С. В. Пчелинцев, Относительно свободные ассоциативные Ли нильпотентные алгебры ранга 3, *Сиб. электрон. матем. изв.*, 2019, том 16, 1937–1946

DOI: 10.33048/semi.2019.16.139

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1937–1946 (2019) УДК 512.552.4, 512.572
DOI 10.33048/semi.2019.16.139 MSC 16R10, 17A50

ОТНОСИТЕЛЬНО СВОБОДНЫЕ АССОЦИАТИВНЫЕ ЛИ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ АЛГЕБРЫ РАНГА 3

С.В. ПЧЕЛИНЦЕВ

Abstract. Let Φ be an arbitrary unital associative and commutative ring. The relatively free Lie nilpotent algebras with three generators over Φ are studied. The product theorem is proved: $T^{(n)}T^{(m)} \subseteq T^{(n+m-1)}$, where $T^{(n)}$ is a verbal ideal generated by the commutators of degree n. The identities of three variables that are satisfied in a free associative Lie nilpotent algebra of degree $n \geq 3$ are described. It is proved that the additive structure of the considered algebra is a free module over the ring Φ.

Keywords: associative Lie nilpotent algebra, identity in three variables, torsion of a free ring.

1. Введение

Пусть Φ — произвольное ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Всюду ниже, если не оговорено противное, рассматриваются только *ассоциативные* унитальные Φ-алгебры. Введем следующие обозначения:

$F_\omega = F_\omega(\Phi)$ — свободная Φ-алгебра над счетным множеством

$$X_\omega = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

свободных порождающих; F_r – подалгебра в F_ω, порожденная множеством $X_r = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$, – *алгебра ранга* $r \in \mathbb{N}$;

$[x_1, \ldots, x_n]$ — правонормированный коммутатор степени $n \geq 2$, т.е. $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ и по индукции $[x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$;

$\mathrm{LN}(n) : [x_1, \ldots, x_n] = 0$ — *тождество Ли нильпотентности степени* n;

Pchelintsev, S.V., Relatively free associative Lie nilpotent algebras of rank 3.

Работа поддержана РНФ (проект №14-21-00065).
Поступила 26 мая 2019 г., опубликована 18 декабря 2019 г.

$T^{(n)}$ и V_n — T-идеал и T-пространство соответственно, порожденные коммутатором $[x_1, \ldots, x_n]$ степени n; $F_\nu^{(n)} = F_\nu / T^{(n)}(F_\nu)$ — относительно свободная алгебра ранга ν с тождеством $\mathrm{LN}(n)$;

$Z(A)$ — центр A; $Z^*(A)$ — ядро A (наибольший идеал A, содержащийся в центре).

Алгебра называется *Ли нильпотентной индекса* n, если она удовлетворяет тождеству $\mathrm{LN}(n)$, но в ней не выполнено тождество $\mathrm{LN}(n-1)$.

Напомним, что многочлен $f \in F_\omega$ называется *собственным*, если он содержится в подалгебре, порожденной коммутаторами вида $[x_1, x_2, \ldots, x_m]$, где $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$ и $m \geq 2$.

Впервые Ли нильпотентеные алгебры появились в 1947 г. в работе [1]. В работах [2], [3], [4] и [5], [6] были построены аддитивные базисы алгебр $F_\omega^{(n)}(\Phi)$ для $n = 3$ и $n = 4$ соответственно при условии, что Φ — поле характеристики отличной от 2 и 3.

В [7] были описаны собственные центральные многочлены от 2-х переменных алгебр $F_3^{(5)}(\Phi)$ и $F_3^{(6)}(\Phi)$ ($\mathrm{char}(\Phi) \neq 2, 3$); а в [8] – собственные центральные многочлены алгебр $F_\omega^{(5)}(\Phi)$ и $F_\omega^{(6)}(\Phi)$ ($\mathrm{char}(\Phi) = 0$). Оказалось, что центр алгебры $F_\omega^{(5)}(\Phi)$ содержится в T-идеале, порожденном коммутатором степени 4. Задача описания центров алгебр $F_\omega^{(5)}(\Phi)$ и $F_\omega^{(6)}(\Phi)$ в полном объеме пока остается открытой.

