А. А. Махнев, М. П. Голубятников, Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$, *Сиб. электрон. матем. изв.*, 2017, том 14, 1064–1077

DOI: 10.17377/semi.2017.14.090

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1064–1077 (2017) УДК 519.17+512.54
DOI 10.17377/semi.2017.14.090 MSC 05C25

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$

А.А. МАХНЕВ, М.П. ГОЛУБЯТНИКОВ

Abstract. Prime divisors of orders of automorphisms and the fixed point subgraphs of automorphisms of prime orders are studied for a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$ Let $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $\bar{G} = G/S(G)$, $\bar{T}$ is the socle of $\bar{G}$. If Γ is vertex-symmetric then the possible structure of G is determined. In the case $\bar{T} \cong U_3(3)$ graph exist and is arc-transitive.

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Если Γ — граф диаметра d, то через Γ_i, где $i \le d$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим

Makhnev, A.A., Golubyatnikov, M.P., Automorphisms of graph with intersection array $\{64, 42, 1; 1, 21, 64\}$.

Поступила 6 сентября 2017 г., опубликована 19 октября 2017 г.

$a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечения графа Γ.

Граф называется реберно симметричным, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер).

В работе [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных локально циклических графов с числом вершин не большим 4096.

Предложение 1. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра, большего 2, на $v \le 4096$ вершинах. Если $\lambda = 2$ и $\mu > 2$, то верно одно из утверждений:*

(1) Γ — *примитивный граф с массивом пересечений* $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, $\{35, 32, 8; 1, 4, 8\}$, $\{39, 36, 27; 1, 4, 13\}$, $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$, $\{60, 57, 16; 1, 4, 30\}$, $\{60, 57, 32; 1, 4, 18\}$, $\{63, 60, 49; 1, 4, 15\}$, $\{68, 65, 32; 1, 4, 40\}$, $\{75, 72, 42; 1, 4, 50\}$, $\{75, 72, 31; 1, 8, 45\}$, $\{80, 77, 61; 1, 7, 20\}$, $\{90, 87, 60; 1, 15, 18\}$, $\{99, 96, 12; 1, 4, 88\}$, $\{99, 96, 20; 1, 4, 72\}$, $\{99, 96, 6; 1, 6, 88\}$, $\{120, 117, 5; 1, 5, 108\}$, $\{143, 140, 34; 1, 7, 10\}$, $\{147, 144, 39; 1, 12, 117\}$, $\{224, 221, 32; 1, 16, 208\}$;

(2) Γ — *антиподальный граф с* $\mu \ge 3$ *и массивом пересечений* $\{15, 12, 1; 1, 4, 15\}$, $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$, $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$, $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$, $\{42, 39, 1; 1, 3, 42\}$, $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$, $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$, $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$, $\{99, 96, 1; 1, 4, 99\}$, $\{108, 105, 1; 1, 5, 108\}$, $\{147, 144, 1; 1, 16, 147\}$, $\{171, 168, 1; 1, 12, 171\}$, $\{243, 240, 1; 1, 4, 243\}$, $\{243, 240, 1; 1, 20, 243\}$.

Продолжается исследование реберно симметричных графов с такими массивами пересечений. Окрестность вершины в таком графе является объединением изолированных многоугольников. Автоморфизмы графов с массивами из пункта (2) $\{42, 39, 1; 1, 3, 42\}$ и $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$ найдены в [2,3]. Реберно симметричный граф с массивом пересечений $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$ существует и имеет группу автоморфизмов $(Z_4 \times U_3(3)).Z_2$. Автоморфизмы графов с массивами $\{15, 12, 1; 1, 4, 15\}$, $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$ найдены в [4] и в статье Ефимова К.С., Махнева А.А., направленной в "Математические заметки". Автоморфизмы графов с массивами $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$, $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$ найдены в [5,6]. В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$.

Антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 имеет (см. [7, стр. 431]) массив пересечений $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$, $v = r(k+1)$ вершин и спектр $k^1, n^f, (-1)^k, (-m)^g$, где $n, -m$ — корни уравнения $x^2 - (\lambda - \mu)x - k = 0$ и $f = m(r-1)(k+1)/(n+m)$, $g = n(r-1)(k+1)/(n+m)$. Если $\mu \ne \lambda$, то собственные значения графа целые и параметры графа выражаются через r, n, m: $k = nm$, $\mu = (m-1)(n+1)/r$, $\lambda = \mu + n - m$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$. Тогда Γ имеет $v = 1 + 63 + 945 + 15 = 1024$ вершин и спектр $63^1, 7^{540}, -1^{63}, -9^{420}$. Порядок клики в Γ не превосходит 4, так как $\lambda = 2$.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ *пересекает* t *антиподальных классов по* s *вершинам. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, то* $p = 2$, $\alpha_3(g) = 16l$, $\alpha_1(g) = 10l + 32m$ *и* $\alpha_2(g) = 1024 - 26l - 32m$*;*

(2) Ω *является* n*-кликой, либо* $n = 1$, $p = 3$, $\alpha_1(g) = 48l + 15$ *и* $\alpha_2(g) = 993 - 48l$, *либо* $n = 2$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 16l + 32e - 18$, $\alpha_2(g) = 1042 - 32e - 48l$, *либо* $n = 4$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 16l + 32e - 36$, $\alpha_2(g) = 1060 - 48l - 32e$, *либо* $n = 4$, $p = 3$, $\alpha_1(g) = 24l + 48e + 36$, $\alpha_2(g) = 972 - 72l - 48e$, *либо* $n = 4$, $p = 5$, $\alpha_1(g) = 40l + 80e + 60$, $\alpha_2(g) = 900 - 120l - 80e$*;*

(3) Ω *содержится в антиподальном классе, то либо* $p = 7$, $s = 2, 9, 16$, $\alpha_1(g) = 112l - 24 - 9s$, *либо* $p = 3$, $s = 4, 7, 10, 13, 16$, $\alpha_1(g) = 48l + 24 - 9s$*;*

(4) $p = 3$ *и либо*

(*i*) $st \leq 64$ *и если* $st = 64$, *то* $\alpha_1(g) = 0$ *и* $s = 16, t = 4$, $\alpha_2(g) = 960$ *или* $s = 4, t = 16$, $\alpha_2(g) = 1024 - 256 = 768$, *либо*

(*ii*) $s = 13$, $t = 4$, $\alpha_1(g) = 48l - 36$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 6\}$, *либо*

(*iii*) $s = 10$, $t = 4$, $\alpha_1(g) = 48l - 24 = 24(2l - 1)$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 10\}$, *либо*

(*iv*) $s = 7$, *то* $t = 4$, $\alpha_1(g) = 48l - 32$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 15\}$ *или* $t = 7$, $\alpha_1(g) = 48l - 33$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 6\}$, *либюо*

(*v*) $s = 4, t = 4$, $\alpha_1(g) = 48l - 16$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 20\}$ *или* $t = 7$, $\alpha_1(g) = 48l + 18$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 13\}$, *или* $t = 10$, $\alpha_1(g) = 48l + 8$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 8\}$, *или* $t = 13$, $\alpha_1(g) = 48l + 2$ *и* $l \in \{1, 2, 3, 4\}$*;*

(5) $p = 2$.

