



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Рукавишников, О. П. Ткаченко, Приближенное решение нелинейной задачи о деформировании подземного трубопровода, *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2010, том 13, номер 4, 97–108

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.227.209.69

12 сентября 2024 г., 08:19:58



## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О ДЕФОРМИРОВАНИИ ПОДЗЕМНОГО ТРУБОПРОВОДА<sup>\*)</sup>

**В. А. Рукавишников, О. П. Ткаченко**

Построена геометрически нелинейная математическая модель трубопровода как оболочки в сильно вязкой среде. Найдена универсальная процедура редукции двумерных уравнений движения к одномерным для протяженных изогнутых труб. Построена разностная схема и создан комплекс программ для численного анализа уравнений модели. Проведены численные эксперименты для частного случая изогнутого трубопровода, найдены деформации стенки трубы и вычислено перемещение ее осевой линии.

**Ключевые слова:** криволинейный трубопровод, конечные деформации, разностная схема, численный эксперимент.

Проблемы механики подземных и подводных трубопроводов актуальны в силу своего практического значения. Они исследованы не полностью, и эта область является почти неисчерпаемым источником новых задач. Обзор работ по этой проблематике является темой отдельной статьи, здесь лишь кратко отмечены некоторые ссылки. В классических работах [1, 2] заложены основы исследования нестационарного течения жидкости в трубопроводах. В монографии [3] исследовалось деформирование оболочек в потоке жидкости и газа. Статьи [4, 5] и многие подобные работы посвящены изучению потока жидкости в трубке, моделирующей кровеносный сосуд. Работа [6] отличается тем, что в ней рассматривается совместное движение потока жидкости и трубы (в стержневом приближении) в приложении к трубопроводным системам. Тематика, развитая в [7], представляет большой комплекс задач морских технологий.

В настоящей статье исследуется внешняя задача о движении стенок трубопровода, проложенного неидеально, с начальным изгибом профиля. Двумерная математическая модель движения трубопровода как оболочки при конечных деформациях построена в [8]. Здесь эта модель уточнена и записана в виде, позволившем провести ее асимптотический анализ. Найдена универсальная процедура редукции двумерных уравнений движения трубопровода как оболочки к одномерной системе уравнений. Построена разностная схема и создан алгоритм для нахождения численного решения полученных уравнений движения. Для длинного изогнутого трубопровода, погруженного в сильно вязкую среду, проведена серия численных экспериментов по построенной математической модели. Установлено, что деформации в рассматриваемом примере не могут считаться малыми, а форма поперечного сечения трубы искажается в процессе ее деформирования, и сечение становится неплоским.

**1. Физическая постановка задачи и геометрия системы.** Пусть трубопровод проложен в сильно вязкой среде и имеет форму слабо изогнутой плоской кривой  $\Gamma = \{x_0, y_0 : x_0 = x_0(s), y_0 = y_0(s)\}$ , где  $s$  — естественный параметр

---

<sup>\*)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00060) и Интеграционного проекта Президиума ДВО РАН 09-П-СО-01-001.

(длина дуги). Он заполняется стационарным потоком жидкости, который движется под действием постоянного перепада давления. После этого трубопровод начинает двигаться, так как теряет равновесие.

Ставится задача о вычислении положения осевой линии  $\Gamma = \{x(s, t), y(s, t)\}$  и деформаций стенок трубопровода. Также необходимо сформулировать и рассчитать критерий прочности стенки трубы. При этом на больших интервалах времени внешняя среда полагается сильно вязкой жидкостью, начальный радиус кривизны осевой линии считается большим по сравнению с радиусом трубы.

Введем глобальную декартову систему отсчета  $\{Oxyz\}$  и криволинейную лагранжеву систему координат  $\{Os\theta R\}$  (рис. 1).

В [9] найдены компоненты метрического тензора для координат  $\{Os\theta R\}$  и выражения декартовых координат точки. Кинематика движения трубы и связь перемещений стенки с текущим положением осевой линии  $\Gamma$  описаны в [8]. Здесь заметим, что координаты  $\{Os\theta R\}$  являются ортогональными. Необходимые формулы приводятся ниже по мере надобности.