Определим в алгебре A убывающий ряд идеалов, считая, что $A_{(2)} = A^{(2)}$ и по индукции $A_{(n+1)} = [A_{(n)}, A]A$. Напомним, что алгебра A называется *сильно Ли нильпотентной индекса* n, если $A_{(n)} = 0$, $A_{(n-1)} \neq 0$. Сильно (strong) Ли нильпотентные алгебры изучались, например, в работах [9] и [10]. Легко понять, что для конечно порожденных алгебр понятия Ли нильпотентности и сильной Ли нильпотентности эквивалентны. Несомненный интерес представляет вопрос о вычислении значения индекса $\chi(n, r)$ строгой Ли нильпотентности алгебры $F_r^{(n)}$. Очевидно, что $\chi(n, r) \geq n$.

В данной заметке изучается алгебра $F_3^{(n)}(\Phi)$ ранга 3 с тождеством $\mathrm{LN}(n)$ Ли нильпотентности произвольной степени $n \geq 3$. При этом никаких ограничений на характеристику кольца Φ не налагается.

Работа состоит из пяти разделов. В разделе 2 доказывается ряд предварительных лемм, на основании которых получаются основные результаты.

В 1965 г. В.Н. Латышев [3] доказал справедливость включения

$$T^{(m)} \cdot T^{(n)} \subseteq T^{(m+n-2)}.$$

Независимо от работы [3] этот факт передоказали Гупта и Левин в 1983 г. (см. [11]). В 1978 г. И.Б. Воличенко [5] доказал включение

$$T^{(m)} \cdot T^{(n)} \subseteq T^{(m+n-1)}$$

при условии, что одно из чисел m или n равно 3. Начиная с 1990 г. указанное включение при условии, что одно из чисел m, n нечетно, передоказывалось при некоторых ограничениях на характеристику (см. [12], [13], [7]). Наиболее общий результат в этом направлении получен недавно в [14]. В работе [7] это утверждение называлось *теоремой о произведении* $T^{(m)}T^{(n)}$.

В разделе 3 доказана теорема 1 о произведении $T^{(m)}T^{(n)}$ для ассоциативной алгебры $F = F_3$ от трех порождающих:

$$T^{(m)}(F){\cdot}T^{(n)}(F) \subseteq T^{(m+n-1)}(F).$$

Ограничение на ранг является существенным, поскольку

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \notin T^{(3)}.$$

В частности, доказано, что $\chi(n, 3) = n$.

В разделе 4 получено описание тождеств от трех переменных алгебры $F_3^{(n)}$ (см. теорему 2). Кроме того, в ходе доказательства этой теоремы указан аддитивный базис алгебры $F_3^{(n)}$, который получается факторизацией базиса Пуанкаре-Бирхгофа-Витта свободной алгебры F по идеалу $T^{(n)}$.

Отметим, что в работах [15] и [16] изучались аддитивные группы колец $F_\omega^{(3)}(\mathbb{Z})$ и $F_\omega^{(4)}(\mathbb{Z})$ соответственно; было доказано, что аддитивная группа кольца $F_\omega^{(3)}(\mathbb{Z})$ свободна, а в аддитивной группе кольца $F_\omega^{(4)}(\mathbb{Z})$ была указана подгруппа, состоящая из элементов порядка 3, фактор по которой является свободной. В разделе 5 приведена теорема 3, утверждающая, что аддитивный модуль алгебры $F_3^{(n)}(\Phi)$ ранга 3 является свободным, в частности, аддитивная группа кольца $F_3^{(n)}(\mathbb{Z})$ — свободная абелева группа.

Результаты этой работы в случае $\frac{1}{6} \in \Phi$ были доказаны автором в [17]. В случае $\frac{1}{2} \in \Phi$ теорема 1 независимо доказана А.М. Кузьминым.

На завершающем этапе подготовки статьи к печати мы обнаружили работу [18], в которой были доказаны теоремы 1 и 2 для алгебры $F_2^{(n)}(\Phi)$ при условии $\mathrm{char}(\Phi) = 0$. Кроме того, в [18] была высказана гипотеза под номером 4.1 о справедливости этих теорем для алгебры $F_3^{(n)}(\Phi)$.