Следствие 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$ *и группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* Γ. *Если* F *– антиподальный класс графа* Γ, $\bar{T}$ *– цоколь группы* $\bar{G} = G/S(G)$, *то* $\bar{T}$ *стабилизирует* F *и выполняется одно из утверждений:*

(1) $\bar{T} \cong U_3(3)$, *граф* Γ *существует и является реберно симметричным, группа* G *является расширением элементарной абелевой 2-группы* Q *порядка* 2^{10} *с помощью* $G_2(2)$ *и* Q *содержит подгруппу* K *порядка* 2^4, *регулярную на каждом антиподальном классе, либо*

(2) $\bar{T} \cong L_2(7)$, *группа* G *является расширением элементарной абелевой 2-группы* Q *с помощью* $L_2(7)$ *или* $PGL_2(7)$, *длины* $\bar{T}$*-орбит на* F *равны* $(8, 8)$, $|Q_{\{F\}} : Q_a| = 2$, $C_Q(f) \cap Q_{\{F\}} = \langle g \rangle$, $[Q_{\{F\}}, f] = Q_a$, *подграф* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ *является пустым,* $\alpha_3(g) = 128$, $\alpha_1(g) = 112(1 + 2n)$, $n \leq 3$, g *фиксирует точно* 8 *антиподальных классов и* $|Q_{\{F\}}| \in \{2^4, 2^7\}$.

В случае (2) существование графа неизвестно.

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [8]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \leq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_l$ для чисел пересечений p_{ij}^l.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p_{ij}^l. Тогда собственные значения $p_1(0), ..., p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, ..., m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/n_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, ..., W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. § 3.7 [3]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^d Q_{ij} \alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$. Тогда ненулевые числа пересечений равны*

(1) $p_{11}^1 = 2$, $p_{12}^1 = 60$, $p_{22}^1 = 870$, $p_{23}^1 = 1$, $p_{33}^1 = 0$;
(2) $p_{11}^2 = 4$, $p_{12}^2 = 58$, $p_{13}^2 = 1$, $p_{22}^2 = 872$, $p_{23}^2 = 14$, $p_{33}^2 = 0$;
(3) $p_{12}^3 = 63$, $p_{13}^3 = 0$, $p_{22}^3 = 882$, $p_{23}^3 = 0$, $p_{33}^3 = 14$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Лемма 2. . *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Если $g \in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 540, χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 63. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$, $\chi_1(g) = (17\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/32 - 4$, $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/16 - 1$. Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_1(g) - 540$ и $\chi_2(g) - 63$ делятся на p, а если $|g| = p^2$, p — простое число, то $\chi_1(g^p) - 540$ делится на p^2.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 540 & 60 & -4 & -36 \\ 63 & -1 & -1 & 63 \\ 420 & -60 & 4 & -28 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g) = (135\alpha_0(g) + 15\alpha_1(g) - \alpha_2(g) - 9\alpha_3(g))/256$. Подставляя $\alpha_2(g) = 1024 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим Значит, $\chi_1(g) = (17\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/32 - 4$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (63\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 63\alpha_3(g))/1024$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 1024 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/16 - 1$. □

Остальные утверждения леммы следуют из лемм 1–2 [9].

В леммах 3–7 предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{63,60,1;1,4,63\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Если Ω — непустой граф, то будем считать, что Ω содержит по s вершин в t антиподальных классах. Для вершины $x\in\Gamma$ через $F(x)$ обозначим антиподальный класс, содержащий x.

З а м е ч а н и е. Если g фиксирует антиподальный класс K и $a\in\Omega$, то K пересекает Ω, а если Ω пересекает антиподальные классы K,L, то $|K\cap\Omega|=|L\cap\Omega|$.

Первое утверждение очевидно. Докажем второе утверждение. Вершина из $L\cap\Omega$ попадает в окрестность единственной вершины из $K\cap\Omega$, поэтому $|K\cap\Omega|\le|L\cap\Omega|$. Симметрично, $|L\cap\Omega|\le|K\cap\Omega|$.

Лемма 3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то $p=2$, $\alpha_3(g)=16l$, $\alpha_1(g)=10l+32m$ и $\alpha_2(g)=1024-26l-32m$;*

(2) *если Ω является n-кликой, то либо $n=1$, $p=3$, $\alpha_1(g)=48l+15$ и $\alpha_2(g)=993-48l$, либо $n=2$, $p=2$, $\alpha_1(g)=16l+32e-18$, $\alpha_2(g)=1042-32e-48l$, либо $n=4$, $p=2$, $\alpha_1(g)=16l+32e-36$, $\alpha_2(g)=1060-48l-32e$, либо $n=4$, $p=3$, $\alpha_1(g)=24l+48e+36$, $\alpha_2(g)=972-72l-48e$, либо $n=4$, $p=5$, $\alpha_1(g)=40l+80e+60$, $\alpha_2(g)=900-120l-80e$;*

(3) *если Ω содержится в антиподальном классе, то либо $p=7$, $s=2,9,16$, $\alpha_1(g)=112l-24-9s$, либо $p=3$, $s=4,7,10,13,16$, $\alpha_1(g)=48l+24-9s$.*

Доказательство. Так как $1024=2^{10}$, то $p=2$. Далее, $\alpha_3(g)=16l$, l четно, $\chi_1(g)=(\alpha_1(g)-8l)/16-4$, $\alpha_1(g)=8l+32m$ и $\alpha_2(g)=1024-24l-32m$.

Пусть Ω является n-кликой, $a\in\Omega$. Тогда g действует без неподвижных точек на $F-\{a\}$, где F — антиподальный класс, содержащий a, поэтому p делит 15.

Если $n=1$, то g действует без неподвижных точек на $[a]$, p делит 63 и $p=3$. В этом случае $\alpha_3(g)=15$, $\chi_1(g)=(1+\alpha_1(g))/16-4$, поэтому $\alpha_1(g))=48l+15$, $\alpha_2(g)=993-48l$.

Если $n>1$, то для различных вершин $a,b\in\Omega$ элемент g действует без неподвижных точек на $[a]\cap[b]-\Omega$ и на $\Gamma_2(a)$, поэтому либо $p=2$, $n=2,4$, либо $n=4$, $p=3,5$.

Пусть $n=2$, $p=2$. Тогда число $\chi_2(g)-63=(2+\alpha_3(g))/16-64$ делится на 2, поэтому $\alpha_3(g)=32l-2$. Далее, число $\chi_1(g)=(17+\alpha_1(g)-16l+1)/16-4$ четно, поэтому $\alpha_1(g)=16l+32e-18$, $\alpha_2(g)=1024-32l-(16l+32e-18)=1042-32e-48l$.