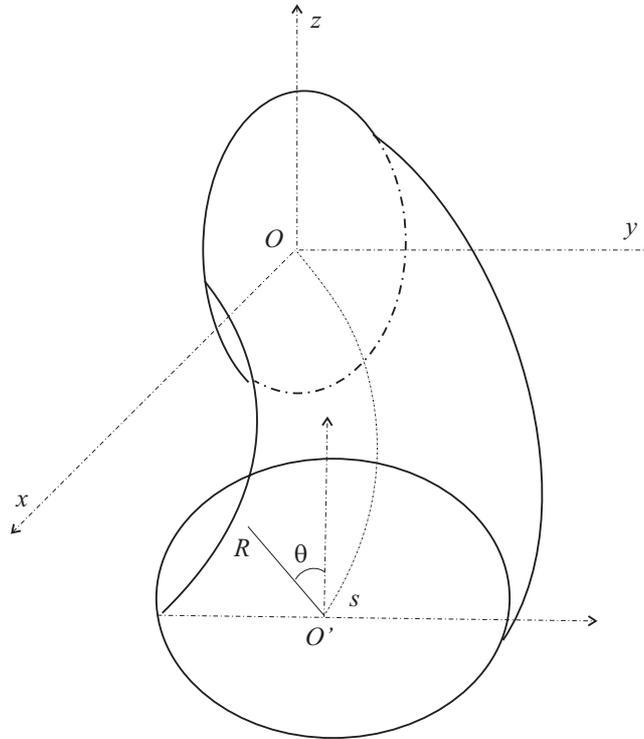


Рис. 1. Системы координат

**2. Двумерная математическая модель.** Пусть  $w_s, w_\theta, w_R$  — компоненты вектора перемещения стенки трубы как трехмерного упругого тела. Если пренебречь возможностью образования вмятин в стенке трубы, то в данной задаче можно считать конечными только деформации, отражающие связь прогиба осевой линии и ее растяжения. Тогда компоненты тензора деформаций имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss} &= \frac{1}{\sqrt{g_{ss}}} \left[ \frac{\partial w_s}{\partial s} + w_\theta \varkappa \cos \theta + w_R \varkappa \sin \theta - \frac{1}{2\sqrt{g_{ss}}} \left[ \left( \frac{\partial w_\theta}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_R}{\partial s} \right)^2 \right] \right]; \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{\partial w_\theta}{R\partial\theta} + \frac{w_R}{R}; \quad \varepsilon_{RR} = \frac{\partial w_R}{\partial R}; \quad \varepsilon_{s\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{ss}}} \frac{\partial w_\theta}{\partial s} + \frac{\partial w_s}{R\partial\theta} - \frac{w_s}{\sqrt{g_{ss}}} \varkappa \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $g_{ss}$  — первая компонента метрического тензора.

Пусть  $u, v, w$  — компоненты вектора перемещения срединной поверхности стенки трубопровода в актуальной конфигурации (по терминологии [10]). Для перехода к оболочке воспользуемся соотношениями [11]

$$w_s = u(1 + k_1\gamma) - \frac{\gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial s}, \quad w_\theta = v(1 + k_2\gamma) - \frac{\gamma}{B} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad w_R = w.$$

В принятых здесь криволинейных координатах геометрические параметры равны

$$\gamma = R - R_0, \quad k_1 = \frac{\varkappa \sin \theta}{1 + \varkappa R_0 \sin \theta}, \quad k_2 = \frac{1}{R_0}, \quad A = 1 + \varkappa R_0 \sin \theta, \quad B = R_0, \quad (2)$$

где  $R_0$  — радиус трубы;  $\varkappa = \varkappa(s, t)$  — текущая кривизна осевой линии  $\Gamma$ ;  $\varkappa_0 = \varkappa_0(s)$  — ее начальная кривизна.

Следуя методике, изложенной в [11], в работе [8] был проведен переход от уравнений движения трубопровода как трехмерного упругого тела к уравнениям для оболочки. После перехода к перемещениям срединной поверхности стенки получена система уравнений

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial \zeta^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 u'}{\partial \theta^2} - \frac{\rho_t R_0^2 \omega^2}{E^*} \frac{\partial^2 u'}{\partial \tau^2} + \frac{1 + \nu}{2} \alpha \frac{\partial^2 v'}{\partial \zeta \partial \theta} + \nu \alpha \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \\ & + \varepsilon f \sin \theta \left( \frac{1 - \nu}{2} u' - 2\alpha^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial \zeta^2} + \alpha(1 - \nu) \frac{\partial w'}{\partial \zeta} - \frac{1 + \nu}{2} \alpha \frac{\partial^2 v'}{\partial \zeta \partial \theta} \right) \\ & + \varepsilon f \cos \theta \left( \frac{3 - \nu}{2} \alpha \frac{\partial v'}{\partial \zeta} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) - \alpha^3 (1 - 3\varepsilon f \sin \theta) \left[ \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 w'}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial v'}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 v'}{\partial \zeta^2} \right] \\ & = -\frac{1}{E^* h^*} \Phi_t(v_{s0}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \nu}{2} \alpha^2 \frac{\partial^2 v'}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial \theta^2} - \frac{\rho_t R_0^2 \omega^2}{E^*} \frac{\partial^2 v'}{\partial \tau^2} - \frac{1}{E^* h^*} \frac{2u^* \mu \cos \theta}{R_0 \left( 0, 5 - \ln \left| \frac{\gamma \rho_{gr} u^*}{4\mu} R_0 \right| \right)} \\ & + \frac{1 + \nu}{2} \alpha \frac{\partial^2 u'}{\partial \zeta \partial \theta} + \frac{\partial w'}{\partial \theta} + \varepsilon f \sin \theta \left( \nu \frac{\partial w'}{\partial \theta} - \nu v' - (1 - \nu) \alpha^2 \frac{\partial^2 v'}{\partial \zeta^2} - \frac{1 + \nu}{2} \alpha \frac{\partial^2 u'}{\partial \zeta \partial \theta} \right) \\ & + \varepsilon f \cos \theta \left( w' + \frac{\partial v'}{\partial \theta} - \frac{3 - \nu}{2} \alpha \frac{\partial u'}{\partial \zeta} \right) - \alpha^2 (1 - 2\varepsilon f \sin \theta) \left( \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 w'}{\partial \zeta \partial \theta} + \frac{\partial v'}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 v'}{\partial \zeta \partial \theta} \right) \\ & + \alpha^2 \varepsilon f \cos \theta \left[ \left( \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial \zeta} \right)^2 \right] = 0; \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_t R_0^2 \omega^2}{E^*} \frac{\partial^2 w'}{\partial \tau^2} + w' + \frac{h^{*2}}{12} \left( \alpha^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial \theta^2} + \alpha^4 \frac{\partial^4 w'}{\partial \zeta^4} + 2\alpha^2 \frac{\partial^4 w'}{\partial \zeta^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w'}{\partial \theta^4} \right) \\ & + \nu \alpha \frac{\partial u'}{\partial \zeta} + \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \varepsilon f \sin \theta \left( 2\nu w' + (1 - \nu) \alpha \frac{\partial u'}{\partial \zeta} + \nu \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right) \\ & + \varepsilon \nu f \cos \theta v' - \frac{\alpha^2}{2} (1 - \varepsilon f \sin \theta) \left[ \left( \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial \zeta} \right)^2 \right] = \frac{1}{E^* h^*} (p - p_e). \end{aligned}$$

