

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Петникова, Е. В. Третьяков, В. В. Шувалов, Устойчивость фазовой функции Хеньи–Гринштейна и быстрое интегрирование по путям в условиях многократного рассеяния света, *Квантовая электроника*, 2006, том 36, номер 11, 1039–1042

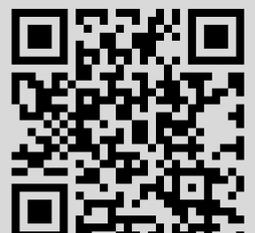
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.227.52.176

27 сентября 2024 г., 03:47:04



# Устойчивость фазовой функции Хеньи – Гринштейна и быстрое интегрирование по путям в условиях многократного рассеяния света

В.М.Петникова, Е.В.Третьяков, В.В.Шувалов

*Показано, что устойчивость фазовой функции Хеньи–Гринштейна позволяет резко увеличить скорость решения задачи распространения света через сильно рассеивающие объекты с использованием той же, что и в исходной постановке задачи, априорной информации о процессах взаимодействия. При этом рост скорости расчета сопровождается постепенным огрублением моделирования с плавным переходом от точности метода Монте-Карло к точности диффузионного приближения. В рамках стандартного предположения о статистической независимости длины свободного пробега фотона и угла его рассеяния получено точное аналитическое выражение, связывающее эффективное число актов рассеяния с длиной оптического пути.*

**Ключевые слова:** фазовая функция Хеньи–Гринштейна, фазовая функция многократного рассеяния, быстрое интегрирование по путям.

## 1. Введение

Задачу распространения света в условиях многократного рассеяния обычно решают численно методами теории переноса [1, 2], Монте-Карло [3, 4] либо интегрирования по путям [5–7]. Основой такого расчета являются параметры, априорно описывающие статистику: коэффициенты  $\mu_{a,s}^{(1)}$  поглощения и рассеяния, а также фазовая функция  $P_s^{(1)}(\boldsymbol{\theta})$ , характеризующая распределение плотности вероятности однократного рассеяния на двумерный (2D) угол  $\boldsymbol{\theta} = (\theta, \varphi)$ , где  $\theta$  и  $\varphi$  – азимутальный и полярный углы рассеяния [1–4]. Поскольку в такой «точной», оперирующей только априорной статистикой ( $\mu_{a,s}$  и  $P_s^{(1)}(\boldsymbol{\theta})$ ) постановке задача многократного рассеяния аналитически никогда не решается, обычно ее дополнительно упрощают, вводя некоторые приближения [2, 7–11]. К сожалению, при распространении на расстояния  $\sim 1000$  длин рассеяния и более верификация полученных в рамках этих приближений результатов с помощью перечисленных выше точных методов из-за огромных временных затрат становится практически невозможной. Дело в том, что более или менее достоверный (относительная погрешность  $\sim 1\%$ ) расчет лишь одного распределения плотности вероятности прохождения фотонов от источника к приемнику потребует моделирования заведомо более  $10^{13}$  реализаций, что следует просто из необходимости заполнения соответствующего этому распределению массива данных ( $10^4$  фотонов на ячейку).

Кардинальный рост скорости численного расчета в любом из указанных точных методов может быть реализован за счет введения 2D распределения  $P_s^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$ , априорно описывающего процесс  $k$ -кратного рассеяния [11–

14]. При реализации такого подхода в [13, 14] полагалось, что

$$P_s^{(k)}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - g_k^2}{(1 + g_k^2 - 2g_k \cos \theta)^{3/2}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

является фазовой функцией Хеньи–Гринштейна [15], параметр анизотропии  $g_k = g_1^k = \langle \cos \boldsymbol{\theta} \rangle$  которой определяет средний косинус угла  $k$ -кратного рассеяния и меняется в пределах от 0 (изотропное рассеяние) до 1 (рассеяние вперед). Считалось, что число актов рассеяния  $k$  на отрезке траектории длиной  $\Delta z$  превращается в некую новую эффективную константу  $k_{\text{eff}}$ , которая зависит от  $\Delta z$  и определенным образом выражается через среднее значение  $\langle k \rangle = \mu_s \Delta z$  [12–14]. При этом необходимая для проведения расчета зависимость  $k_{\text{eff}}(\Delta z)$  вводилась из полуэмпирических соображений.

