С. Н. Кружков, И. М. Колодий, К теории вложения анизотропных пространств Соболева, *УМН*, 1983, том 38, выпуск 2, 207–208

К ТЕОРИИ ВЛОЖЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

С. Н. Кружков, И. М. Колодий

Хорошо известно, что изотропные пространства Соболева $\overset{0}{W}{}_p^1(\Omega)$ и $W_p^1(\Omega)$, $\Omega \subset R^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n)\}$, в случае $1 \leqslant p < n$ и локально липшицевой границы $\partial\Omega$ вкладываются в одно и то же пространство $L_{p^*}(\Omega)$, где $p^* = np/(n-p)$ (см. [1], [2]). Рассмотрим анизотропное пространство $\overset{0}{W}{}_{\mathbf{p}}^1(\Omega)$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $1 \leqslant p_i \leqslant +\infty$, полученное пополнением пространства $\overset{0}{C}{}^\infty(\Omega)$ финитных бесконечно дифференцируемых в Ω функций по норме $\| u \|_{1,\mathbf{p}}^0 = \| u_{x_1} \|_{p_1} + \ldots + \| u_{x_n} \|_{p_n}$, $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$, и пространство $W_{\mathbf{p}}^1(\Omega)$, полученное пополнением пространства $C^\infty(\overline{\Omega})$ бесконечно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций по норме $\| u \|_{1,\mathbf{p}} = \| u \|_{1,\mathbf{p}}^0 + \| u \|_1$ (здесь и далее область Ω предполагается ограниченной).

Естественным аналогом требования $p < n$ в случае анизотропных пространств является условие

$$| 1/\mathbf{p} | = (1/p_1) + \ldots + (1/p_n) > 1, \tag{1}$$

которое будет предполагаться выполненным всюду в дальнейшем (при выполнении строго противоположного неравенства пространство $W_{\mathbf{p}}^1(\Omega)$ вкладывается в пространство непрерывных по Гёльдеру функций; см. [3], теорема 3′).

Для пространства $\overset{0}{W}{}_{\mathbf{p}}^1(\Omega)$ при выполнении условия (1) в работе [3] (лемма 1, с. 28) установлена теорема вложения в $L_q(\Omega)$,

$$q = n/(| 1/\mathbf{p} | - 1) \tag{2}$$

(элементарное доказательство этой теоремы см., например, в [4], с. 308). Однако в этой же, работе утверждается, что пространство $W_{\mathbf{p}}^1(\Omega)$ вкладывается в то же самое $L_q(\Omega)$. Как будет показано ниже, это утверждение неверно. К сожалению, это ошибочное утверждение уже применялось [5] и даже развивалось в исследованиях последнего времени [6], [7].

Для опровержения указанного утверждения проведем следующие рассуждения. Возьмем любую функцию $u(x) \in W_{\mathrm{p}}^1(K_1^{(n)})$, $1 \leqslant p < n$, $K_1^{(n)}$ — шар $\{x \in R^n\colon | x | < 1\}$ такую, что $u(x) \bar{\in} L_s(K_1^{(n)})$ для некоторого $s > 1$ (например, $u(x) \equiv | x |^{-\alpha}$, $0 < \alpha < (n/p) - 1$). Пусть m — любое натуральное число. Рассмотрим теперь в шаре $K_1^{(n+m)} \subset R^{n+m} = \{(x_1, \ldots, x_{n+m})\}$ функцию $u(x)$ как элемент пространства $W_{\mathbf{p}}^1(K_1^{(n+m)})$, где $\mathbf{p} = (\underbrace{p, \ldots, p}_{n}, \underbrace{+\infty, \ldots, +\infty}_{m})$. Если справедливо вложение $W_{\mathbf{p}}^1(K_1^{(n+m)})$ в $L_q(K_1^{(n+m)})$, где $q = (n+m)p/(n-p)$ определено по формуле (2), то в силу произвольности m заключаем, что выбранная функция $u(x)$, в частности, будет принадлежать пространству $L_s(K_1^{(n)})$, что противоречит наложенному на $u(x)$ условию (отметим, что «бесконечные» компоненты вектора $\mathbf{p}$ можно заменить на достаточно большие числа).

Из приведенных рассуждений, основанных на идее «выхода» в пространство большей размерности, следует, что суть дела здесь в следующем: из предположения о справедливости обсуждаемого вложения анизотропного пространства $W_{\mathbf{p}}^1$ в L_q, где q определено по формуле (2), вытекает, что в изотропном случае может быть сколь угодно увеличена степень суммируемости p^* в теореме вложения W_p^1 в L_{p^*}, а это, конечно, неверно.