Здесь  $\zeta = s/l$ ,  $\tau = \omega t$ ,  $u' = u/R_0$ ,  $v' = v/R_0$ ,  $w' = w/R_0$  — безразмерные длина дуги, время и искомые функции;  $l, \omega$  — характерные масштабы координаты

и времени;  $\varkappa(\zeta, \tau)$  — текущая кривизна осевой линии;  $p$  — внутреннее давление;  $p_e$  — давление внешней среды;  $\Phi_t$  — сила внутреннего трения потока о стенку трубы;  $u^*$  — скорость поперечного движения трубы,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $h$  — толщина стенки. Кроме того, введены малые параметры и соотношения:

$$\varepsilon = R_0 \max |\varkappa_0(\zeta)| \ll 1; \quad \alpha = R_0/l \ll 1;$$

$$f(\zeta, \tau) = \frac{\varkappa(\zeta, \tau)}{\max |\varkappa_0(\zeta)|}; \quad h^* = h/R_0; \quad E^* = \frac{E}{1 - \nu^2}.$$

Текущие координаты осевой линии  $\Gamma$ , ее кривизна  $\varkappa(s, t)$  и скорость поперечного смещения  $u^*$  связаны с искомыми функциями перемещений формулами

$$x(\zeta, \tau) = x_0(\zeta) + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dx_0}{d\zeta} \int_0^{2\pi} u' d\theta + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dy_0}{d\zeta} \int_0^{2\pi} (v' \cos \theta + w' \sin \theta) d\theta;$$

$$y(\zeta, \tau) = y_0(\zeta) + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dy_0}{d\zeta} \int_0^{2\pi} u' d\theta - \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dx_0}{d\zeta} \int_0^{2\pi} (v' \cos \theta + w' \sin \theta) d\theta;$$

$$z(\zeta, \tau) = \frac{R_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} (w' \cos \theta - v' \sin \theta) d\theta; \quad \varkappa(\zeta, \tau) = \frac{1}{\ell} \frac{d^2 y}{d\zeta^2} \left( \frac{dx}{d\zeta} \right)^{-1};$$

$$u^* = \frac{R_0 \omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial v'}{\partial \tau} \cos \theta + \frac{\partial w'}{\partial \tau} \sin \theta \right) d\theta.$$

В [8] установлено, что (4) можно использовать при смещениях осевой линии на расстояния, намного меньшие ее минимального начального радиуса кривизны  $\min |\rho_0(s)|$ .

Уравнения (3) необходимо дополнить формулами [9]

$$p_e = \rho_{gr} g h_0 \left( 1 - \frac{R_0}{h_0} \cos \theta \right) + \frac{2\mu u^* \sin \theta}{R_0 \left( 0,5 - \ln \left| \frac{\gamma \rho_{gr} u^*}{4\mu} R_0 \right| \right)},$$

$$p = p_a + l\beta v_{s0}^2 (\mathcal{L} - \zeta) + \varepsilon f \rho_f v_{s0}^2 \sin \theta,$$

$$\Phi_t(v_{s0}) = \frac{\alpha}{2} l\beta v_{s0}^2.$$

Здесь  $v_{s0}$ ,  $\rho_f$  — скорость и плотность внутреннего потока жидкости;  $p_a$  — атмосферное давление;  $\mu$ ,  $\rho_{gr}$  — вязкость и плотность внешней среды;  $\gamma$  — число Маскерони;  $h_0$  — глубина закладки трубопровода;  $\beta$  — коэффициент внутреннего трения в трубе [12];  $\mathcal{L}$  — длина трубопровода в единицах  $l$ .

Модель (3)–(5) дополним однородными начальными и краевыми условиями:

$$u' = v' = w' = 0, \quad \frac{\partial w'}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0, \zeta = \mathcal{L} \quad \text{и} \quad \text{любом} \quad \tau;$$

$$u' = v' = w' = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial \tau} = \frac{\partial v'}{\partial \tau} = \frac{\partial w'}{\partial \tau} = u^* = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0 \quad \text{и} \quad \text{любом} \quad \zeta.$$

**3. Редукция математической модели к одномерному виду.** Здесь найдено асимптотическое представление решения системы уравнений (3), позволяющее исключить угловую координату  $\theta$  без дополнительного предположения о малости деформаций.

Разложим искомые функции в ряды по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} u' &= u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2); & v' &= v_0 + \varepsilon v_1 + O(\varepsilon^2); \\ w' &= w_0 + \varepsilon w_1 + O(\varepsilon^2); & u^* &= \varepsilon u_1^* + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

и воспользуемся обычной техникой асимптотического анализа, составляя уравнения для всех порядков по  $\varepsilon$ . Для того чтобы считать  $v_0, w_0$  не зависящими от  $\theta$ , необходимо положить  $R_0/h_0 \ll 1$ , тогда  $v_0 = 0, u_0 = u_0(\zeta), w_0 = w_0(\zeta)$ . Это означает, что высокочастотными колебательными процессами пренебрегаем.