Пусть $n=4$, $p=2$. В силу того, что число $\chi_2(g)-63$ делится на 2, имеем $\alpha_3(g)=32l-4$. Далее, число $\chi_1(g)=(34+\alpha_1(g)-16l+2)/16-4$ четно, следовательно, $\alpha_1(g)=16l+32e-36$ и $\alpha_2(g)=1060-48l-32e$.

Пусть $n=4$, $p=3$, Тогда число $\chi_2(g)-63=(4+\alpha_3(g))/16-64$ делится на 3, поэтому $\alpha_3(g)=48l+12$. Далее, число $\chi_1(g)=(28+\alpha_1(g)-24l)/16-4$ кратно трем, поэтому $\alpha_1(g)=24l+48e+36$ и $\alpha_2(g)=1024-4-48l-12-24l-48e-36=972-72l-48e$.

Пусть $n=4$, $p=5$, Тогда число $\chi_2(g)-63=(4+\alpha_3(g))/16-64$ делится на 5, поэтому $\alpha_3(g)=80l+60$. Далее, из делимости числа $\chi_1(g)=(4+\alpha_1(g)-40l)/16-4$ на 5 вытекает $\alpha_1(g)=40l+80e+60$, $\alpha_2(g)=900-120l-80e$.

Пусть Ω содержится в антиподальном классе F. Тогда p делит $16 - s$ и 63, поэтому g действует без неподвижных точек на множестве антиподальных классов, отличных от F.

Пусть $p = 7$. Тогда $s = 2, 9, 16$, число $\chi_1(g) = (18s + 2\alpha_1(g) - 16)/32 - 4$ сравнимо с 1 по модулю 7, поэтому $\alpha_1(g) = 112l - 24 - 9s$.

Пусть $p = 3$. Тогда $s = 4, 7, 10, 13, 16$, число $\chi_1(g) = (18s+2\alpha_1(g)-16)/32-4$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 48l + 24 - 9s$. □

Лемма 4. *Если Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе, то $p \leq 3$.*

Доказательство. Пусть Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$.

Если $p > 3$, то для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ с условием $d(a, b) \leq 2$ подграф $[a]\cap[b]$ содержится в Ω. Отсюда Ω является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{t-1, 4(s-1), 1; 1, 4, t-1\}$, p делит $16-s$, $64-t$ и $1024-st$. В случае $s = 16$ каждая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна ровно с t вершинами из Ω, поэтому $p \leq 3$, противоречие.

В случае $p = 13$ имеем $s = 3$, $t = 12, 25, 38, 51$ и Ω имеет массив пересечений $\{t-1, 4(s-1), 1; 1, 4, t-1\}$, причем $t-2-4(s-1) = t-10 = 2$. Далее, неглавные собственные значения графа Ω равны -1 или являются корнями уравнения $x^2 + 2x - (t - 5) = 0$. Противоречие с тем, что число $t - 4 = 8$ не является квадратом целого числа.

В случае $p = 11$ имеем $s = 5$, $t = 17, 28, 39, 50, 61$ и Ω имеет массив пересечений $\{t - 1, 16, 1; 1, 4, t - 1\}$, причем $t - 2 - 16 = 2$, противоречие.

В случае $p = 7$ имеем $s = 2, 9$ и Ω имеет массив пересечений $\{t - 1, 4(s - 1), 1; 1, 4, t - 1\}$, причем $t - 2 - 4(s - 1) = 2$. В случае $s = 2$ имеем $t = 8$, а в случае $s = 9$ имеем $t = 36$. Далее, неглавные собственные значения графа Ω равны -1 или являются корнями уравнения $x^2 + 2x - (t - 5) = 0$. Так как число $t - 4$ является квадратом целого числа, то $t = 8$ и Ω является графом Тэйлора с массивом пересечений $\{7, 4, 1; 1, 4, 7\}$. Противоречие с тем, что окрестность вершины в Ω является сильно регулярным графом с параметрами $(7, 2, \lambda', 1)$.

В случае $p = 5$ имеем $s = 6, 11$ и Ω имеет массив пересечений $\{t - 1, 4(s - 1), 1; 1, 4, t - 1\}$, причем $t - 2 - 4(s - 1) = 2$. В случае $s = 6$ имеем $t = 24$, а в случае $s = 11$ имеем $t = 44$. Далее, неглавные собственные значения графа Ω равны -1 или являются корнями уравнения $x^2 + 2x - (t - 5) = 0$. Противоречие с тем, что число $t - 4$ должно быть квадратом целого числа. □

Лемма 5. *Если $p = 3$, Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *$st \leq 64$ и если $st = 64$, то $\alpha_1(g) = 0$ и либо $s = 16, t = 4$, $\alpha_2(g) = 960$, либо $s = 4, t = 16$, $\alpha_2(g) = 1024 - 256 = 768$;*

(2) *если $s = 13$, то $t = 4$, $\alpha_1(g) = 48l - 36$ и $l \in \{1, 2, ..., 6\}$;*

(3) *если $s = 10$, то $t = 4$, $\alpha_1(g) = 48l - 24 = 24(2l - 1)$ и $l \in \{1, 2, ..., 10\}$;*

(4) *если $s = 7$, то либо $t = 4$, $\alpha_1(g) = 48l - 12$ и $l \in \{1, 2, ..., 15\}$, либо $t = 7$, $\alpha_1(g) = 48l - 33$ и $l \in \{1, 2, ..., 6\}$;*

(5) *если $s = 4$, то либо $t = 4$, $\alpha_1(g) = 48l$ и $l \in \{1, 2, ..., 20\}$, либо $t = 7$, $\alpha_1(g) = 48l+12$ и $l \in \{1, 2, ..., 13\}$, либо $t = 10$, $\alpha_1(g) = 48l-12$ и $l \in \{1, 2, ..., 8\}$, либо $t = 13$, $\alpha_1(g) = 48l - 36$ и $l \in \{1, 2, 3, 4\}$.*

Доказательство. Пусть Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе.

Пусть $p = 3$. Тогда Ω — регулярный граф степени $t-1$, $\lambda_\Omega = 2$ и $\mu_\Omega \in \{1, 4\}$.

Если $d(u, u^g) = 1$, то $|[u] \cap \Omega| \le 1$, а если $d(u, u^g) = 2$, то $|[u] \cap \Omega| \le 4$, причем в случае $|[u] \cap \Omega| \ge 2$ подграф $[u] \cap \Omega$ является кокликой. Отсюда число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $st(64 - t)$, но не больше $\alpha_1(g) + 4\alpha_2(g)$. В частности, $st(64 - t) \le 64(64 - t)$, поэтому $st \le 64$.

Пусть $\alpha_2(g) = 16(64 - t)$. Тогда число $\chi_1(g) = (9st - 8t)/16 - 4$ делится на 3 и $t(9s - 8) = 16(3l + 1)$. Если $s = 2, t = 32$, то $20 = 3l + 1$, противоречие. Если $s = 4, t = 16$, то $28 = 3l + 1$ и $l = 9$. Если $s = 8, t = 8$, то $32 = 3l + 1$, противоречие. Если $s = 16, t = 4$, то $34 = 3l + 1$ и $l = 11$.

