

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Артемов, А. В. Скобанева, Об оптимальном управлении в модели жестко-вязко-пластической среды с граничными условиями Дирихле, *Сиб. электрон. матем. изв.*, 2017, том 14, 1463–1471

DOI: 10.17377/semi.2017.14.126

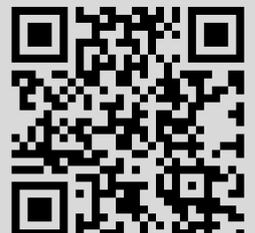
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.17.183.56

29 сентября 2024 г., 21:09:58



СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 14, стр. 1463–1471 (2017)

DOI 10.17377/semi.2017.14.126

УДК 517.958

MSC 49J20, 76A05

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ В МОДЕЛИ
ЖЕСТКО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ
С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ

М.А. АРТЕМОВ, А.В. СКОБАНЕВА

ABSTRACT. In this paper, we consider the optimal control problem in a 3D flow model for incompressible rigid-viscoplastic media of the Bingham kind with homogeneous Dirichlet boundary conditions and a given cost functional. On the basis of methods of the theory of variational inequalities with pseudomonotone operators, a theorem on the solvability of the optimization problem in the class of weak steady solutions is proved.

Keywords: viscoplastic Bingham-type fluid, 3D flows, optimal control problem, variational inequalities.

1. ВВЕДЕНИЕ

Жестко-вязко-пластические среды типа Бингама [1, 2] характеризуются тем, что в них при малых напряжениях тензор скоростей деформаций равен $\mathbf{0}$ и в соответствующих областях среда движется как твердое тело до тех пор, пока некоторая функция напряжений не достигнет своего предела текучести; выше этого предела среда ведет себя уже как несжимаемая вязкая жидкость.

Модели бингамовских жидкостей достаточно универсальны и уже долгое время успешно применяются при описании потоков большого числа реальных вязкопластических сред, в том числе таких материалов, как цементы, бетон, суспензии, пасты, краски, гели, некоторые виды нефтей и масел.

Математическое изучение уравнений динамики сред Бингама началось в работах французских ученых Г. Дюво и Ж.-Л. Лионса. Полученные ими результаты подробно изложены в классической монографии [2].

ARTEMOV, M.A., SKOBANEVA, A.V., ON OPTIMAL CONTROL IN A MODEL OF RIGID-VISCOPLASTIC MEDIA WITH DIRICHLET BOUNDARY CONDITIONS.

© 2017 АРТЕМОВ М.А., СКОБАНЕВА А.В.

Поступила 22 августа 2017 г., опубликована 15 декабря 2017 г.

В настоящий момент исследования по данному направлению активно продолжаются; интерес к таким задачам стимулируется разнообразными приложениями как в математической гидродинамике, так и в ряде технологических процессов. Из последних опубликованных работ, связанных с вышеупомянутой моделью и ее обобщениями, можно отметить [3, 4, 5, 6, 7].

В предлагаемой статье ставится задача об оптимальном управлении трехмерным стационарным течением жестко-вязко-пластической среды типа Бингама в ограниченной области \mathbb{R}^3 при условии прилипания на границе области. Используя методы теории вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами, мы доказываем теорему о разрешимости задачи оптимизации в классе «слабых» решений.

Данная работа развивает результаты, полученные в [8] для случая нелинейно-вязких жидкостей. Отметим также статьи [9, 10, 11, 12], в которых рассматриваются близкие по постановке задачи оптимизации для моделей неньютоновских сред.