2. Вспомогательные леммы

Все результаты статьи относятся к алгебре $F = F_3$, даже если это специально не отмечено. Далее, если не оговорено противное, то всюду ниже

$$x, y, z \in X = \{x_1, x_2, x_3\} \text{ и } a, b, c \in F.$$

Иногда без дополнительных пояснений применяются тождества:

$$[xy, z] + [yz, x] + [zx, y] = 0, \tag{1}$$

$$[x, y, z] + [y, z, x] + [z, x, y] = 0, \tag{2}$$

$$[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y. \tag{3}$$

Второе тождество называется *тождеством Якоби*; третье тождество означает, что отображение $D_z : x \mapsto [x, z]$ является дифференцированием алгебры F.

Следующая лемма принадлежит В.Н. Латышеву [2]. Для полноты изложения приведем ее доказательство.

Лемма 1. *Если $a, b \in F$, то $[V_n, a][a, b] \subseteq T^{(n+2)}$.*

Доказательство. Если $v \in V_n$, то по модулю $T^{(n+2)}$ имеем в силу (2) и (3)

$$[v, [a, b]] = [v, a, b] - [v, b, a] \equiv 0,$$

$$[v, a][a, b] \equiv [v, a[a, b]] = [v, [a, ab]] \equiv 0,$$

что и требовалось. □

Обозначим через P и Q модули над кольцом Φ, порожденные соответственно элементами $[x,y,z]$ и $[a,b][a,c]$, где $x,y,z\in X$, $a,b,c\in F$. Заметим, что Φ-модуль P конечно порожден, а Φ-модуль Q бесконечно порожден.

Лемма 2. *Верно включение* $[V_n,Q]\subseteq T^{(n+3)}$.

Доказательство. Пусть $v\in V_n,\ a,b,c\in F$. Сравнения в этой лемме понимаются по модулю $T^{(n+3)}$. Заметим, что в силу леммы 1 верно

$$[v,[a,c]]\cdot[a,b]=([v,a,c]-[v,c,a])\cdot[a,b]\equiv[v,a,c]\cdot[a,b]. \tag{4}$$

Следовательно, на основании сравнения (4) и леммы 1

$$[v,[a,b]\cdot[a,c]]=[a,b]\cdot[v,[a,c]]+[v,[a,b]]\cdot[a,c]\equiv$$

$$\equiv[v,[a,c]]\cdot[a,b]+[v,[a,b]]\cdot[a,c]\equiv[v,a,c,][a,b]+[v,a,b][a,c].$$

Выражение $[v,a,c,][a,b]+[v,a,b][a,c]$ является линеаризацией по переменной b элемента $[w,b,][a,b]$, где $w=[v,a]\in V_{n+1}$. По лемме 1:

$$[w,b,][a,b]\in[V_{n+1},b,][a,b]\subseteq T^{(n+3)},$$

что и требовалось. □

Лемма 3. *Верно включение* $XP\subseteq V_3+Q$.

Доказательство. Пусть $x,y,z\in X$. Тогда по модулю V_3+Q имеем

$$x\cdot[x,y,z]=[x\cdot[x,y],z]-[x,z]\cdot[x,y]\equiv[x\cdot[x,y],z]=[[x,xy],z]\equiv0,$$

т.е. $x\cdot[x,y,z]\in V_3+Q$. В силу равноправия x и y, получаем $y\cdot[x,y,z]\in V_3+Q$. Далее, в силу тождества Якоби (2)

$$z\cdot[x,y,z]=z\{[x,z,y]+[x,[y,z]]\}=-z[z,x,y]+z[z,y,x]\in V_3+Q,$$

Наконец, по модулю V_3+Q имеем $z\cdot[x,y,y]\equiv-y\cdot[x,y,z]\equiv0$. Значит, $XP\subseteq V_3+Q$, что завершает доказательство леммы. □

Лемма 4. *Верно включение* $T^{(n+1)}P\subseteq T^{(n+3)}$.

Доказательство. Поскольку $[V_n,F]=F[V_n,X]$ в силу (3), то достаточно понять, что $[V_n,X]P\subseteq T^{(s+3)}$. В силу лемм 2 и 3 имеем

$$[V_n,X]P=[V_n,XP]-X[V_n,P]\subseteq[V_n,V_3+Q]+FV_{n+3}\subseteq T^{(s+3)}.$$

Значит, $V_{n+1}\cdot P\subseteq T^{(n+3)}$. □

Лемма 5. *Для любых* $a,b,c\in F$ *верно, что* $b[a,b][a,c]\in Q$.