Уравнения нулевого приближения по  $\varepsilon$  принимают вид

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2} + \nu \alpha \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} - \alpha^3 \left( \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \zeta^2} \right) &= -\frac{1}{E^* h^*} \frac{\alpha}{2} l \beta v_{s0}^2, \\ w_0 + \frac{h^{*2}}{12} \left( \alpha^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \zeta^2} + \alpha^4 \frac{\partial^4 w_0}{\partial \zeta^4} \right) + \nu \alpha \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} - \frac{\alpha^2}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \right)^2 &= \frac{1}{E^* h^*} [p_a + l \beta v_{s0}^2 (\mathcal{L} - \zeta) - \rho_{gr} g h_0]. \end{aligned} \quad (7)$$

Выражение для скорости поперечного перемещения осевой линии получим из (4), учитывая, что  $v_0, w_0$  не зависят от  $\theta$ :

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{\varepsilon R_0 \omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \tau} \cos \theta + \frac{\partial w_1}{\partial \tau} \sin \theta \right) d\theta, \\ u_1^* &= \frac{R_0 \omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \tau} \cos \theta + \frac{\partial w_1}{\partial \tau} \sin \theta \right) d\theta. \end{aligned} \quad (8)$$

Приравнявая сомножители при первых степенях  $\varepsilon$ , получим уравнения первого приближения относительно  $u_1, v_1, w_1$ . Прямой подстановкой проверяется, что им удовлетворяют функции

$$u_1 = u_1'(\zeta, \tau) \sin \theta; \quad v_1 = v_1'(\zeta, \tau) \cos \theta; \quad w_1 = w_1'(\zeta, \tau) \sin \theta. \quad (9)$$

Используя (9) и сокращая на соответствующую тригонометрическую функцию, получим систему уравнений без угловой координаты:

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{\partial^2 u_1'}{\partial \zeta^2} - \frac{1-\nu}{2} u_1' - \frac{1+\nu}{2} \alpha \frac{\partial v_1'}{\partial \zeta} + \nu \alpha \frac{\partial w_1'}{\partial \zeta} + f \left[ \frac{1-\nu}{2} u_0 - 2\alpha^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2} + \alpha(1-\nu) \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \right] \\ - \alpha^3 \left( \frac{\partial w_1'}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 w_1'}{\partial \zeta^2} \right) + 3\alpha^3 f \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \zeta^2} = \frac{\rho_t R_0^2 \omega^2}{E^*} \frac{\partial^2 u_1'}{\partial \tau^2}; \\ \frac{1-\nu}{2} \alpha^2 \frac{\partial^2 v_1'}{\partial \zeta^2} - v_1' - \frac{1}{E^* h^*} \frac{2u_1^* \mu}{R_0 \left( 0, 5 - \ln \left| \frac{\gamma \rho_{gr} \varepsilon u_1^*}{4\mu} R_0 \right| \right)} + \frac{1+\nu}{2} \alpha \frac{\partial u_1'}{\partial \zeta} \\ + w_1' + f \left( w_0 - \frac{3-\nu}{2} \alpha \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} \right) - \alpha^2 \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \frac{\partial w_1'}{\partial \zeta} = \frac{\rho_t R_0^2 \omega^2}{E^*} \frac{\partial^2 v_1'}{\partial \tau^2}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
w'_1 + \frac{h^{*2}}{12} \left( \alpha^4 \frac{\partial^4 w'_1}{\partial \zeta^4} - \alpha^2 \frac{\partial^2 w'_1}{\partial \zeta^2} \right) + \nu \alpha \frac{\partial u'_1}{\partial \zeta} \\
- v'_1 + f \left[ 2\nu w_0 + (1 - \nu) \alpha \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} \right] - \alpha^2 \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \frac{\partial w'_1}{\partial \zeta} + \frac{\alpha^2}{2} f \left( \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \right)^2 \\
= \frac{1}{E^* h^*} \left[ \rho_f v_{s0}^2 f - \frac{2u_1^* \mu}{R_0 \left( 0,5 - \ln \left| \frac{\gamma \rho_{gr} \varepsilon u_1^*}{4\mu} R_0 \right| \right)} \right] - \frac{\rho_t R_0^2 \omega^2}{E^*} \frac{\partial^2 w'_1}{\partial \tau^2}.
\end{aligned}$$

Текущие координаты осевой линии  $x, y$  из (4) и скорость сдвига (8) выражаются через функции (9):

$$\begin{aligned}
x(\zeta, \tau) &= x_0(\zeta) + \alpha \frac{dx_0}{d\zeta} u_0 + \frac{\varepsilon \alpha}{2} \frac{dy_0}{d\zeta} (v'_1 + w'_1); \\
y(\zeta, \tau) &= y_0(\zeta) + \alpha \frac{dy_0}{d\zeta} u_0 - \frac{\varepsilon \alpha}{2} \frac{dx_0}{d\zeta} (v'_1 + w'_1); \\
\kappa(\zeta, \tau) &= \frac{1}{\ell} \frac{d^2 y}{d\zeta^2} \left( \frac{dx}{d\zeta} \right)^{-1}; \quad u_1^* = \frac{R_0 \omega}{2} \left( \frac{\partial v'_1}{\partial \tau} + \frac{\partial w'_1}{\partial \tau} \right).
\end{aligned} \tag{11}$$

Однородные начальные и краевые условия (6) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
u_0 = w_0 = v'_1 = w'_1 = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} = \frac{\partial w'_1}{\partial \zeta} = 0 \text{ при } \zeta = 0, \zeta = \mathcal{L} \text{ и любом } \tau; \\
u'_1 = v'_1 = w'_1 = 0, \quad \frac{\partial u'_1}{\partial \tau} = \frac{\partial v'_1}{\partial \tau} = \frac{\partial w'_1}{\partial \tau} = u_1^* = 0 \text{ при } \tau = 0 \text{ и любом } \zeta.
\end{aligned} \tag{12}$$

Уравнения (7), (10) с начально-краевыми условиями (12) и соотношениями (11) представляют собой приведенную к одномерному виду математическую модель движения трубопровода как оболочки при конечных деформациях.