2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Предположим, что Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^3 с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Будем рассматривать задачу оптимизации стационарных трехмерных потоков несжимаемой жестко-вязко-пластической среды типа Бингама в области Ω :

$$(1) \quad \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma})_j + \frac{\partial p}{\partial x_j} = f_j + u_j, \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

$$(2) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0,$$

$$(3) \quad \sigma_{ij} = \mu(|\boldsymbol{\mathcal{E}}|) \mathcal{E}_{ij} + g \frac{\mathcal{E}_{ij}}{|\boldsymbol{\mathcal{E}}|}, \quad \text{если } |\boldsymbol{\mathcal{E}}| \neq 0, \quad i, j \in \{1, 2, 3\},$$

$$(4) \quad |\boldsymbol{\sigma}| \leq g, \quad \text{если } |\boldsymbol{\mathcal{E}}| = 0,$$

$$(5) \quad \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0},$$

$$(6) \quad \mathbf{u} \in U_{\text{ad}},$$

$$(7) \quad J(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \rightarrow \min.$$

В системе (1)–(7) используются обозначения: $\mathbf{v} = (v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}), v_3(\mathbf{x}))$ — скорость течения в точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ из области Ω , $p = p(\mathbf{x})$ — давление, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}(\mathbf{x}))$ — девиатор тензора напряжений, $\mathbf{f} = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}))$ — внешняя сила, действующая на среду, $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}$ — вектор с компонентами

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma})_j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{v})$ — тензор скоростей деформации,

$$\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$|\mathcal{E}|^2$ — второй инвариант тензора \mathcal{E} , определяемый по формуле

$$|\mathcal{E}|^2 = \mathcal{E} : \mathcal{E} = \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{E}_{ij}^2,$$

$\mu(|\mathcal{E}|) > 0$ — вязкость, $g = g(\mathbf{x}) > 0$ — порог текучести, разделяющий два типа поведения среды, $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), u_3(\mathbf{x}))$ — набор управляющих параметров, $U_{\text{ад}}$ — множество допустимых управлений, J — целевой функционал.

При рассмотрении задачи (1)–(7) мы считаем, что $\mathbf{f}, \mu, g, U_{\text{ад}}, J$ — известны, а распределение скоростей \mathbf{v} и управление \mathbf{u} (вместе с ассоциированным с ними давлением p) являются неизвестными величинами.

Замечание 1. Данная задача может быть отнесена к так называемым *задачам со свободной границей*, т.е. таким задачам, в которых уравнения различны в различных частях рассматриваемой области. При этом неизвестная заранее свободная граница отделяет зону области Ω , где материал жесткий, от зоны, где материал проявляет жидкие свойства. Свободная граница участвует в постановке задачи неявно и может быть определена только после нахождения решений.

Замечание 2. Если положить $g \equiv 0$, то рассматриваемая реологическая модель сводится к модели нелинейно-вязкой жидкости [13]; если к тому же $\mu = \text{const}$, то мы имеем дело с хорошо известной системой уравнений Навье–Стокса [14], описывающей динамику классической ньютоновской жидкости. При возрастании предела текучести g в потоке появляются области, где жидкость ведет себя подобно твердому телу, а при значительном увеличении g течение полностью блокируется.

3. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Далее по тексту будут использоваться пространства Лебега $L_r(\Omega)$ и Соболева $W_q^m(\Omega)$, состоящие из функций, заданных в области Ω . Нормы в этих пространствах определяются обычным образом (см. [14, 15]). Когда речь идет о пространствах векторнозначных функций, будем использовать жирный шрифт: $\mathbf{L}_r(\Omega), \mathbf{W}_q^m(\Omega)$ и т.д.

Пусть $\mathcal{D}(\Omega)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций. Замыкание множества $\mathcal{D}(\Omega)$ в $W_2^1(\Omega)$ обозначим через $H_0^1(\Omega)$.

Из неравенства Пуанкаре [14]

$$\|v\|_{L_2(\Omega)} \leq C_1 \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \quad C_1 = \text{const}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

следует, что в $H_0^1(\Omega)$ можно ввести норму

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}$$

и эта норма будет эквивалентна норме $\|\bullet\|_{W_2^1(\Omega)}$.

Введем также в рассмотрение пространство соленоидальных функций

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \text{div } \mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega\}$$

со скалярным произведением

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{\mathbf{V}} = \int_{\Omega} \mathcal{E}(\mathbf{v}) : \mathcal{E}(\mathbf{w}) \, dx$$

и нормой

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} = (\mathbf{v}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}}^{1/2}.$$

Из неравенства Корна [2] для пространства $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq C_2 \|\mathcal{E}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \quad C_2 = \text{const}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

имеющего фундаментальное значение во многих задачах теории пластичности и вязко-упругости, вытекает, что введенная выше норма $\|\bullet\|_{\mathbf{V}}$ эквивалентна норме $\|\bullet\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}$.