Ниже будет показано, что, поскольку распределение  $P_s^{(1)}(\boldsymbol{\theta})$  относится к классу устойчивых распределений [16] и характер зависимости  $P_s^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$  воспроизводит характер  $P_s^{(1)}(\boldsymbol{\theta})$  (см. формулу (1)), привлекать соображения такого типа не требуется и зависимость  $k_{\text{eff}}(\Delta z)$  может быть найдена точно. Поэтому в рамках любого из перечисленных выше точных подходов с использованием той же, что и в исходной постановке задачи, априорной информации о рассеивающей среде при решении задачи многократного малоуглового рассеяния может быть реализован кардинальный выигрыш в скорости расчета.

## 2. Фазовая функция многократного рассеяния

Будем считать, что на отрезке длиной  $\Delta z$ , параллельном оси  $z$ , фотон  $k = 0, 1, \dots$  раз меняет направление распространения на угол  $\boldsymbol{\theta}_k = (\theta_k, \varphi_k)$ . Интересуясь лишь итоговым изменением направления его распространения ( $\boldsymbol{\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{\theta}_k$ ) и считая все акты рассеяния независимыми, введем эффективную фазовую функцию многократного рассеяния в виде

В.М.Петникова, Е.В.Третьяков, В.В.Шувалов. Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119992 Москва, Воробьевы горы; e-mail: vsh@vsh.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 19 июня 2006 г., после доработки – 10 июля 2006 г.

$$P_s(\boldsymbol{\theta}, \Delta z) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(\Delta z) P_s^{(k)}(\boldsymbol{\theta}). \quad (2)$$

Здесь  $P^{(k)}(\Delta z)$  – вероятность  $k$ -кратного рассеяния на отрезке  $\Delta z$ , которая в дальнейшем будет учитывать и вероятность отсутствия поглощения (метод интегрирования по путям);

$$P_s^{(k)}(\boldsymbol{\theta}) = \int \int d\boldsymbol{\theta}' P_s^{(k-1)}(\boldsymbol{\theta}') P_s^{(1)}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

– фазовая функция  $k$ -кратного рассеяния;  $P_s^{(0)}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \delta(\boldsymbol{\theta})$  –  $\delta$ -функция по углу  $\boldsymbol{\theta} = (\theta, \varphi)$ .

С использованием аппарата характеристических функций легко показать, что для любой фазовой функции  $P_s^{(1)}(\boldsymbol{\theta})$  уже только из условия независимости актов однократного рассеяния для любого целого  $n > 1$  сразу следует, что

$$\left\langle \cos \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\theta}_k \right\rangle = \langle \cos \boldsymbol{\theta}_1 \rangle^n. \quad (4)$$

Поэтому, если бы фазовая функция однократного рассеяния определялась распределением (1) и это распределение было бы устойчивым [16], мы получили бы весьма простое и удобное соотношение  $g_k = g_1^k$  [14].

### 3. Устойчивость фазовой функции Хеньи – Гринштейна

Для иллюстрации устойчивости фазовой функции Хеньи – Гринштейна (1) приведем результат численного интегрирования (3) при  $P_s^{(1)}(\boldsymbol{\theta})$ , заданном выражением (1) для  $0.99 > g_1 > 0.15$  и  $k = 1, 2, \dots, 50$ . На рис.1 на плоскости  $\theta, k$  показаны зависимости  $F^{(k)}(\theta) = \int_0^{2\pi} d\varphi P_s^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$ , рассчитанные таким методом (точки) и зависимости

$$F^{(k)}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{1 - g_1^{2k}}{(1 + g_1^{2k} - 2g_1^k \cos \theta)^{3/2}}, \quad (5)$$