В качестве конечного результата найдем перемещение осевой линии трубопровода вдоль нормали к ее начальному положению:  $w_n = (\mathbf{w}, \mathbf{n}_0)$ , где  $\mathbf{w}$  — вектор перемещения, а  $\mathbf{n}_0$  — нормаль, которые в системе отсчета  $\{Oxyz\}$  выразятся следующим образом:

$$\mathbf{w} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j}, \quad \mathbf{n}_0 = \frac{dy_0}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx_0}{ds}\mathbf{j}.$$

Отсюда, учитывая свойство естественной параметризации  $x_0'^2 + y_0'^2 = 1$  и считая положительным направление  $-\mathbf{n}$ , чтобы перемещение имело тот же знак, что и направление выпучивания кривой, запишем

$$w_{-n} = -\frac{\varepsilon R_0}{2} (v'_1 + w'_1).$$

**4. Деформации стенки трубы и критерий прочности.** При выводе уравнений равновесия оболочки в [11] деформации трехмерного упругого тела представлены в виде

$$\varepsilon_{ss} \approx \varepsilon_1 + \varkappa_1(R - R_0), \quad \varepsilon_{\theta\theta} \approx \varepsilon_2 + \varkappa_2(R - R_0), \quad \varepsilon_{s\theta} \approx \omega + \tau(R - R_0).$$

Здесь величины  $R - R_0$  имеют порядок толщины стенки  $h$ . Главные порядки деформаций следующие:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \theta} v + k_1 w - \frac{1}{2A^2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 \right]; \\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial s} u + \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \theta} + k_2 w; \quad \omega = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v}{B} \right).
\end{aligned} \tag{13}$$

Учитывая значения параметров поверхности оболочки (2), переходя к безразмерным переменным из (3) и раскладывая в ряд по  $\varepsilon$ , получим

$$\varepsilon_1 = \alpha \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} - \frac{\alpha^2}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \right)^2 + \varepsilon \sin \theta \left[ \alpha \frac{\partial u'_1}{\partial \zeta} - \alpha^2 \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \frac{\partial w'_1}{\partial \zeta} + f \left( w_0 + \alpha^2 \left( \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \right)^2 - \alpha \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} \right) \right]; \quad (14)$$

$$\varepsilon_2 = w_0 + \varepsilon \sin \theta (w'_1 - v'_1); \quad \omega = \varepsilon \cos \theta \left( u'_1 + \alpha \frac{\partial v'_1}{\partial \zeta} - f u_0 \right).$$

Полученные формулы нужны для оценки прочности стенки трубопровода. Известно, что при сложном напряженном состоянии вычисление даже всех компонент тензора напряжений не дает верной оценки прочности. Необходимо составлять билинейную форму этих компонентов, вид которой определяется выбором гипотезы прочности (см., например, [13]). Для пластинок и оболочек допустимо определять их несущую способность по компонентам тензора деформаций. Так, в [14] упоминается следующий критерий прочности пластин:

$$|\varepsilon_x + \varepsilon_y \pm \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}| \leq 2[\varepsilon], \quad (15)$$

обозначения обычные,  $[\varepsilon]$  — предельно допустимая деформация. По аналогии для трубы можно ввести критерий прочности, заменяя в (15)  $\varepsilon_x \rightarrow \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_y \rightarrow \varepsilon_2$ ,  $\gamma_{xy} \rightarrow \omega$ . Тогда получим

$$|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \pm \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + \omega^2}| \leq 2[\varepsilon]. \quad (16)$$

Это соотношение имеет смысл условия максимальных деформаций удлинения. Совместно с формулами (14) условие (16) может при принятых предположениях относительно поведения механической системы применяться для оценки прочности стенки трубопровода.

**5. Разностная схема и алгоритм для нахождения численного решения.** Одной из целей данной работы является нахождение численного решения уравнений (7), (10)–(12). Для этого был создан комплекс программ для ЭВМ, решающий систему уравнений модели численно-аналитическими методами.

Для решения системы уравнений нулевого приближения (7) был использован пакет Mathematica. Разработка программы решения методом последовательных приближений не представляет больших затруднений [15]. Вдали от концов трубы функции  $u_0(\zeta)$ ,  $w_0(\zeta)$  можно грубо приблизить по формулам

$$w_0 \approx \frac{1}{E^* h^*} [p_a + \ell \beta v_{s0}^2 (\mathcal{L} - \zeta) - \rho_{gr} g h_0], \quad u_0 \approx \frac{\ell \beta v_{s0}^2}{4 E^* h^* \alpha} \zeta (\mathcal{L} - \zeta),$$

что следует из краевой задачи (7), (12).

В качестве численного метода решения системы уравнений первого приближения (10) выбрана явная трехслойная разностная схема с уточнением значений, способ построения которой изложен в [16]. Суть уточнений в том, что  $v'_1$  и  $w'_1$  вычисляются по строго явной схеме,  $u'_1$  вычисляется по неявной схеме.

Разностная схема по пространственным переменным строится известным интегроинтерполяционным методом [17]. В результате этого построения для

средних точек интервала изменения переменной  $\zeta$  получаются следующие расчетные формулы:

$$v_i^{j+1} = 2v_i^j - v_i^{j-1} + \frac{E^* \alpha^2}{\rho_t R_0^2 \omega^2} \frac{h_\tau^2}{h_\zeta^2} \frac{1-\nu}{2} (v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j) - \frac{E^* h_\tau^2}{\rho_t R_0^2 \omega^2} v_i^j - \frac{2\mu h_\tau^2}{h^* R_0^3 \rho_t \omega^2} \frac{u_i^{*j}}{0,5 - \ln \left| \frac{\gamma \rho_{gr} \varepsilon u_i^{*j} R_0}{4\mu} \right|} + \frac{E^* h_\tau^2}{\rho_t R_0^2 \omega^2} \left\{ \frac{1+\nu}{4} \frac{\alpha}{h_\zeta} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) + w_i^j + f_i^j \left[ w_{0i} - \frac{3-\nu}{4} \frac{\alpha}{h_\zeta} (u_{0(i+1)} - u_{0(i-1)}) \right] - \frac{\alpha^2}{4h_\zeta^2} (w_{0(i+1)} - w_{0(i-1)}) (w_{i+1}^j - w_{i-1}^j) \right\};$$