Доказательство. Заметим, что пространство Q замкнуто относительно линеаризаций, т.е. $[a,b][a',c]+[a',b][a,c]\in Q$ для любых $a,a',b,c\in F$. Тогда по модулю Q имеем в силу (1)

$$b[a,b][a,c]=[ba,b][a,c]\equiv-[a,b][ba,c]=[a,b]([ac,b]+[cb,a])\equiv0.$$

Лемма доказана. □

Лемма 6. *Верно включение* $T^{(n+1)}Q\subseteq T^{(n+3)}$.

Доказательство. Проверим сначала, что $[V_n, F]\cdot[x,y][x,z] \subseteq T^{(n+3)}$ для любых $x,y,z \in X$. Достаточно доказать, что $[V_n,t]\cdot[x,y][x,z] \subseteq T^{(n+3)}$ для любых $x,y,z,t \in X$. Из лемм 2 и 5 вытекает требуемое включение при $t \in \{x,y\}$. Если же $t = z$, то достаточно понять, что $T^{(n+1)} \cdot [[x,y],[x,z]] \subseteq T^{(n+3)}$, если $x,y,z \in X$. Учитывая лемму 4: $T^{(n+1)} \cdot P \subseteq T^{(n+3)}$, имеем

$$T^{(n+1)} \cdot [[x,y],[x,z]] \subseteq T^{(n+1)} \cdot [P,X] \subseteq T^{(n+1)}PX + T^{(n+1)}XP \subseteq$$

$$\subseteq T^{(n+1)}PX + T^{(n+1)}P \subseteq T^{(n+3)}.$$

Итак, доказано включение $T^{(n+1)}\cdot[x,y][x,z] \subseteq T^{(n+3)}$, если $x,y,z \in X$. Проводя подходящие линеаризации, получаем $T^{(n+1)}\cdot[a,b][a,b] \subseteq T^{(n+3)}$, где $a,b,c \in F$. Значит, $T^{(n+1)}Q \subseteq T^{(n+3)}$. □

Следующая лемма принадлежит В.Н. Латышеву [2]. Ее доказательство приводится лишь для полноты изложения.

Лемма 7. *В алгебре F идеал $T^{(3)}$ порождается элементами вида*

$$[x,y,z],\quad [x,y][x,z], \text{ где } x,y,z \in X. \tag{5}$$

Кроме того, $F'^2 \subseteq T^{(3)}$, где $F' = T^{(2)}$ — коммутант алгебры F.

Доказательство. Известно и легко понять, что $T^{(2)}$ (коммутант) как идеал порождается элементами $[x,y]$, где $x,y \in X$. Заметим, что идеал $T^{(3)}$ порождается элементами $[a,x,y]$, где $a \in F, x,y \in X$. Поскольку

$$[bc,x,y] = b[c,x,y] + [b,x,y]c + [b,x][c,y] + [b,y][c,x], \tag{6}$$

то достаточно проверить, что элементы $[a,x,y]$ и $[b,x][c,y]$ содержатся в идеале, порожденном элементами вида (5). Индукцией по степени этих элементов, легко понять, что это утверждение верно. □

Следующая лемма впервые была доказана И.Б. Воличенко [5] для произвольной ассоциативной алгебры над кольцом Φ, содержащим $\frac{1}{6}$. Для алгебры ранга 3 она справедлива без ограничений на кольцо скаляров Φ.

Лемма 8. *В алгебре F верно включение $T^{(n)}T^{(3)}+T^{(3)}T^{(n)} \subseteq T^{(n+2)}$ для $n \geq 2$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно понять, что $V_nT^{(3)} = 0$ в алгебре $A = F^{(n+2)}$. Используя лемму 7, преобразуем выражение

$$V_nT^{(3)} = \sum [V_{n-1}, A]AwA,$$

где элементы w имеют вид (5),

$$\subseteq \sum [V_{n-1}, X]AwA = \sum A[V_{n-1}, X]wA = 0,$$

поскольку $[V_{n-1}, X]w = 0$ в силу лемм 4 и 6. □

Следующая лемма доказана в [7] (см. лемму 2) при условии $\frac{1}{6} \in \Phi$. Однако для алгебры ранга 3 она справедлива в любой характеристике.