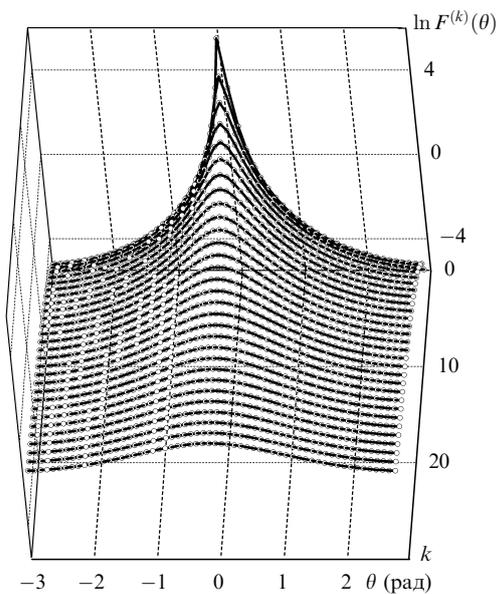


Рис.1. Трансформация зависимости  $F^{(k)}(\theta)$  при изменении  $k$  и  $g_1 = 0.95$ . Точки – результат численного интегрирования выражения (3), сплошные линии соответствуют выражению (5).

рассчитанные с использованием выражения (1) и условия  $g_k = g_1^k$  при  $g_1 = 0.95$  (сплошные линии). Легко убедиться в том, что при  $g_k = 0.99 - 0.07$  (почти изотропное рассеяние) отклонение данных численного интегрирования (3) от полученных по формуле (5) не превышает  $10^{-3}$ . С учетом погрешности использованных нами численных процедур это подтверждает, что распределение (1) действительно является устойчивым [16]. Отметим, что тот же результат может быть получен и гораздо более строго – аналитически [11, 14].

### 4. Статистические моменты при $k$ -кратном рассеянии

Отметим сразу, что из-за разной длины траекторий с разной кратностью рассеяния  $P^{(k)}(\Delta z)$  в (2) нельзя считать заданным стандартным распределением Пуассона (см., напр., [13, 14]). Поэтому для расчета статистических моментов распределения  $P^{(k)}(\Delta z)$  мы воспользуемся следующими простыми соображениями.

Предположим, что при  $k$ -кратном рассеянии траектория любого фотона является некой ломаной линией, состоящей из  $k + 1$  прямолинейных отрезков  $\Delta l_i$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ), в конечных точках которых фотон и рассеивается на 2D угол  $\boldsymbol{\theta}_i$  (рис.2). Будем считать, что длины этих отрезков  $\Delta l_i$  распределены по экспоненциальному закону с моментами первого и второго порядка  $\langle \Delta l_i \rangle = \langle \Delta l \rangle = \mu_s^{-1}$  и  $\langle \Delta l_i^2 \rangle = \langle \Delta l^2 \rangle = 2\mu_s^{-2}$  соответственно. При этом средняя длина рассматриваемых траекторий  $\langle \Delta l^{(k)} \rangle = (k + 1)\mu_s^{-1}$  зависит от полного числа  $k$  актов рассеяния, а  $\langle [\Delta l^{(k)}]^2 \rangle = 2(k + 1)\mu_s^{-2}$ . Спроецировав теперь все точки рассеяния на отрезок  $\Delta z$ , являющийся продолжением  $\Delta l_0$ , построим на нем  $k + 1$  последовательно расположенных отрезков с неравными длинами  $\Delta z_i = \Delta l_i \cos(\sum_{m=0}^i \boldsymbol{\theta}_m)$ , где  $\boldsymbol{\theta}_0 \equiv 0$ , т. к.  $\boldsymbol{\theta}_0$  – угол входа фотона на рассматриваемую траекторию. Усреднив  $\Delta z_i$  по  $\Delta l_i$  и  $\boldsymbol{\theta}_i$ , в предположении статистической независимости длин свободного пробега  $\Delta l_i$  и углов  $\boldsymbol{\theta}_i$  однократного рассеяния (приближение точечных рассеивающих центров) получим

$$\langle \Delta z^{(k)} \rangle = \sum_{i=0}^k \langle \Delta z_i \rangle = \mu_s^{-1} \sum_{i=0}^k g_1^i = \mu_s^{-1} \frac{1 - g_1^{k+1}}{1 - g_1}, \quad (6)$$

где  $\langle \Delta z^{(k)} \rangle$  – средняя длина смещения фотона вдоль оси  $z$  при  $k$ -кратном рассеянии. Из выражения (6) следует, что

$$k = \frac{\ln [1 - \mu_s \langle \Delta z^{(k)} \rangle (1 - g_1)]}{\ln g_1} - 1, \quad (7)$$