Напомним, что $\alpha_1(g) = 16(64 - t) - \alpha_2(g)$.

Пусть $s = 13$. Тогда $t = 4$ и число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $52 \cdot 60$, но не больше $(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $720 \le \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (372 + \alpha_1(g))/16$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 48l - 36$ и $l \in \{1, 2, ..., 6\}$.

Пусть $s = 10$. Тогда $t = 4$ и число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $40 \cdot 60$, но не больше $(16(64-t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $1440 \le 3\alpha_2(g)$ и $480 \le \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (264 + \alpha_1(g))/16$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 48l - 24 = 24(2l - 1)$ и $l \in \{1, 2, ..., 10\}$.

Пусть $s = 7$. Тогда $t = 4, 7$. В случае $t = 7$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $49 \cdot 57$, но не больше $(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $3357 \le 3\alpha_2(g)$ и $627 \le \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (7(119 - 9) + 2\alpha_1(g))/32 - 4 = (55 \cdot 7 + \alpha_1(g))/16 - 4$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 48l - 33$ и $l \in \{1, 2, ..., 6\}$.

В случае $t = 4$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $28 \cdot 60$, но не больше $(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $16(105 - 64) + 64 = 720 \le 3\alpha_2(g)$ и $240 \le \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 28 + 2\alpha_1(g) - 36)/32 - 4 = (1714 - 82 + \alpha_1(g))/16$, поэтому $\alpha_1(g) = 48l - 12$ и $l \in \{1, 2, ..., 15\}$.

Пусть $s = 4$. Тогда $t = 4, 7, 10, 13$. В случае $t = 13$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $52 \cdot 51$, но не больше $(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $36 \cdot 17 \le \alpha_2(g)$ и $612 \le \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (276 + \alpha_1(g))/16$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 48l - 36$ и $l \in \{1, 2, 3, 4\}$.

В случае $t = 10$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $40 \cdot 54$, но не больше $(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $16 \cdot 27 \le \alpha_2(g)$ и $432 \le \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (156 + \alpha_1(g))/16$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 48l - 12$ и $l \in \{1, 2, ..., 8\}$.

В случае $t = 7$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $28 \cdot 57$, но не больше $(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $228 \le \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (132 + \alpha_1(g))/16$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 48l + 12$ и $l \in \{1, 2, ..., 13\}$.

В случае $t = 4$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $16 \cdot 60$, но не больше $(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $16(t - 4) \le 3\alpha_2(g)$ и $0 \le \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (48 + \alpha_1(g))/16$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 48l$ и $l \in \{1, 2, ..., 20\}$. $\square$

Лемма 6. *Если $p = 2$, Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *$st \le 64$, число $\chi_1(g) = (9st - 8t)/16 - 4$ четно и $t(9s - 8) = 32l$, если $st = 64$, то $s = 4, t = 16$ и $l = 14m$, или $s = 8, t = 8$ и $l = 16m$, или $s = 16, t = 4$ и $l = 17m$;*

(2) *если $s = 14$, то либо $t = 4$, то $\alpha_1(g) = 32l + 4$ и $l \in \{1, 2, ..., 7\}$, либо $t = 2$, $\alpha_1(g) = 32l - 10$ и $l \in \{1, 2, ..., 28\}$;*

(3) *если* $s = 12$, *то либо* $t = 4$, $\alpha_1(g) = 32l - 16$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 15\}$, *либо* $t = 2$, $\alpha_1(g) = 32l - 8$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 31\}$;

(4) *если* $s = 10$, *то либо* $t = 6$, $\alpha_1(g) = 32l - 12$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 4\}$, *либо* $t = 4$, $\alpha_1(g) = 32l - 8$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 15\}$, *либо* $t = 2$, $\alpha_1(g) = 32l - 4$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 31\}$;

(5) *если* $s = 8$, *то либо* $t = 6$, $\alpha_1(g) = 32l$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 14\}$, *либо* $t = 4$, $\alpha_1(g) = 32l$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 30\}$, *либо* $t = 2$, $\alpha_1(g) = 32l$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 31\}$;

(6) *если* $s = 6$, *то либо* $t = 8$, $\alpha_1(g) = 32l - 16$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 12\}$, *либо* $t = 6$, $\alpha_1(g) = 32l - 20$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 26\}$, *либо* $t = 4$, $\alpha_1(g) = 32l - 24$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 30\}$, *либо* $t = 2$, $\alpha_1(g) = 32l - 28$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 31\}$;

(7) *если* $s = 4$, *то либо* $t = 12$, $\alpha_1(g) = 32l - 16$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 13\}$, *либо* $t = 10$, $\alpha_1(g) = 32l - 24$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 25\}$, *либо* $t = 8$, $\alpha_1(g) = 32l$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 28\}$, *либо* $t = 6$, $\alpha_1(g) = 32l - 20$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 29\}$, *либо* $t = 4$, $\alpha_1(g) = 32l - 16$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 30\}$, *либо* $t = 2$, $\alpha_1(g) = 32l - 24$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 64\}$;

(8) *если* $s = 2$, *то либо* $t = 6$, $\alpha_1(g) = 32l - 28$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 29\}$, *либо* $t = 4$, $\alpha_1(g) = 32l - 8$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 30\}$, *либо* $t = 2$, $\alpha_1(g) = 32l - 20$ *и* $l \in \{1, 2, ..., 31\}$.

Доказательство. Пусть Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе.

Пусть $p = 2$. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$, $\lambda_\Omega = 0, 2$ и $\mu_\Omega \in \{0, 2, 4\}$.

Если $d(u, u^g) = 1$, то $|[u] \cap \Omega| \in \{0, 2\}$, а если $d(u, u^g) = 2$, то $|[u] \cap \Omega| \in \{0, 2, 4\}$. Отсюда число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $st(64 - t)$, но не больше $2\alpha_1(g) + 4\alpha_2(g)$. В частности, $st(64 - t) \le 64(64 - t)$, поэтому $st \le 64$.

Если $st = 64$, то каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 4 вершинами из Ω, поэтому $\alpha_2(g) = 1024 - 16t$. Отсюда число $\chi_1(g) = (9st - 8t)/16 - 4$ четно и $t(9s - 8) = 32l$. Если $s = 2, t = 32$, то $l = 10$. В этом случае Ω получается из полного двудольного графа $K_{32,32}$ удалением максимального парасочетания. Число ребер в Ω равно $32 \cdot 31$, каждое ребро из Ω смежно с единственной парой вершин вида $\{u, u^g\}$. Число таких пар равно $32 \cdot 8$, причем каждая такая пара смежна с единственным ребром, двумя изолированными ребрами или четырехугольником из Ω. Пусть имеется x пустых графов, y ребер, z изолированных ребер и w четырехугольников, смежных с парами вершин вида $\{u, u^g\}$. Тогда $x + y + z + w = 32 \cdot 8$, $y + 2z + 4w = 31 \cdot 32$, поэтому $x = y = z = 0$ и $w = 32 \cdot 8$. Противоречие с тем, что для вершин $a, a^* \in \Omega$ с $d_\Omega(a, a^*) = 3$ подграф $[a] \cap [a^*]$ содержит две пары вершин $\{u, u^g\}$, $\{w, w^g\}$.