Через $\mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3}$ обозначим пространство симметрических 3×3 -матриц со скалярным произведением

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_{\mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3}} = \mathbf{X} : \mathbf{Y} = \sum_{i,j=1}^3 X_{ij} Y_{ij}$$

и евклидовой нормой

$$|\mathbf{X}| = (\mathbf{X}, \mathbf{X})_{\mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3}}^{1/2}.$$

Как обычно, символы \rightarrow и \rightharpoonup обозначают соответственно сильную и слабую сходимость.

4. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Опишем теперь основные наши предположения относительно «данных» задачи (1)–(7). Далее считаем, что

- (i) множество допустимых управлений $\mathbf{U}_{\text{ad}} \neq \emptyset$ ограничено и секвенциально слабо замкнуто в $\mathbf{L}_2(\Omega)$;
- (ii) целевой функционал $J: \mathbf{V} \times \mathbf{L}_2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости в $\mathbf{V} \times \mathbf{L}_2(\Omega)$, иными словами: для любой последовательности $(\mathbf{v}_n, \mathbf{u}_n)$ такой, что $(\mathbf{v}_n, \mathbf{u}_n) \rightharpoonup (\mathbf{v}, \mathbf{u})$ в $\mathbf{V} \times \mathbf{L}_2(\Omega)$ при $n \rightarrow \infty$, имеет место оценка

$$J(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(\mathbf{v}_n, \mathbf{u}_n);$$

- (iii) выполнено неравенство

$$(\mu(|\mathbf{X}|)\mathbf{X} - \mu(|\mathbf{Y}|)\mathbf{Y}) : (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3};$$

- (iv) функция μ непрерывна, и существуют константы μ_0 и μ_1 такие, что

$$0 < \mu_0 < \mu(s) < \mu_1, \quad \forall s \in \mathbb{R}_+;$$

- (v) выполнено неравенство $g(\mathbf{x}) > 0$ для п.в. $\mathbf{x} \in \Omega$ и $g \in \mathbf{L}_2(\Omega)$;
- (vi) имеет место включение $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$.

Замечание 3. Для выполнения условия (iii) достаточно потребовать, чтобы функция μ была неубывающей на \mathbb{R}_+ , например, $\mu(s) \equiv \arctan(s) + \mu_0$. В самом деле, с применением неравенства Коши–Буняковского–Шварца нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} & (\mu(|\mathbf{X}|)\mathbf{X} - \mu(|\mathbf{Y}|)\mathbf{Y}) : (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \\ &= \mu(|\mathbf{X}|)|\mathbf{X}|^2 - \mu(|\mathbf{X}|)\mathbf{X} : \mathbf{Y} - \mu(|\mathbf{Y}|)\mathbf{X} : \mathbf{Y} + \mu(|\mathbf{Y}|)|\mathbf{Y}|^2 \\ &\geq \mu(|\mathbf{X}|)|\mathbf{X}|^2 - \mu(|\mathbf{X}|)|\mathbf{X}||\mathbf{Y}| - \mu(|\mathbf{Y}|)|\mathbf{X}||\mathbf{Y}| + \mu(|\mathbf{Y}|)|\mathbf{Y}|^2 \\ &= \{\mu(|\mathbf{X}|)|\mathbf{X}| - \mu(|\mathbf{Y}|)|\mathbf{Y}|\}\{|\mathbf{X}| - |\mathbf{Y}|\} \geq 0 \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3}, \end{aligned}$$

если функция μ является неубывающей на \mathbb{R}_+ .

Замечание 4. Типичным примером целевого функционала, удовлетворяющего условию (ii), служит функционал

$$J(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \lambda_1 \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{V}}^2 + \lambda_2 \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

где $\tilde{\mathbf{v}}$ и $\tilde{\mathbf{u}}$ — заданные векторнозначные функции, λ_1 и λ_2 — неотрицательные параметры.

5. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ:
ДОПУСТИМЫЕ ПАРЫ И ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Введем теперь понятие допустимой пары «скорость-управление».
Пусть

$$\phi_g: \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \phi_g(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} g|\mathcal{E}(\mathbf{v})| \, d\mathbf{x}.$$

Определение 1. Под *допустимой парой* задачи оптимизации (1)–(7) понимается пара векторнозначных функций $(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in \mathbf{V} \times \mathbf{U}_{\text{ad}}$ такая, что

$$(8) \quad - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} v_i \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mu(|\mathcal{E}(\mathbf{v})|) \mathcal{E}(\mathbf{v}) : \mathcal{E}(\mathbf{w} - \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \phi_g(\mathbf{w}) - \phi_g(\mathbf{v}) \geq \int_{\Omega} (\mathbf{f} + \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}$$

для любой пробной векторнозначной функции $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$.

Вариационное неравенство (8) определяет так называемые *слабые обобщенные решения* задачи. По поводу корректности данного определения отсылаем читателя к монографии [2].

Пусть \mathbf{G} — множество всех допустимых пар задачи (1)–(7).

Определение 2. *Оптимальным решением* задачи (1)–(7) назовем пару векторнозначных функций $(\mathbf{v}_0, \mathbf{u}_0) \in \mathbf{G}$, которая характеризуется равенством

$$J(\mathbf{v}_0, \mathbf{u}_0) = \inf_{(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in \mathbf{G}} J(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

6. ТЕОРЕМА О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Основной результат работы формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1. При выполнении приведенных выше условий (i)–(vi) задача (1)–(7) имеет хотя бы одно оптимальное решение $(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{u}}) \in \mathbf{G}$ и

$$(9) \quad \int_{\Omega} \mu(|\mathcal{E}(\hat{\mathbf{v}})|) |\mathcal{E}(\hat{\mathbf{v}})|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} g|\mathcal{E}(\hat{\mathbf{v}})| \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{f} + \hat{\mathbf{u}}) \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}.$$

Доказательство данного результата базируется на теореме о разрешимости вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами и обобщенной теореме Вейерштрасса. Для удобства читателя приведем формулировки этих утверждений.

Лемма 1 (см. [16]). Пусть E — рефлексивное B -пространство, E' — пространство, сопряженное к E , $A: E \rightarrow E'$ — псевдомонотонный оператор, а $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая полунепрерывная снизу функция. Будем предполагать, что имеет место сходимость

$$\frac{\langle A(w), w \rangle + \varphi(w)}{\|w\|_E} \rightarrow +\infty,$$

когда $\|w\|_E \rightarrow +\infty$.

Тогда для заданного элемента $h \in E'$ существует решение $v \in E$ вариационного неравенства

$$\langle A(v) - h, w - v \rangle + \varphi(w) - \varphi(v) \geq 0 \quad \forall w \in E.$$

Лемма 2 (обобщенная теорема Вейерштрасса [17]). Пусть E — рефлексивное B -пространство, $Q \subset E$ — ограниченное и секвенциально слабо замкнутое множество. Предположим, что функционал $\mathcal{J}: Q \rightarrow \mathbb{R}$ полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости в E . Тогда существует элемент $y_0 \in Q$ такой, что

$$\mathcal{J}(y_0) = \inf_{y \in Q} \mathcal{J}(y).$$

Доказательство теоремы 1.

Шаг 1. Докажем сначала, что множество допустимых пар G непусто. Зафиксируем (временно) некоторый элемент $u \in U_{ad}$ и введем в рассмотрение два нелинейных оператора:

$$M: V \rightarrow V', \quad \langle M(v), w \rangle = \int_{\Omega} \mu(|\mathcal{E}(v)|) \mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(w) dx,$$

$$T_u: V \rightarrow V', \quad \langle T_u(v), w \rangle = - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} v_i v \cdot \frac{\partial w}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} (f + u) \cdot w dx.$$

С помощью этих операторов неравенство (8) можно переписать в виде:

$$(10) \quad \langle M(v) + T_u(v), w - v \rangle + \phi_g(w) - \phi_g(v) \geq 0 \quad \forall w \in V.$$

В силу условия (iii) оператор M обладает свойством монотонности. Кроме того, данный оператор семинепрерывен. Отсюда вытекает (см. [16]), что M является псевдомонотонным оператором.