Лемма 9. *В алгебре F верно $T^{(n)}D_aD_b \subseteq T^{(n+2)}$.*

Доказательство. Пусть $v \in V_n, a, b, c \in A$. В силу тождества (6) верно

$$[vc, a, b] = v[c, a, b] + [v, a, b]c + \{[v, a][c, b] + [v, b][c, a]\}.$$

Покажем, что каждое слагаемое лежит в $T^{(n+2)}$. Для первого слагаемого имеем $v[c, a, b] \in V_n T^{(3)} \subseteq T^{(n+2)}$ в силу леммы 8. Второе слагаемое $[v, a, b]c \in T^{(n+2)}$, поскольку $[v, a, b] \in V_{n+2}$. Наконец, третье $\{[v, a][c, b] + [v, b][c, a]\}$ является линеаризацией $[v, a][c, a]$ и по лемме 1 содержится в $T^{(n+2)}$. □

3. Теорема о произведении коммутаторов

Теперь мы можем доказать теорему о произведении коммутаторов.

Теорема 1. *В свободной ассоциативной алгебре $F = F_3$ ранга 3*

$$T^{(n)}T^{(m)} \subseteq T^{(n+m-1)}.$$

Доказательство. Без ограничения общности, достаточно понять, что $V_n V_m \subseteq T^{(n+m-1)}$. Проведем индукцию по m.

Основание индукции $m = 2$. Мы должны доказать, что $V_n V_2 = 0$ в алгебре A, порожденной множеством X из трех элементов, в которой $T^{(n+1)}(A) = 0$.

Докажем индукцией по n, что $V_n[x, y] = 0$ для любых $x, y \in A$. Основание индукции при $n = 2$ верно в силу леммы 7.

Пусть $n \geq 3$. Возьмем произвольный элемент $v \in V_{n-2}$ и рассмотрим произведение $w = [v, a, b][x, y]$, где $a, b, x, y \in A$. В силу (6) и индуктивного предположения имеем

$$v[[x, y], a, b] + [v, a, b][x, y] = [v[x, y], a, b] - \{[v, a][[x, y], b] + [v, b][[x, y], a]\} \in$$

$$[V_{n-2}[x, y], a, b] + [V_{n-2}, A]V_3 \subseteq [T^{(n-1)}, a, b] + T^{(n-1)}T^{(3)} \subseteq T^{(n+1)} = 0$$

ввиду лемм 8 и 9. Итак, для любых $a, b, x, y \in A$

$$v[x, y, a, b] + [v, a, b][x, y] = 0 \qquad (7).$$

Полагая в (7) $b = x$ и применяя лемму 1 $[v, a, x][x, y] \in [V_{n-1}, x][x, y] = 0$, получаем

$$v[x, y, a, x] = 0. \qquad (8)$$

Это означает, что в алгебре A элемент $v[x, y, a, b]$ кососимметричен по переменным x, y, b. Поскольку в силу (8)

$$v[x, y, b, b] = v\{[x, b, y, b] + [x, [y, b], b]\} = v[b, y, x, b] = 0,$$

то элемент $v[x, y, a, b]$ кососимметричен по переменным x, y, a, b. Замечая, что $b \mapsto v[x, y, a, b]$ является дифференцированием в алгебре A, получаем, что без ограничения общности, можно считать, что $x, y, a, b \in X$. Поскольку множество порождающих X состоит из трех элементов, то среди $x, y, a, b \in X$ должны быть два одинаковых и тогда $v[x, y, a, b] = 0$. Тогда из (7) получаем $[v, a, b][x, y] = 0$ для любых $v \in V_{n-2}, a, b, x, y \in A$, т.е. $V_n[x, y] = 0$. Тем самым, доказано включение $V_n T^{(2)} \subseteq T^{(n+1)}$. Переходя от алгебры A к антиизоморфной, получаем $T^{(2)}V_n \subseteq T^{(n+1)}$.