Если $s = 4, t = 16$, то $l = 14m$. Если $s = 8, t = 8$, то $l = 16m$, а если $s = 16, t = 4$, то $l = 17m$.

Пусть $s = 14$. Тогда $t = 2, 4$. Если $t = 4$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $56 \cdot 60$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(105 - 64) + 32t = 1440 \le 2\alpha_2(g)$ и $720 \le \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (1756 + 2\alpha_1(g))/32 - 4 = (412 + \alpha_1(g))/16$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l + 4$ и $l \in \{1, 2, ..., 7\}$.

В случае $t = 2$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $28 \cdot 62$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $0 \le \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 14 + \alpha_1(g) - 2)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 10$ и $l \in \{1, 2, ..., 28\}$.

Пусть $s = 12$. Тогда $t = 2, 4$. Если $t = 4$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $48 \cdot 60$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(90 - 64) + 32t = 960 \le 2\alpha_2(g)$ и $480 \le \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 24 + \alpha_1(g) - 8)/16 - 4 = (400 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 16$ и $l \in \{1, 2, ..., 15\}$.

В случае $t = 2$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $24 \cdot 62$, но не больше $2(16(64-t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $16(93 - 128 + 4) \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17{\cdot}12{+}\alpha_1(g){-}4)/16{-}4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l{-}8$ и $l \in \{1, 2, ..., 31\}$.

Пусть $s = 10$. Тогда $t = 2, 4, 6$. Если $t = 6$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $60{\cdot}58$, но не больше $2(16(64{-}t){-}\alpha_2(g)){+}4\alpha_2(g)$. Отсюда $8{\cdot}203 \leq 2\alpha_2(g)$ и $812 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17{\cdot}30{+}\alpha_1(g){-}18)/16{-}4 = (492{+}\alpha_1(g))/16{-}4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 12$ и $l \in \{1, 2, ..., 4\}$.

В случае $t = 4$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $40 \cdot 60$, но не больше $2(16(64-t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(75 - 64 + 4) = 480 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 20 + \alpha_1(g) - 12)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 8$ и $l \in \{1, 2, ..., 15\}$.

В случае $t = 2$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $20 \cdot 62$, но не больше $2(16(64-t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $8(155 - 256 + 8) \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17{\cdot}10{+}\alpha_1(g){-}6)/16{-}4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l{-}4$ и $l \in \{1, 2, ..., 31\}$.

Пусть $s = 8$. Тогда $t = 2, 4, 6$. Если $t = 6$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $48{\cdot}58$, но не больше $2(16(64{-}t){-}\alpha_2(g)){+}4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(87{-}64{+}6) \leq 2\alpha_2(g)$ и $464 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 24 + \alpha_1(g) - 24)/16 - 4 = (384 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l$ и $l \in \{1, 2, ..., 14\}$.

В случае $t = 4$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $32 \cdot 60$, но не больше $2(16(64-t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(60 - 64 + 4) = 0 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 16 + \alpha_1(g) - 16)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l$ и $l \in \{1, 2, ..., 30\}$.

В случае $t = 2$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $16 \cdot 62$, но не больше $2(16(64-t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(31 - 64 + 2) \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 8 + \alpha_1(g) - 8)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l$ и $l \in \{1, 2, ..., 31\}$.

Пусть $s = 6$. Тогда $t = 2, 4, 6, 8, 10$. Если $t = 10$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $60 \cdot 54$, но не больше $2(16(64-t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $8(405 - 256 + 40) \leq 2\alpha_2(g)$ и $756 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 30 + \alpha_1(g) - 50)/16 - 4 = (460 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 12$ и $640 + 32l - 12 + 756 \leq 1024$, противоречие.

В случае $t = 8$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $48 \cdot 56$, но не больше $2(16(64-t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(84 - 64 + 8) \leq 2\alpha_2(g)$ и $512 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 24 + \alpha_1(g) - 40)/16 - 4 = (368 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 16$ и $l \in \{1, 2, ..., 12\}$.

В случае $t = 6$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $36 \cdot 58$, но не больше $2(16(64-t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $8(261 - 256 + 24) \leq 2\alpha_2(g)$ и $116 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 18 + \alpha_1(g) - 30)/16 - 4 = (276 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 20$ и $l \in \{1, 2, ..., 26\}$.

В случае $t = 4$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $24 \cdot 60$, но не больше $2(16(64-t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(45 - 64 + 4) \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 12 + \alpha_1(g) - 20)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 24$ и $l \in \{1, 2, ..., 30\}$.

В случае $t = 2$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $12 \cdot 62$, но не больше $2(16(64-t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $8(93 - 256 + 8) \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17{\cdot}6{+}\alpha_1(g){-}10)/16{-}4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l{-}28$ и $l \in \{1, 2, ..., 31\}$.

Пусть $s = 4$. Тогда $t = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$. Положим $\{a, a', a''\} = F \cap \Omega$. Тогда для $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит a, не более двух вершин из $[a]$ и не более четырех вершин из $[a']$, $[a']$, поэтому $t - 1 \leq 11$.

В случае $t = 12$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $48 \cdot 52$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(78 - 64 + 12) \leq 2\alpha_2(g)$ и $416 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 24 + \alpha_1(g) - 72)/16 - 4 = (336 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 16$ и $l \in \{1, 2, ..., 13\}$.

В случае $t = 10$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $40 \cdot 54$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $16(135 - 128 + 20) \leq 2\alpha_2(g)$ и $64 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 20 + \alpha_1(g) - 60)/16 - 4 = (280 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 24$ и $l \in \{1, 2, ..., 25\}$.

В случае $t = 8$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $32 \cdot 56$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(56 - 64 + 8) \leq 2\alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 16 + \alpha_1(g) - 48)/16 - 4 = (224 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l$ и $l \in \{1, 2, ..., 28\}$.

В случае $t = 6$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $24 \cdot 58$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $16(87 - 128 + 12) \leq 2\alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 12 + \alpha_1(g) - 36)/16 - 4 = (180 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 20$ и $l \in \{1, 2, ..., 29\}$.

В случае $t = 4$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $16 \cdot 60$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(30 - 64 + 4) \leq 2\alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 8 + \alpha_1(g) - 24)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 16$ и $l \in \{1, 2, ..., 30\}$.

В случае $t = 2$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $8 \cdot 62$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $16(31 - 128 + 4) \leq 2\alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 4 + \alpha_1(g) - 12)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 24$ и $l \in \{1, 2, ..., 64\}$.

Пусть $s = 2$. Тогда $t = 2, 4, ..., 30$.

Положим $\{a, a^*\} = F \cap \Omega$. Тогда для $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит a, не более двух вершин из $[a]$ и не более четырех вершин из $[a]$, поэтому $t - 1 \leq 7$.

Если $t = 8$, то Ω является графом Тэйлора с массивом пересечений $\{7, 4, 1; 1, 4, 7\}$, противоречие.