$$w_i^{j+1} = 2w_i^j - w_i^{j-1} - \frac{E^* h_\tau^2}{\rho_t R_0^2 \omega^2} \left\{ w_i^j + \frac{h^{*2}}{12} \left[ \frac{\alpha^4}{h_\zeta^4} (w_{i+2}^j - 4w_{i+1}^j + 6w_i^j - 4w_{i-1}^j + w_{i-2}^j) - \frac{\alpha^2}{h_\zeta^2} (w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j) \right] + \frac{\nu \alpha}{2h_\zeta} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) - v_i^j \right. \\ \left. + f_i^j \left[ 2\nu w_{0i} + (1-\nu) \frac{\alpha}{2h_\zeta} (u_{0(i+1)} - u_{0(i-1)}) \right] - \frac{\alpha^2}{4h_\zeta^2} (w_{0(i+1)} - w_{0(i-1)}) (w_{i+1}^j - w_{i-1}^j) + f_i^j \frac{\alpha^2}{8h_\zeta^2} (w_{0(i+1)} - w_{0(i-1)})^2 - \frac{1}{E^* h^*} \left[ \rho_f v_{s0}^2 f_i^j - \frac{2\mu u_i^{*j}}{R_0 \left( 0,5 - \ln \left| \frac{\gamma \rho_{gr} \varepsilon u_i^{*j} R_0}{4\mu} \right| \right)} \right] \right\};$$

$$u_i^{*(j+1)} = \frac{R_0 \omega}{2h_\tau} (v_i^{j+1} - v_i^j + w_i^{j+1} - w_i^j), \quad i = 2, \dots, N-2.$$

После этих расчетов можно вычислить  $u_i^{j+1}$  по неявной разностной схеме:

$$u_i^{j+1} - \frac{E^* \alpha^2}{\rho_t R_0^2 \omega^2} \frac{h_\tau^2}{h_\zeta^2} (u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}) + \frac{1-\nu}{2} \frac{E^* h_\tau^2}{\rho_t R_0^2 \omega^2} u_i^{j+1} = 2u_i^j - u_i^{j-1} + \frac{E^* h_\tau^2}{\rho_t R_0^2 \omega^2} \left\{ -\frac{1+\nu}{4} \frac{\alpha}{h_\zeta} (v_{i+1}^{j+1} - v_{i-1}^{j+1}) + \frac{\nu \alpha}{2h_\zeta} (w_{i+1}^{j+1} - w_{i-1}^{j+1}) + f_i^j \left[ \frac{1-\nu}{2} u_{0i} - 2 \frac{\alpha^2}{h_\zeta^2} (u_{0(i+1)} - 2u_{0i} + u_{0(i-1)}) + (1-\nu) \frac{\alpha}{2h_\zeta} (w_{0(i+1)} - w_{0(i-1)}) \right] - \frac{\alpha^3}{2h_\zeta^3} \left[ (w_{0(i+1)} - 2w_{0i} + w_{0(i-1)}) (w_{i+1}^{j+1} - w_{i-1}^{j+1}) + (w_{0(i+1)} - w_{0(i-1)}) (w_{i+1}^{j+1} - 2w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}) \right] + \frac{3\alpha^3}{2h_\zeta^3} f_i^j (w_{0(i+1)} - w_{0(i-1)}) (w_{0(i+1)} - 2w_{0i} + w_{0(i-1)}) \right\}; \quad (18)$$

$$u_0^{j+1} = 0, \quad u_N^{j+1} = 0, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Здесь  $h_\tau$  — шаг по времени;  $h_\zeta$  — шаг по координате;  $\zeta_i = ih_\zeta$ ;  $f_i^j = f(\zeta_i, \tau_j)$ ;  $u_i^{*j} = u_1^*(\zeta_i, \tau_j)$ ;  $u_{0i} = u_0(\zeta_i)$ ;  $w_{0i} = w_0(\zeta_i)$ ;  $u_i^j = u_1^j(\zeta_i, \tau_j)$ ;  $v_i^j = v_1^j(\zeta_i, \tau_j)$ ;  $w_i^j = w_1^j(\zeta_i, \tau_j)$ . Расчетные формулы на краях интервала при  $i = 1, N-1$  немного отличаются от (17), но отличие незначительно, а метод учета краевых

условий хорошо изложен в [17], поэтому здесь они не приводятся. Система (18) решалась методом прогонки.

После завершения этих расчетов по формулам (11) определяются текущие координаты осевой линии  $x$ ,  $y$  и ее актуальная кривизна  $\varkappa$ , используемая на следующем шаге вычисления приближенного решения уравнений (10). Тем самым алгоритм замыкается.

Шаг по времени выбирается из условий устойчивости и точности. Сначала последовательным уменьшением шага  $h_\tau$  добиваемся устойчивого счета, затем сравниваем результаты расчетов при текущем и половинном значениях шагов по времени и координате. Эта процедура вынужденная, поскольку свойства полученной нелинейной начально-краевой задачи нами не исследовались.

При создании программы расчета за исходные данные принимались физические параметры материала трубы, внешней среды и внутренней жидкости, геометрические параметры осевой линии и стенок трубы, начальные и краевые условия движения. Программа написана на языке Фортран-77 и состоит из таких логических блоков, как:

- блок расчета параметров осевой линии методом кубических сплайнов по заданным точкам;
- блок ввода исходных данных и задания разбиения по координате  $\zeta$ ;
- блок расчета текущего шага по времени;
- вычисление и вывод в файл результатов счета на текущем шаге по времени.