Докажем, что $V_n V_m \subseteq T^{(n+m-1)}$ для всех $n, m \geq 2$. Проведем индукцию по $n + m$. Основание индукции при $n + m = 4$, т.е. $n = m = 2$, верно в силу включения $V_2V_2 \subseteq T^{(3)}$. Сделав предположение индукции и предположив, что $n, m \geq 3$ (случай: одно из чисел n, m равно 2 рассмотрен ранее), имеем

$$V_nV_m = [V_{n-1}, F]V_m \subseteq$$
$$[V_{n-1}V_m, F] + V_{n-1}[V_m, F] \subseteq T^{(n+m-1)} + V_{n-1}V_{m+1}$$
$$\subseteq T^{(n+m-1)} + V_{n-2}V_{m+2} \subseteq ...$$
$$\subseteq T^{(n+m-1)} + V_2V_{n+m-2} \subseteq T^{(n+m-1)}.$$

Теорема доказана. □

Поскольку $[x, y][z, t] \notin T^{(3)}$ в алгебре F_4, то ограничение в теореме 1 на ранг алгебры является существенным.

Следствие 1. *В алгебре $A = F_3^{(n)}$ верно включение $T^{(n-1)}(A) \subseteq Z(A)$.*

Доказательство. Пусть $T^{(m)} = T^{(m)}(A),\ V_m = V_m(A)$. По теореме 1:

$$[T^{(n-1)}, A] = [V_{n-1}A, A] \subseteq T^{(n)} + V_{n-1}T^{(2)} = 0,$$

что и требовалось. □

4. Тождества алгебры $F_3^{(n)}$

Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$; F и L — свободная ассоциативная и свободная алгебра Ли над множеством X соответственно. Пусть $e_1, ..., e_\alpha, ...$ — базис алгебры Ли L, состоящий из однородных элементов. При этом предполагается, что базис упорядочен по возрастанию индексов и

$$e_\alpha < e_\beta, \text{ если } \deg(e_\alpha) > \deg(e_\beta).$$

Из теоремы Пуанкаре-Бирхгофа-Витта (см. [19]) вытекает, что всякий элемент алгебры F однозначно представим в виде линейной комбинации *правильных слов* вида

$$p_i := e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_t}, \text{где} \quad t \geq 1,\ e_{i_1} \leq \ldots \leq e_{i_t}; \tag{9}$$

в слове p_i элементы e_{i_j} перемножаются в алгебре F. Иначе говоря, правильные слова составляют аддитивный базис модуля F над кольцом Φ.

Определим *вес* $wt(e_i)$ (the weight) однородного элемента $e_i \in L$, считая, что

$$wt(e_i) = \deg_L(e_i).$$

Далее, если p_i правильное слово вида (9), то положим

$$wt(p_i) = \sum_{j=1}^{t} wt(e_{i_j}) - (t-1),$$

и назовем $wt(p_i)$ *весом* слова p_i. *Весом* $wt(a)$ элемента $a{\in}F$ назовем наименьший из весов правильных слов p_i, входящих в разложение

$$a = \sum_i \alpha_i p_i,\ \text{где } 0 \neq \alpha_i \in \Phi.$$

Лемма 10. *Всякий элемент идеала $T^{(m)}$ представим в виде линейной комбинации элементов вида*

$$xM_1M_2 \ldots M_k, \tag{10}$$

где M_i является либо оператором правого умножения R_y, либо оператором внутреннего дифференцирования D_y и среди операторов M_i содержится не менее $(m-1)$-го оператора вида D_y, где $x, y \in X$.

Доказательство. Из определения идеала $T^{(m)}$ следует, что $T^{(m)}$ линейно порождается элементами вида

$$a_1 D_{a_2} ... D_{a_m} R_{a_{m+1}}, \tag{11}$$

где $a_i \in F$. Из тождеств (1) и (3) вытекает, что в ассоциативной алгебре справедливы равенства

$$R_{ab} = R_a R_b, \quad D_{ab} = R_a D_b + L_b D_a, \quad L_a = R_a - D_a. \tag{12}$$

Используя (12), по индукции легко понять, что элемент вида (11) представим в виде линейной комбинации элементов вида (10). □

Теорема 2. *В алгебре $F_3^{(n)}$ выполнено тождество $f(x, y, z) = 0$ от 3-х переменных тогда и только тогда, когда $wt(f) \geq n$.*