В случае $t = 6$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $12 \cdot 58$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $8(87 - 128 + 24) \leq 2\alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 6 + \alpha_1(g) - 42)/16 - 4 = (60 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 28$ и $l \in \{1, 2, ..., 29\}$.

В случае $t = 4$ число $\chi_1(g) = (17 \cdot 4 + \alpha_1(g) - 28)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 8$ и $l \in \{1, 2, ..., 30\}$.

В случае $t = 2$ число $\chi_1(g) = (17 \cdot 2 + \alpha_1(g) - 14)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 20$ и $l \in \{1, 2, ..., 31\}$.

Лемма доказана. □

Из лемм 3–5 следует теорема. Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Лемма 7. *Пусть f — элемент порядка 7 из G, g — элементов простого порядка $p < 7$ из $C_G(f)$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) $p = 3$, либо Ω является 1-кликой, $|\mathrm{Fix}(f)| = 16$ и $\alpha_1(g) = 21(16m + 3)$, $m \leq 2$, либо Ω содержится в антиподальном классе, $|\mathrm{Fix}(f)| = 2$ и $|\Omega| = 16$ или $|\mathrm{Fix}(f)| = 9$ и $|\mathrm{Fix}(f) \cap \Omega| \in \{0, 3, 6, 9\}$, или $|\mathrm{Fix}(f)| = 16$ и $|\Omega| \in \{7, 16\}$, далее, $\alpha_1(g) = 48r + 24 - 9s$ делится на 7, $s = 7$, $r = 7m + 3$, или $s = 10$, $r = 7m + 4$, или $s = 13$, $r = 7m + 5$, или $s = 16$, $r = 7m + 6$;

(2) $p = 2$, либо Ω — пустой граф, $\alpha_3(g) = 16l$, $l-1$ делится на 7, $\alpha_1(g) = 10l + 32m$ делится на 7 и $m = 7n+1$, либо Ω содержит s вершин в 8 антиподальных

классах, $s = 8$, число $\alpha_2(g) = v - 16t$ делится на 7, $t \in \{1, 8, ..., 64\}$ или $s = 6$, $\alpha_1(g) = 32l - 16$ делится на 7 и $l \in \{4, 11\}$ или $s = 4$, $\alpha_1(g) = 32l$делится на 7 и $l \in \{7, 14, 21, 28\}$.

Доказательство. По теореме $\mathrm{Fix}(f)$ содержится в антиподальном классе, $|\mathrm{Fix}(f)| = 2, 9, 16$ и $\alpha_1(f) = 112l - 24 - 9s$.

Пусть g — элементов простого порядка $p < 7$ из $C_G(f)$, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если $p = 5$, то ввиду теоремы Ω является 4-кликой, попадающей в $\mathrm{Fix}(f)$, противоречие.

Если $p = 3$, то ввиду теоремы либо Ω является 1-кликой, либо Ω содержится в антиподальном классе, $|\Omega| = s = 4, 7, 10, 13, 16$, $\alpha_1(g) = 48r + 24 - 9s$, либо Ω содержит s вершин в t антиподальных классах. В первом случае $|\mathrm{Fix}(f)| = 16$ (так как 3 делит $|\mathrm{Fix}(f)|-1$), $\alpha_1(f) = 112l-24-9s$ делится на 3 и $\alpha_1(g) = 48r+15$ делится на 7, поэтому $r = 7m + 1$, $\alpha_1(g) = 21(16m + 3)$, $m \le 2$.

Во втором случае либо $|\mathrm{Fix}(f)| = 2$ и $|\Omega| = 16$ либо $|\mathrm{Fix}(f)| = 9$ и $|\mathrm{Fix}(f) \cap \Omega| \in \{0, 3, 6, 9\}$, либо $|\mathrm{Fix}(f)| = 16$ и $|\Omega| \in \{7, 16\}$. Так как $\alpha_1(g) = 48r + 24 - 9s$ делится на 7, то либо $s = 7$, $2r + 1$ делится на 7, либо $s = 10$, $6(8r - 11)$ делится на 7 и $r = 7m + 4$, либо $s = 13$, $48r - 93 = 3(16r - 31)$ делится на 7 и $r = 7m + 5$, либо $s = 16$, $48r - 120 = 24(2r - 5)$ делится на 7 и $r = 7m + 6$.

Пусть Ω содержит s вершин в t антиподальных классах, $s, t > 1$. Тогда $t - 1$ делится на 7, поэтому $s = t = 8$ и противоречие с теоремой 1.

Пусть $p = 2$. Как и выше, Ω не является n-кликой. Ввиду теоремы либо Ω — пустой граф, $\alpha_3(g) = 16l$, $\alpha_1(g) = 10l + 32m$ и $\alpha_2(g) = 1024 - 26l - 32m$, либо Ω содержит s вершин в t антиподальных классах, $s, t > 1$. В первом случае $|\mathrm{Fix}(f)| \in \{2, 16\}$ (так как 2 делит $|\mathrm{Fix}(f)|$), $\alpha_3(g) = 16l$ и $l - 1$ делится на 7. Далее, $\alpha_1(g) = 10l + 32m$ делится на 7, $32m + 10$ делится на 7 и $m = 7n + 1$.

Пусть Ω содержит s вершин в t антиподальных классах, $s, t > 1$. Тогда числа $t-1$ и $v-16t = 16(64-t)$ делятся на 7. Ввиду леммы 5 имеем $t = 8$ и $s \in \{4, 6, 8\}$. Отсюда $\mathrm{Fix}(f)$ содержит s вершин из Ω и $|\mathrm{Fix}(f)| = 16$.

В случае $s = 8$ число $\alpha_2(g) = v - 16t$ делится на 7.

В случае $s = 6$ по лемме 5 имеем $\alpha_1(g) = 32l - 16$ делится на 7 и $l \in \{4, 11\}$

В случае $s = 4$ по лемме 5 имеем $\alpha_1(g) = 32l$ делится на 7 и $l \in \{7, 14, 21, 28\}$. □

Приступим к доказательству следствия. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$ и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин. Пусть F — антиподальный класс графа Γ, содержащий вершину a. Тогда $|G : G_a| = 1024$ и $|G : G_{\{F\}}| = 64$.

Допустим, что G — неразрешимая группа. Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$, $Q = O_2(G)$, Σ — множество отличных от F антиподальных классов и f — элемент порядка 7 из G.