Заметим также, что T_u — усиленно непрерывный оператор, в чем несложно убедиться, принимая во внимание компактность вложения Соболева $W_{2,1}^1(\Omega) \hookrightarrow L_4(\Omega)$ (см. [15]). Поэтому $M + T_u$ принадлежит классу псевдомонотонных операторов как сумма псевдомонотонного и усиленно непрерывного операторов (см. [16]).

Используя условие (iv) и равенство

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} v_i v \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = 0,$$

получаем, что

$$\frac{\langle M(v) + T_u(v), v \rangle + \phi_g(v)}{\|v\|_V} \rightarrow +\infty,$$

когда $\|v\|_V \rightarrow +\infty$.

Применяя лемму 1, мы делаем вывод о том, что неравенство (10) имеет в пространстве \mathbf{V} одно решение или несколько решений, одно из которых обозначим через \mathbf{v}_u . Очевидно, что $(\mathbf{v}_u, \mathbf{u}) \in \mathbf{G}$.

Шаг 2. Покажем, что множество \mathbf{G} ограничено в пространстве $\mathbf{V} \times L_2(\Omega)$. Возьмем произвольный элемент $(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in \mathbf{G}$. В силу наших предположений множество \mathbf{U}_{ad} ограничено в $L_2(\Omega)$ (см. условие (i)), поэтому нам необходимо оценить только норму скорости \mathbf{v} в пространстве \mathbf{V} . Подставляя в (8) $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ и умножая полученное неравенство на -1 , находим, что

$$(11) \quad \int_{\Omega} \mu(|\mathcal{E}(\mathbf{v})|) |\mathcal{E}(\mathbf{v})|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} g|\mathcal{E}(\mathbf{v})| \, d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} (\mathbf{f} + \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x},$$

Затем, полагая в (8) $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}$, приходим к неравенству

$$(12) \quad \int_{\Omega} \mu(|\mathcal{E}(\mathbf{v})|) |\mathcal{E}(\mathbf{v})|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} g|\mathcal{E}(\mathbf{v})| \, d\mathbf{x} \geq \int_{\Omega} (\mathbf{f} + \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x},$$

Из (11) и (12) следует равенство

$$(13) \quad \int_{\Omega} \mu(|\mathcal{E}(\mathbf{v})|) |\mathcal{E}(\mathbf{v})|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} g|\mathcal{E}(\mathbf{v})| \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{f} + \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x},$$

откуда, принимая в расчет условие (iv), выводим неравенство

$$\mu_0 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq C_{\Omega} \|\mathbf{f} + \mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}, \quad C_{\Omega} = \text{const}.$$

Таким образом, мы получаем оценку нормы \mathbf{v} в терминах $\Omega, \mathbf{U}_{ad}, \mathbf{f}, \mu_0$:

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq \frac{C_{\Omega}}{\mu_0} \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}_{ad}} \|\mathbf{f} + \mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)} \leq C(\Omega, \mathbf{U}_{ad}, \mathbf{f}, \mu_0).$$

Тем самым доказана ограниченность \mathbf{G} .

Шаг 3. Покажем теперь, что множество \mathbf{G} секвенциально слабо замкнуто в пространстве $\mathbf{V} \times L_2(\Omega)$. Возьмем произвольную последовательность $(\mathbf{v}_n, \mathbf{u}_n) \in \mathbf{G}$ такую, что $(\mathbf{v}_n, \mathbf{u}_n) \rightharpoonup (\mathbf{v}_*, \mathbf{u}_*)$ в $\mathbf{V} \times L_2(\Omega)$ при $n \rightarrow \infty$, и проверим, что $(\mathbf{v}_*, \mathbf{u}_*) \in \mathbf{G}$.