Таким образом, в анизотропном случае необходимо либо 1) уменьшить показатель суммируемости, либо 2) наложить дополнительные условия на вектор $\mathbf{p}$, при которых все-таки верно обсуждаемое вложение $W_{\mathbf{p}}^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$, где $q = n/(| 1/\mathbf{p} | - 1)$.

Совершенно очевидно, что в случае локально липшицевой границы $\partial\Omega$ справедливо вложение $W_{\mathbf{p}}^1(\Omega) \subset L_{q_{\min}}(\Omega)$, где $q_{\min} = nr/(n-r)$, $r = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i$. Естественно здесь предполагать, что $r < n$, ибо в противном случае было бы вложение в любое $L_q(\Omega)$ (если $r = n$) или в пространство Гёльдера $C^\alpha(\Omega)$, $\alpha = 1 - (n/r)$ (если $r > n$).

Теорема 1. *Пусть число q в* (2) *удовлетворяет условию*

$$q > \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i. \tag{3}$$

Тогда в любой строго внутренней подобласти $\Omega^\delta = \{x \in \Omega\colon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \delta > 0\}$ *для функций* $u \in W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$ *справедливо неравенство* $\| u \|_{L_q(\Omega^\delta)} \leqslant c_\delta \| u \|_{W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)} = c_\delta \| u \|_{1,\mathbf{p}}$.

Замечание 1. В случае $n = 2$ условие (3) выполняется всегда: поскольку $p_i \geqslant 1$ $(i = 1, 2)$, то $q = 2/[(1/p_1) + (1/p_2) - 1] \geqslant 2 \max(p_1, p_2) > \max(p_1, p_2)$. При $n = 3$ условие (3) не выполняется, например, для вектора $\mathbf{p} = (7, 3/2, 3/2)$: $q = 6{,}3 < 7$.

Замечание 2. А. Г. Королев примером показал, что теорема 1 при $\delta = 0$ $(\Omega^0 = \Omega)$ неверна. Более того, из этого примера (который предполагается опубликовать в другой статье) видно, что указанный выше тривиальный результат с $q_{\min}$ в анизотропном двумерном случае (когда условие (3) заведомо выполняется согласно замечанию 1) в определенном смысле неулучшаем при липшицевой границе.

Замечание 3. Теоремы вложения для анизотропных пространств при выполнении условия l-рога на область Ω см. в книге [8] (с. 304, 305, неравенство (21)).

Замечание 4. В заключение отметим, что на основании проведенного выше анализа можно констатировать ошибочность следующих утверждений: 1) в работе [3] — теорема 2′, пункт а) теоремы 3′, лемма 4 и аналогичные утверждения в § 3; 2) в работе [6] — общий случай леммы 2 (ее частный случай, соответствующий пространству $\overset{0}{W}{}^1_{\mathbf{p}}$, верен); 3) в работе [7] — общий случай леммы 2 (для некоторого частного случая эта лемма верна); 4) в работе [5] на с. 6, 7 цитируется и применяется ошибочная теорема 2′ из [3]; 5) в работах [4] (лемма 2.2) и [9] (первый абзац после формулировки теоремы 9 на с. 84) цитируется, но не применяется, одно из указанных выше неверных утверждений Лу Вень-Туана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Л.: изд-во ЛГУ, 1950.

[2] С. Н. Кружков. Нелинейные уравнения с частными производными, часть I.— М.: изд-во МГУ, 1969.

[3] Лу Вень-Туан. К теоремам вложения для пространств функций с частными производными, суммируемыми с различными степенями.— Вестн. ЛГУ, 1961, № 7, с. 23—27.

[4] С. Н. Кружков. Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка.— Матем. сб., 1968, **77**; 3, с. 229—234.

[5] Т. Д. Вентцель. Априорная оценка решений некоторых квазилинейных параболических систем. III.— Вестн. МГУ, 1972, № 3, с. 3—9.

[6] А. В. Иванов. $(A, \vec{0})$-параболические уравнения со слабым вырождением.— Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1981, **111**, с. 52—62.

[7] А. В. Иванов. $(A, \vec{0})$-эллиптические уравнения со слабым вырождением.— Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1981, **112**, с. 75—84.

[8] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения.— М.: Наука, 1975.

[9] В. И. Буренков. Теоремы вложения и продолжения для классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных во всем пространстве.— Итоги науки, серия матем., Математический анализ, 1965.— М., 1966.

Московский государственный университет
Львовский государственный университет

Поступило в Правление общества 16 ноября 1982 г.