Лемма 8. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *$\bar{T}$ — простая неабелева группа, изоморфная A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, $PSp_4(3)$, $L_2(7)$, $L_2(8)$, $U_3(3)$, $L_3(4)$, $U_4(3)$, $Sp_6(2)$;*

(2) *либо $\bar{T}$ стабилизирует F и $\bar{T} \cong L_2(7), U_3(3)$, в случае $\bar{T} \cong L_2(7)$ имеем $|F^Q| = 64$, либо $\bar{T} \cong A_8$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong A_7$ – подгруппа индекса 8 из $\bar{T}$, либо $\bar{T}$ не стабилизирует F, $\bar{T} \cong L_2(7)$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong Z_7.Z_3$ – подгруппа индекса 8 из $\bar{T}$;*

(3) *если $\bar{T}$ стабилизирует F и $\bar{T} \cong L_2(7)$, то $S(G) = Q$, длины $\bar{T}$-орбит на F равны $(8, 8)$, $|Q_{\{F\}} : Q_a| = 2$, $C_Q(f) \cap Q_{\{F\}} = \langle g \rangle$, $[Q_{\{F\}}, f] = Q_a$, подграф*

Ω является пустым, $\alpha_3(g) = 128$, $\alpha_1(g) = 112(1 + 2n)$, $n \leq 3$, g фиксирует точно 8 антиподальных классов и $|Q_{\{F\}}| \in \{2^4, 2^7\}$;

(4) если $\bar{T}$ стабилизирует F и $\bar{T} \cong U_3(3)$, то Γ является реберно симметричным графом, группа G является расширением элементарной абелевой 2-группы Q порядка 2^{10} с помощью $G_2(2)$ и Q содержит подгруппу K порядка 2^4, регулярную на каждом антиподальном классе.

Доказательство. Ввиду теоремы $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$, 25 и 49 не делят $|G|$, а по лемме 6 в G нет элементов порядка 35. Отсюда $\bar{T}$ — простая неабелева группа.

Ввиду [10, таблица 1] группа $\bar{T}$ изоморфна A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, $PSp_4(3)$, $L_2(7)$, $L_2(8)$, $U_3(3)$, $L_3(4)$, $U_4(3)$, $Sp_6(2)$.

Так как $|\bar{T} : \bar{T}_{\{F\}}|$ делит 64, то либо $\bar{T}$ стабилизирует F, либо $\bar{T} \cong A_8$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong A_7$, либо $\bar{T} \cong L_2(7)$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong Z_7.Z_3$.

Если $\bar{T}$ стабилизирует F, то ввиду теоремы, 5 не делит $|\bar{T}|$ и $\bar{T} \cong L_2(7), L_2(8), U_3(3)$. В случае $\bar{T} \cong L_2(7)$ длины $\bar{T}$-орбит на F равны 1, 7 или 8, длины $\bar{T}$-орбит на множестве Σ равны 7. В этом случае для элемента f порядка 3 из полного прообраза группы $\bar{T}$ имеем $t = 10$ и $s = 4$, поэтому длины $\bar{T}$-орбит на F равны (1,1,7,7), (1,7,8) или (8,8). Из транзитивности действия G на множестве вершин графа следует, что длины $\bar{T}$-орбит на F равны (8,8).

Далее, длины $\bar{T}$-орбит на множестве Σ либо все равны 7, либо все равны 21. С другой стороны, группа $\bar{T}$ действует на множестве F^Q и $|F^Q| = 2^n$, где $2^n - 1$ совпадает с суммой чисел, равных 7 или 21. Отсюда $2^n = 8$ или $2^n = 64$. Так как $|\bar{G} : \bar{T}| \leq 2$, то $2^n = 64$. Допустим, что $Q_{\{F\}} = 1$. Тогда $S(G) = Q$, $\bar{G} \cong PGL_2(7)$ и элемент из $G - G'$ переставляет неприводимые $F_2L_2(7)$-модули порядка 2^3. Компьютерные вычисления в GAP показывают, что граф не существует.

Пусть $Q_{\{F\}} \neq 1$. Тогда $Q_{\{F\}}$ фиксирует еще один антиподальный класс E, причем $|\{E^{f^i} \mid i \in \{0, 1, ..., 6\}| = 7$ и любая инволюция из $Q_{\{F\}}$ фиксирует не менее 8 антиподальных классов. Ввиду теоремы инволюция g из $Q_{\{F\}}$ фиксирует либо не более 16 антиподальных классов, либо каждый антиподальный класс. В последнем случае $\alpha_3(g) = 1024$, граф Γ' на множестве $\langle g \rangle$-орбит является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{63, (r' - 1)\mu', 1; 1, \mu', 63\}$, где $r' = 8$, $2 \leq \lambda' \leq 4$ и $4 \leq \mu' \leq 8$. Противоречие с тем, что $\lambda' = 62 - 7\mu'$.

Так как длины $\bar{T}$-орбит на F равны (8,8), то либо $|Q_{\{F\}} : Q_a| = 1$ и $\bar{G} \cong PGL_2(7)$, либо $|Q_{\{F\}} : Q_a| = 2$. В первом случае $Q_{\{F\}}$ фиксирует каждую вершину из F и по теореме любая инволюция из $Q_{\{F\}}$ фиксирует ровно 4 антиподальных класса, противоречие с утверждением из предыдущего абзаца. Во втором случае элемент $g \in Q_{\{F\}} - Q_a$ переставляет указанные $\bar{T}$-орбиты на F, и можно выбрать элемент g, централизующий f. По лемме 6 подграф Ω является пустым, $\alpha_3(g) = 16l$, $l - 1$ делится на 7, $\alpha_1(g) = 10l + 32(7n + 1)$. С другой стороны, $l \in \{8, 16\}$, поэтому $l = 8$, $\alpha_3(g) = 128$, $\alpha_1(g) = 112(1 + 2n)$, $n \leq 3$.

Далее, $Q_{\{F\}} = [Q_{\{F\}}, f] \times (C_Q(f) \cap Q_{\{F\}})$, подгруппа $C_Q(f) \cap Q_{\{F\}}$ действует на множестве из восьми $\langle f \rangle$-орбит на $\Sigma - (F \cup \{E^{f^i} \mid i \in \{0, 1, ..., 6\})$. Если инволюция $y \in C_Q(f) \cap Q_{\{F\}}$ фиксирует одну из этих орбит, то она фиксирует антиподальный класс из этой орбиты и еще одну орбиту, противоречие с тем, что y фиксирует не более 16 антиподальных классов. Таким образом, $C_Q(f) \cap Q_{\{F\}}$ состоит из инволюций y, фиксирующих ровно 8 антиподальных классов. Но тогда по теореме y фиксирует e вершин из F, $e \in \{0, 4, 6, 8\}$. Из действия f

на $\mathrm{Fix}(y)\cap F$ следует, что $e=0$. Так как $|Q_{\{F\}}:Q_a|=2$, то $C_Q(f)\cap Q_{\{F\}}=\langle g\rangle$, $[Q_{\{F\}},f]=Q_a$.

Если $|Q_a|=1$, то $Q_{\{F\}}=Q_{\{E\}}=\langle g\rangle$. Противоречие с тем, что $8=|g^Q|=|Q_{\{F\}}^Q|=64$. Если же $|Q_a|>8$, то $|Q_a|=64$, $S(G)=Q$, и для антиподального класса N_j, не попавшего в $F\cup\{E^{f^i}\mid i\in\{0,1,...,6\}$, получим $Q_{\{F\}}\cap Q_{\{N_j\}}=\langle y_j\rangle$, $y_j=gz_j$, $z_j\in Q_a$, y_j фиксирует 16 антиподальных классов, $j\in\{0,1,...,6\}$.