Мы, очевидно, имеем слабую сходимость: $\mathbf{v}_n \rightharpoonup \mathbf{v}_*$ в \mathbf{V} и $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}_*$ в $L_2(\Omega)$ и, более того, благодаря теореме о компактности вложения Соболева $W_2^1(\Omega) \hookrightarrow L_4(\Omega)$ имеет место также сильная сходимость: $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}_*$ в $L_4(\Omega)$ при $n \rightarrow \infty$.

Ввиду (i) получаем, что $\mathbf{u}_* \in \mathbf{U}_{ad}$. Далее, поскольку $(\mathbf{v}_n, \mathbf{u}_n) \in \mathbf{G}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то выполнено неравенство:

$$(14) \quad \langle \mathbf{M}(\mathbf{v}_n) + \mathbf{T}_{\mathbf{u}_n}(\mathbf{v}_n), \mathbf{w} - \mathbf{v}_n \rangle + \phi_g(\mathbf{w}) - \phi_g(\mathbf{v}_n) \geq 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}, n \in \mathbb{N}.$$

Нам нужно выполнить предельный переход в (14), устремляя $n \rightarrow \infty$. Для этого заметим следующее.

Введем В-пространство \mathbf{V}_g , состоящее из элементов пространства \mathbf{V} , с нормой

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_g} = \int_{\Omega} g|\mathcal{E}(\mathbf{v})| \, d\mathbf{x}.$$

Аксиомы нормы выполнены благодаря условию (v). К тому же справедливо соотношение

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_g} \leq \|g\|_{L_2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V},$$

т. е. имеет место непрерывное вложение $\mathbf{V} \hookrightarrow \mathbf{V}_g$.

Отсюда делаем вывод о том, что $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}_*$ в \mathbf{V}_g при $n \rightarrow \infty$ и

$$\|\mathbf{v}_*\|_{\mathbf{V}_g} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_n\|_{\mathbf{V}_g},$$

или, другими словами,

$$(15) \quad \phi_g(\mathbf{v}_*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \phi_g(\mathbf{v}_n).$$

Далее, полагаем $\mathbf{w} = \mathbf{v}_*$ и осуществляем переход к нижнему пределу в (14); с учетом оценки (15) получаем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle \mathbf{M}(\mathbf{v}_n), \mathbf{v}_* - \mathbf{v}_n \rangle \geq 0,$$

откуда следует, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle \mathbf{M}(\mathbf{v}_n), \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_* \rangle \leq 0.$$

В силу псевдомонотонности оператора \mathbf{M} приходим к неравенству:

$$(16) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle \mathbf{M}(\mathbf{v}_n), \mathbf{v}_n - \mathbf{w} \rangle \geq \langle \mathbf{M}(\mathbf{v}_*), \mathbf{v}_* - \mathbf{w} \rangle \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}.$$

Перепишем теперь неравенство (14) в более удобном для наших целей виде:

$$\phi_g(\mathbf{v}_n) - \phi_g(\mathbf{w}) \leq -\langle \mathbf{M}(\mathbf{v}_n) + \mathbf{T}_{\mathbf{u}_n}(\mathbf{v}_n), \mathbf{v}_n - \mathbf{w} \rangle \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}, n \in \mathbb{N}.$$

Переходя в этом неравенстве к верхнему пределу (при $n \rightarrow \infty$), получим

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{\phi_g(\mathbf{v}_n) - \phi_g(\mathbf{w})\} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \{-\langle \mathbf{M}(\mathbf{v}_n) + \mathbf{T}_{\mathbf{u}_n}(\mathbf{v}_n), \mathbf{v}_n - \mathbf{w} \rangle\}.$$