Доказательство. Покажем сначала, что если $wt(f) \geq n$, то $f = 0$ в алгебре $F_3^{(n)}$. Элемент f можно представить в виде линейной комбинации правильных слов p_i вида (9), причем $wt(p_i) \geq n$ для любого i. Пусть $n_j = deg(e_{i_j})$. Тогда по определению веса многочлена имеем

$$n \leq \left(\sum_{1 \leq j \leq t} n_j \right) - (t-1).$$

Далее, в алгебре F_3 в силу теоремы 1 о произведении:

$$T^{(n_1)} T^{(n_2)} \dots T^{(n_t)} \subseteq T^{(N)},$$

где

$$N = n_1 + \sum_{2 \leq i \leq t} (n_i - 1) = \left(\sum_{1 \leq i \leq t} n_i \right) - (t-1).$$

Значит, если $wt(f) \geq n$, то $f \in T^{(n)}$ и $f = 0$ в алгебре $F_3^{(n)}$. В частности, если вес правильного слова p_i вида (9) не менее n, то $p_i = 0$ в алгебре $F_3^{(n)}$.

Допустим, что $f(x, y, z) = 0$ в алгебре $F_3^{(n)}$, т.е. $f \in T^{(n)}$. Тогда по лемме 10 элемент f линейно выражается через элементы вида $x' := x M_1 M_2 ... M_k$, причем в операторном слове $M_1 M_2 ... M_k$ встречается не менее, чем $(n-1)$ операторов вида D_y. Пусть $M_k = D_y$. Тогда $x'' := x' M_1 M_2 ... M_{k-1}$ и в операторном слове $M_1 M_2 ... M_{k-1}$ встречается не менее, чем $(n-2)$ операторов вида D_y. По предположению индукции можно считать, что x'' является линейной комбинацией правильных слов

$$p_i = e_{i_1} e_{i_2} ... e_{i_t},$$

веса которых $\geq n-1$. Заметим, что

$$p_i D_y = \sum_{j=1}^{t} e_{i_1} ... [e_{i_j}, y] ... e_{i_t}.$$

Из доказательства теоремы Пуанкаре-Бирхгофа-Витта следует, что каждый из элементов $e_{i_1} ... [e_{i_j}, y] ... e_{i_t}$ является линейной комбинацией правильных слов, веса которых $\geq n$. □

Следствие 2. *Если* $n \geq 3$, *то* $[x,y]^{n-1} \in T^{(n)}$ *и* $[x,y]^{n-2} \notin T^{(n)}$, *т.е. индекс нильпотентности коммутатора от свободных порождающих алгебры* $F_3^{(n)}$ *равен* $n-1$.

В самом деле, поскольку $wt([x,y]^m) = m+1$, то указанное утверждение немедленно вытекает из теоремы 2. Легко понять, что индекс нильпотентности коммутанта $(F_3^{(n)})'$ алгебры $F_3^{(n)}$ также равен $n-1$.

Заметим, что включение $[x,y]^{n-1} \in T^{(n)}$ известно (см. [20], предложение 1). Вопрос о точности указанной оценки в [20] не обсуждался.

5. Аддитивная структура алгебры $F_3^{(n)}$

В ходе доказательства теоремы 2 было установлено, что аддитивный базис алгебры $F_3^{(n)}(\Phi)$ получается факторизацией базиса Пуанкаре-Бирхгофа-Витта по идеалу $T^{(n)}(F_3)$. Отсюда вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. *Аддитивный модуль свободной* Φ*-алгебры* $F_3^{(n)}(\Phi)$ *ранга* 3 *не имеет кручения. В частности, аддитивная группа свободного Ли нильпотентного индекса* n *кольца* $F_3^{(n)}(\mathbb{Z})$ *от 3-х порождающих является свободной абелевой.*

Теорему 3 можно также получить в виде следствия из теоремы 1 и результатов работы [9].

Проблема кручения обсуждалась в [15], [16] для свободных ассоциативных Ли нильпотентных колец индекса 3 и 4 соответственно.

Отметим, что А.И. Ширшов [21] доказал, что свободное кольцо Ли не имеет кручения, а автор [22] доказал существование элементов степени 13 аддитивного порядка 3 в свободном альтернативном кольце.

Интересной задачей остается изучение аддитивной группы свободного ассоциативного Ли нильпотентного кольца индекса 5. В [23] доказано, что аддитивная группа кольца $F^{(5)}(\mathbb{Z})$ не имеет элементов простого порядка ≥ 5.