В случае $\bar{T}\cong L_2(8)$ длины $\bar{T}$-орбит на F равны 1 или 9, длины $\bar{T}$-орбит на множестве Σ равны 28 со стабилизатором точки, изоморфным диэдральной группе порядка 18, противоречие с тем, что 63 не делится на 18.

В случае $\bar{T}\cong U_3(3)$ длины $\bar{T}$-орбит на F равны 1. Далее, длины $\bar{T}$-орбит на множестваe антиподальных классов, отличных от F, равны 28, 36 или 63 со стабилизатором точки, изоморфным расширению неабелевой группы порядка 27 с помощью Z_8, $L_2(7)$ или группе порядка 96. Отсюда $\bar{T}$ действует транзитивно на множестваe Σ и G действует дважды транзитивно на на множестваe антиподальных классов. По [11, теорема] граф существует, группа G является расширением элементарной абелевой 2-группы Q порядка 2^{10} с помощью $G_2(2)$ и Q содержит подгруппу K порядка 2^4, регулярную на каждом антиподальном классе. Лемма доказана. □

Лемма 9. *Если $\bar{T}$ не стабилизирует F, то $\bar{T}\cong L_2(7)$, $\bar{T}_{\{F\}}\cong Z_7.Z_3$ – подгруппа индекса 8 из $\bar{T}$, $|F^Q|=8$, $S(G)=Q$ и Q является неприводимым $F_2L_2(7)$-модулем порядка 2^8.*

Доказательство. Допустим сначала, что $\bar{T}\cong A_8$ и $\bar{T}_{\{F\}}\cong A_7$. Тогда длины $\bar{T}_{\{F\}}$-орбит на множестве Σ отличных от F антиподальных классов либо все равны 7, либо все равны 42 (последний случай не возникает). С другой стороны, группа $\bar{T}$ действует на множестве F^Q и $|F^Q|=2^n$, где 2^n-1 совпадает с суммой чисел, равных 7, поэтому $2^n=64$. Далее, элемент f порядка 5 из полного прообраза группы $\bar{T}_{\{F\}}$ фиксирует точно 4 вершины из Γ, три из которых попадают в $\cup_{g\in\bar{T}}F^g$, противоречие.

Допустим, что $\bar{T}\cong L_2(7)$, $\bar{T}_{\{F\}}\cong Z_7.Z_3$ – подгруппа индекса 8 из $\bar{T}$. Тогда длины $\bar{T}_{\{F\}}$-орбит на множестве Σ отличных от F антиподальных классов равны 7 или 21. С другой стороны, группа $\bar{T}$ действует на множестве F^Q и $|F^Q|=2^n$, где 2^n-1 совпадает с суммой чисел, равных 7 или 21. Отсюда $2^n=8$, подгруппа $Q_{\{F\}}$ нормальна в Q и $Q/Q_{\{F\}}$ — элементарная абелева группа порядка 8. Отсюда подгруппа Фраттини $\Phi(Q)$ фиксирует каждый антиподальный класс и ввиду теоремы $\Phi(Q)=1$.

Далее, $Q_{\{F\}}$ фиксирует еще один антиподальный класс E, причем $|\{E^{f^i}\mid i\in\{0,1,...,6\}|=7$. Пусть N — антиподальный класс, не лежащий в $F\cup\{E^{f^i}\mid i\in\{0,1,...,6\}$. Ввиду теоремы $Q_{\{F\}}\cap Q_{\{N\}}$ фиксирует точно 16 антиподальных классов и $|Q:Q_{\{F\}}\cap Q_{\{N\}}|=64$. Пусть M — антиподальный класс, не лежащий среди указанных 16 антиподальных классов. Тогда $Q_{\{M\}}$ не пересекает $Q_{\{F\}}\cap Q_{\{N\}}$ и $|Q|\leq 2^9$. Таким образом, либо Q является неприводимым $F_2L_2(7)$-модулем порядка 2^8, либо $|Q|=2^9$ и каждый главный фактор группы G, лежащий в Q, имеет порядок 8. Отсюда, в частности, $S(G)=Q$.

Пусть Q_0 — нормальная в G подгруппа порядка 8. Тогда Q_0 содержится в $Q_{\{F\}}$ или не пересекает $Q_{\{F\}}$. Но в первом случае любая инволюция из Q_0 фиксирует каждый антиподальный класс, противоречие с теоремой. Во втором случае Q_0 действует транзитивно на множестве восьмерок антиподальных классов $\{\Sigma_0, \Sigma_1, ..., \Sigma_7\}$, имеющих одинаковые стабилизаторы в Q. Отсюда $G = Q_0 \cdot G_{\Sigma_0}$ и G_{Σ_0} накрывает $\bar{T}$, в частности, подгруппа $Q_{\{F\}}$ является $\bar{T}$-допустимой. Противоречие с тем, что тогда $\bar{T}$ стабилизирует некоторый антиподальный класс из $\{E^{f^i} \mid i \in \{0, 1, ..., 6\}$. Лемма доказана. □

Компьютерные вычисления в GAP показывают, что граф из заключения леммы 8 не существует. Из лемм 7, 8 получаем следствие.

Авторы благодарны Д.В. Падучих за помощь в компьютерных вычислениях с помощью GAP.

References

[1] A.A. Makhnev, M.S Nirova, *On distance-regular graphs with* $\lambda = 2$, Jornal of Siberian Federal Univ., **7**:2 (2014), 188–194.

[2] A.A. Makhnev, L.Yu. Tsiovkina, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{42, 39, 1; 1, 3, 42\}$, Doklady Akademii nauk, **441**:3 (2011), 305–309. MR2953997

[3] L.Yu. Tsiovkina, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **10** (2013), 689—698. MR3262317

[4] V.P. Burichenko, A.A. Makhnev, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{15, 12, 1; 1, 4, 15\}$, Doklady Akademii nauk, **460**:3 (2015), 255–259. MR3410052

[5] A.A. Makhnev, V. I. Belousova, *Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 130–136. MR3506866

[6] A.A. Makhnev, N.V. Chuksina, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 802–809. MR3493745

[7] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Berlin: Springer-Verlag, 1989. MR1002568

[8] P.J. Cameron, *Permutation Groups*, London Math Soc. Student Texts **45**, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. MR1721031

[9] A.L. Gavrilyuk, A.A. Makhnev, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, Doklady Akademii nauk, **432**:5 (2010), 583–587. MR2766516

[10] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **6** (2009), 1–12. MR2586673

[11] A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh, L.Yu. Tsiovkina, *Edge-symmetric distance-regular coverings of cliques: The affine case*, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, **54**:6 (2013), 1353—1367. MR3184100

Alexander Alekseevich Makhnev
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S.Kovalevskaya Str.
620990, Yekaterinburg, Russia,
Ural Federal University
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru

Michail Petrovich Golubyathikov
620990, Yekaterinburg, Russia,
Ural Federal University
E-mail address: mike_ru1@mail.ru