**6. Результаты численного эксперимента.** В качестве физических и геометрических параметров модели выбраны следующие значения величин:  $p_a = 10^5$  Па,  $\rho_{gr} = 1700$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0,24$ ,  $E = 1,96 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho_t = 7200$  кг/м<sup>3</sup>,  $h_0 = 5$  м,  $h = 0,005$  м,  $R_0 = 0,3$  м,  $L = 12000$  м,  $\rho_f = 850$  кг/м<sup>3</sup>,  $\beta = 27,38$  кг/м<sup>4</sup>,  $\mu = 10000$  Па · с,  $v_{s0} = 1,5$  м/с. Эти параметры соответствуют потоку нефти в стальной трубе, погруженной в мягкую почву [18].

В качестве тестируемого профиля трубопровода была выбрана форма осевой линии, изображенная на рис. 2 и описываемая формулой

$$y = \frac{C(A - B(x - D))(x - D)}{(A + B(x - D))(x - D)} + C;$$

$x$  меняется от нуля до 12000 м, параметры имеют значения:  $A = 4000,0$ ,  $D = 6000,0$ ,  $C = 50,0$ ,  $B = 0,2$ . Минимальный радиус кривизны этого профиля  $\min |\rho_0(s)|$  равен 154,8 м, т. е. согласно примечанию к формулам (4) результатам расчета можно доверять при отклонении осевой линии в пределах 10 м.

В качестве конечных результатов выводились численные значения перемещений осевой линии  $w_{-n}$  как функции  $\zeta$ ,  $\tau$  и значения сдвиговой деформации  $\omega$  из (14) как функции  $\zeta$ ,  $\theta$  в конечный момент времени.

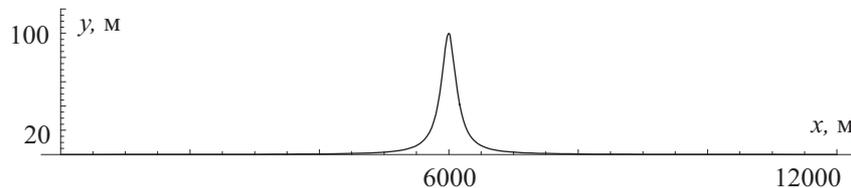


Рис. 2. Форма осевой линии в начальной конфигурации

График зависимости  $w_{-n}(s, t)$  изображен на рис. 3; рассчитанный интервал времени 7 час. Устойчивый счет достигнут при шаге по времени 0,000075 с.

График зависимости  $\omega = \omega(s, \theta)$  изображен на рис. 4. На нем видно, что наибольшие искажения углов при выбранной форме осевой линии возникают

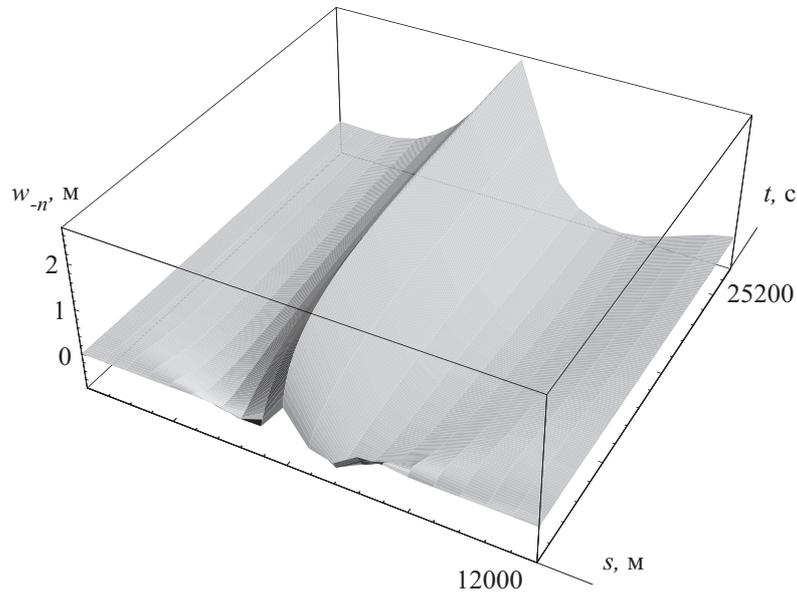
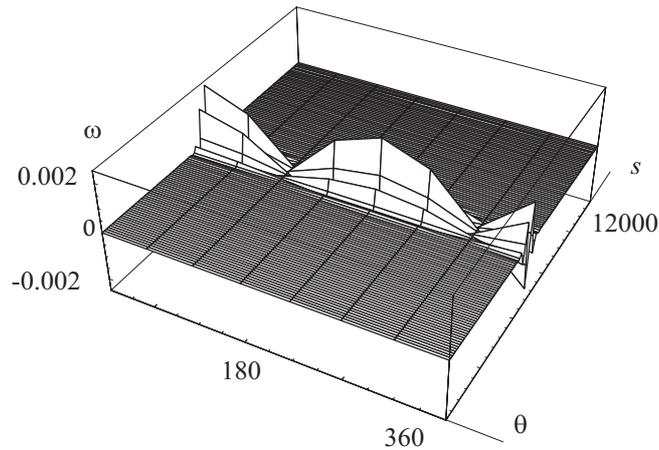


Рис. 3. Поперечное перемещение осевой линии

Рис. 4. Деформация сдвига как функция  $\theta, s$ 

в окрестности точки с максимальной кривизной оси Г. На рис. 5 изображен тот же график в виде изолиний  $\omega = \text{const}$ .

Вид графика сдвиговых деформаций говорит о том, что гипотеза плоских сечений стержневой модели для исследования конечного деформирования трубопровода не пригодна. Значит, если описывать трубопровод сложного профиля как стержень, то необходимо учитывать деформацию сечения, как это делается в теории тонких стержней [19].