References

[1] S.A. Jennings, *On rings whose associated Lie rings are nilpotent*, Bull. Amer. Math. Soc., **53**:6 (1947), 593–597. Zbl 0032.25301

[2] V.N. Latyshev, *On choosing a base in one* T*-ideal*, Sib. Mat. Journal, **4**:5 (1963), 1122–1127. Zbl 0199.07501

[3] V.N. Latyshev, *On the finite generation of* T*-ideal with an element* $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, Sib. Mat. Journal, **6**:6 (1965), 1432–1434. Zbl 0199.07502

[4] D. Krakowski, A.Regev, *The polynomial identities of the Grassman algebra*, Trans. Amer. Math. Soc., **181** (1973), 429–438. Zbl 0289.16015

[5] I.B. Volichenko, *The* T*-ideal generated by the element* $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, Preprint no. 22, Inst. Math. Acad. Sci. Beloruss. SSR (1978), 13 pp.

[6] A.S. Gordienko, *The codimension of the commutator of length* 4, Usp. Mat. Nauk, **62**:1 (2007), 191–192. Zbl 1167.16016

[7] A.V. Grishin, S.V. Pchelintsev, *On the centers of relatively free algebras with an identity of Lie nilpotency*, Sb. Math., **206**:11 (2015), 1610–1627. Zbl 1366.16019.

[8] A.V. Grishin and S.V. Pchelintsev, *Proper central and core polynomials of relatively free associative algebras with identity of Lie nilpotency of degrees 5 and 6*, Math. Sb., **207**:12 (2016), 54-72. Zbl 1372.16020

[9] R.Tyler, *On the lower central factors of a free associative rings*, Can. J. Math., **27**:2 (1975), 434–438. Zbl 0303.16002

[10] V.M. Petrogradsky, *Codimension growth of strong Lie nilpotent associative algebras*, Comm. Algebra, **39**:3 (2011), 918–928. Zbl 1226.16017

[11] N. Gupta, F. Levin, *On the Lie ideals of a ring*, J. Algebra, **81** (1983), 225–231. Zbl 0514.16024

[12] R.K. Sharma, J.B. Srivastava, *Lie ideals in group rings*, Journal of Pure and Applied Algebra, **63** (1990), 67-80. Zbl 0689.16005

[13] A. Bapat, D. Jordan, *Lower central series of free algebras in symmetric tensor categories*, J. Algebra, **373** (2013), 299–311. Zbl 1276.16017

[14] G. Deryabina, A. Krasilnikov, *On some products of commutators in an associative ring*, International Journal of Algebra and Computation, **29**:2 (2019), 333–341.

[15] S. Bhupatiraju, P. Etingof, D. Jordan, W. Kuszmaul, J. Li *Lower central series of a free associative algebra over the integers and finite fields* J. Algebra, **372** (2012), 251–274. Zbl 1320.16012

[16] A.Krasilnikov, *The additive group of a Lie nilpotent associative ring*, J. Algebra, **392** (2013), 10–22. Zbl 1296.16019

[17] S.V. Pchelintsev, *Relatively free associative algebras of ranks 2 and 3 with Lie nilpotency identity and systems of generators of some T-spaces*, arXiv:1801.07771 (20 pages in Russian) [math.RA].

[18] R.R. Dangovski, *On the maximal containments of lower central series ideals*, arXiv:1509.08030 [math.RA].

[19] N. Jacobson, *Lie algebras*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, **10**, Interscience, New York–London, 1962. Zbl 0121.27504

[20] A.V. Grishin, L.M. Tsybula, and A.A. Shokola, *On T-spaces and relations in relatively free, Lie nilpotent, associative algebras*, J. Math. Sci., **177**:6 (2011), 868–877. Zbl 1290.16018

[21] A.I. Shirshov, *On free Lie rings*, Mat. Sat., **45**:2 (1958), 113–122. Zbl 0080.25503

[22] S.V. Pchelintsev, *On the torsion of a free alternative ring*, Sib. Mat Journal, **32**:6. (1991), 142–149. Zbl 0777.17029

[23] S.V. Pchelintsev, *Additive basis of relatively free associative algebra with the identity of Lie nilpotency of degree 5 and its applications*, Sib. Mat Journal (pending publication).

Sergey Valentinovich Pchelintsev
Department of Data Analysis, Decision Making and Financial Technologies,
Finance University under the Government of the Russian Federation,
49, Leningradsky ave.,
Moscow, 125993, Russia
E-mail address: pchelinzev@mail.ru