Отсюда и из (15) и (16), выводим неравенства

$$\begin{aligned} \phi_g(\mathbf{v}_*) - \phi_g(\mathbf{w}) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \{\phi_g(\mathbf{v}_n) - \phi_g(\mathbf{w})\} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \{\phi_g(\mathbf{v}_n) - \phi_g(\mathbf{w})\} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \{-\langle \mathbf{M}(\mathbf{v}_n) + \mathbf{T}_{\mathbf{u}_n}(\mathbf{v}_n), \mathbf{v}_n - \mathbf{w} \rangle\} = -\liminf_{n \rightarrow \infty} \{\langle \mathbf{M}(\mathbf{v}_n) + \mathbf{T}_{\mathbf{u}_n}(\mathbf{v}_n), \mathbf{v}_n - \mathbf{w} \rangle\} \\ &\leq -\langle \mathbf{M}(\mathbf{v}_*) + \mathbf{T}_{\mathbf{u}_*}(\mathbf{v}_*), \mathbf{v}_* - \mathbf{w} \rangle \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}. \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\langle \mathbf{M}(\mathbf{v}_*) + \mathbf{T}_{\mathbf{u}_*}(\mathbf{v}_*), \mathbf{w} - \mathbf{v}_* \rangle + \phi_g(\mathbf{w}) - \phi_g(\mathbf{v}_*) \geq 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}.$$

Тем самым доказано, что $(\mathbf{v}_*, \mathbf{u}_*) \in \mathbf{G}$.

Шаг 4. С учетом вышеизложенного мы имеем возможность применить лемму 2 для обоснования разрешимости задачи (1)–(7), а равенство (9) получается аналогично (13).

Таким образом, теорема 1 полностью доказана. □

REFERENCES

- [1] W. Prager, *Introduction to Mechanics of Continua*, Ginn and Co., New York, 1961.
- [2] G. Duvaut, J. L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Berlin: Springer-Verlag, 1976. MR0521262
- [3] J. Malek, M. Ruzicka, V. V. Shelukhin, *Hershel-Bulkley fluids: existence and regularity of steady flows*, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **15**:12 (2005), 1845–1861. MR2189915
- [4] A. E. Mamontov, *Existence of global solutions to multidimensional equations for Bingham fluids*, *Mathematical Notes*, **82**:3–4 (2007), 501–517. MR2375792
- [5] A. V. Lapin, A. D. Romanenko, *Solving the problem of Bingham fluid flow in cylindrical pipeline*, *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, **59**:2 (2015), 67–70. MR3372217

- [6] N. E. Khouja, N. Roquet, B. Cazacliu, *Analysis of a regularized Bingham model with pressure-dependent yield stress*, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, **17**:4 (2015), 723–739. MR3412276
- [7] V. V. Shelukhin, V. V. Neverov, *Thermodynamics of micropolar Bingham fluids*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, **236** (2016), 83–90. MR3554183
- [8] E. S. Baranovskii, M. A. Artemov, *Existence of optimal control for a nonlinear-viscous fluid model*, International Journal of Differential Equations, **2016** (2016), Article ID 9428128. MR3520542
- [9] D. Wachsmuth, T. Roubicek, *Optimal control of planar flow of incompressible non-Newtonian fluids*, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendung, **29**:3 (2010), 351–376. MR2661517
- [10] E. S. Baranovskii, *Solvability of the stationary optimal control problem for motion equations of second grade fluids*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **9** (2012), 554–560. MR3037866
- [11] E. S. Baranovskii, *Optimal control for steady flows of the Jeffreys fluids with slip boundary condition*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **8** (2014), 168–176. MR3379250
- [12] E. S. Baranovskii, *An optimal boundary control problem for the motion equations of polymer solutions*, Siberian Advances in Mathematics, **24** (2014), 159–168. MR3184035
- [13] V. G. Litvinov, *Motion of a nonlinear-viscous fluid*, M.: Nauka, 1982. MR0715430
- [14] R. Temam, *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*, Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland Publishing Company, 1979. MR0603444
- [15] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, New York: Acad. Press, 1975. MR0450957
- [16] J. L. Lions, *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires*, Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1969. MR0259693
- [17] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, III: Variational Methods and Optimization*, New York: Springer, 1985. MR0768749

MIKHAIL ANATOLIEVICH ARTEMOV
VORONEZH STATE UNIVERSITY,
UNIVERSITETSKAYA PL., 1,
394006, VORONEZH, RUSSIA
E-mail address: artemov_m_a@mail.ru

ANNA VADIMOVNA SKOBANEVA
VORONEZH STATE UNIVERSITY,
UNIVERSITETSKAYA PL., 1,
394006, VORONEZH, RUSSIA
E-mail address: poais@list.ru