Были найдены значения левой части неравенства (16), величина деформационного критерия прочности стенки трубы:  $Kr = |\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + \omega^2}|$ .

Грубая оценка предела допустимой деформации (16) для стали есть в [20], где указан порядок  $[\varepsilon] \approx 0,002$  как условие малости деформаций.

На рис. 6 изображен график  $Kr(s, \theta)$  в конечный момент времени расчета. На этом графике видно, что по порядку величины принятый критерий указы-

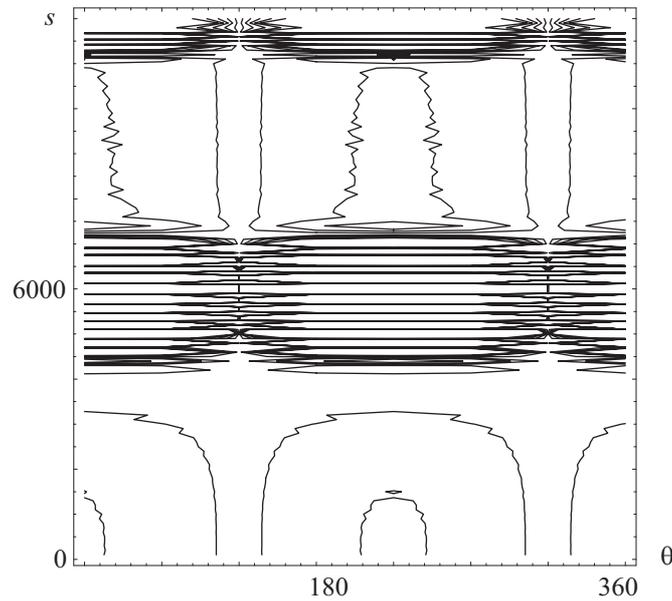
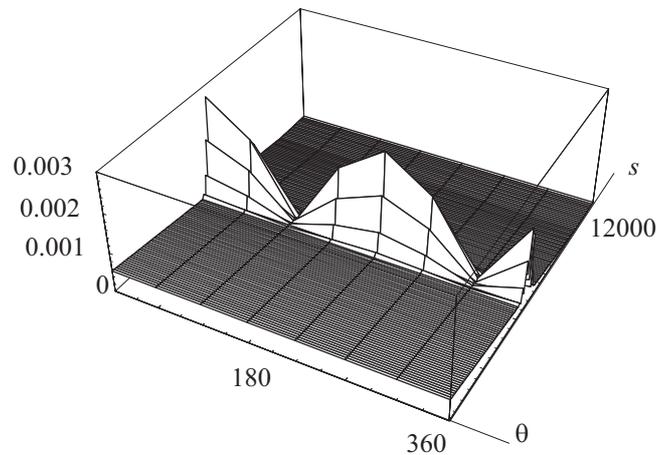


Рис. 5. Изолинии деформации сдвига

Рис. 6. Функция деформаций  $Kr(s, \theta)$  на конечный момент расчета

ваит на то, что в модельной задаче деформации не могут считаться малыми, как это и было положено при построении математической модели.

**Заключение.** 1. Найдена универсальная для внешней задачи механики трубопровода процедура редукции системы уравнений движения оболочки к одномерной системе дифференциальных уравнений.

2. Построена разностная схема и создан алгоритм нахождения численного решения изучаемой здесь частной задачи.

3. Численным анализом установлено, что в рассматриваемом примере деформации не могут считаться малыми; искажение поперечного сечения трубы вынуждает учитывать его депланацию при построении стержневой модели трубопровода.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
2. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975.
3. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979.
4. Berger S. A., Talbot L., Yao L. S. Flow in curved pipes // Ann. Rev. Fluid Mech. 1983. V. 15. P. 461–512.
5. Ключков Б. Н., Кузнецова Е. А. Нелинейные режимы изменения формы упругой трубки с потоком жидкости в ней // Механика жидкости и газа. 2000. № 4. С. 46–55.
6. Lee U., Pak C. H., Hong S. C. The dynamics of a piping system with internal unsteady flow // J. Sound and Vibr. 1995. V. 180, № 2. P. 297–311.
7. Athisakul C., Monprapussorn T., Pulngern T., Chucheeepsakul S. The effect of axial extensibility on three-dimensional behavior of tensioned pipes/risers transporting fluid // Proc. 8 ISOPE Pacific/Asia Offshore Mechanics Symposium. Bangkok, November 10–14, 2008. P. 97–104.
8. Ткаченко О. П. Кинематика и динамика подземного трубопровода при конечных перемещениях // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, № 4. С. 97–107.
9. Рукавишников В. А., Ткаченко О. П. Численное и асимптотическое решение уравнений распространения гидроупругих колебаний в изогнутом трубопроводе // Прикл. механика и техн. физика. 2000. Т. 41, № 6. С. 161–169.
10. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. СПб.: Лань, 2004.
11. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике // Власов В. З. Избранные труды. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 15–439.
12. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
13. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986.
14. Ржаницын А. Р. Строительная механика. М.: Высш. шк., 1991.
15. Дьяконов В. П. Mathematica 4: Учебный курс. СПб.: Питер, 2001.
16. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
17. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989.
18. Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Наук. думка, 1988.
19. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматлит, 1959.
20. Погорелов А. В. Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. М.: Наука, 1967.

Рукавишников Виктор Анатольевич  
Ткаченко Олег Павлович  
Вычислительный центр ДВО РАН  
ул. Ким Ю Чена, 65  
680000 г. Хабаровск,  
E-mail: vark@mail.redcom.ru;  
tkachenko\_oleg@rambler.ru

Статья поступила 25 февраля 2010 г.