods with $A(\alpha)$-stability properties for stiff IVPs in ODEs // J. of Numerical Mathematics. — 2013. — Vol. 21, № 2. — P. 157–172.
22. **Stoer J., Bulirsch R.** Introduction to Numerical Analysis (3rd ed.). — Berlin, New York: Springer-Verlag, 2002.

Поступила в редакцию 13 апреля 2013 г.