а общая средняя длина траектории при такой кратности рассеяния

$$\langle \Delta l^{(k)} \rangle = \mu_s^{-1} \frac{\ln [1 - \mu_s \langle \Delta z^{(k)} \rangle (1 - g_1)]}{\ln g_1}. \quad (8)$$

Легко убедиться, что, хотя  $\langle \Delta l^{(k)} \rangle \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ , среднее смещение  $\langle \Delta z^{(k)} \rangle$  фотона вдоль оси  $z$  не может

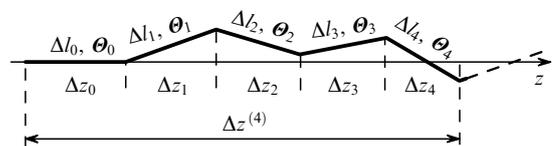


Рис.2. Схематическое изображение траектории фотона при четырехкратном рассеянии (см. текст).

превысить  $\Delta z^{(\infty)} = (\mu'_s)^{-1}$ , где  $\mu'_s = \mu_s(1 - g_1)$  – транспортный коэффициент рассеяния. Этот хорошо известный результат (см. формулу (28) работы [17]) является следствием того, что рост  $\langle \Delta z^{(k)} \rangle$  происходит только за счет регулярной (средняя проекция на ось  $z$  отлична от нуля) составляющей скорости фотона, направленной строго вдоль оси  $z$ . Собственно именно расстояние  $\Delta z^{(\infty)}$  и определяет возможность перехода к диффузионному приближению, в котором дальнейшее продвижение фотонов описывается уже через момент второго порядка, учитывающий и нерегулярную (средняя проекция на ось  $z$  равна нулю) составляющую полного перемещения.

Для того чтобы учесть эту составляющую перемещения, рассчитаем величину

$$\langle [\Delta z^{(k)}]^2 \rangle = \left\langle \left( \sum_{i=0}^k \Delta z_i \right)^2 \right\rangle = \sum_{i=0}^k \langle \Delta z_i^2 \rangle + 2 \sum_{j>i=0}^k \langle \Delta z_i \Delta z_j \rangle. \quad (9)$$

Отметим сразу, что основная сложность при этом будет состоять в том, что  $\Delta z_i$  и  $\Delta z_j$  во втором члене правой части выражения (9) статистически зависимы. Действительно, направление распространения фотона после  $j$ -го акта рассеяния, описываемое углом  $\sum_{m=0}^j \theta_m$ , зависит от всех предыдущих событий, т. к. включает в себя и сумму  $\sum_{m=0}^i \theta_m$ , характеризующую направление распространения фотона после  $i$ -го акта однократного рассеяния. Однако с учетом устойчивости фазовой функции Хени – Гринштейна (см. выше) и статистической независимости длин свободного пробега  $\Delta l_i$  и углов  $\theta_i$  однократного рассеяния провести точное усреднение в (9) оказывается все-таки можно, поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \langle \Delta z_i^2 \rangle &= \langle \Delta l^2 \rangle \sum_{i=0}^k \left\langle \cos^2 \left( \sum_{m=0}^i \theta_m \right) \right\rangle = \langle \Delta l^2 \rangle \sum_{i=0}^k \frac{1 + 2g_1^{2i}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \langle \Delta l^2 \rangle \left( k + 3 + 2g_1^2 \frac{1 - g_1^{2k}}{1 - g_1^2} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} 2 \sum_{j>i=0}^k \langle \Delta z_i \Delta z_j \rangle &= 2 \langle \Delta l \rangle^2 \sum_{j>i=0}^k \left\langle \cos \left( \sum_{m=0}^j \theta_m \right) \cos \left( \sum_{m=0}^i \theta_m \right) \right\rangle \\ &= 2 \langle \Delta l \rangle^2 \left( \sum_{j=1}^k g_1^j + \sum_{j>i=0}^k \frac{g_1^{j-i} + 2g_1^{j+i}}{3} \right) \\ &= 2 \langle \Delta l \rangle^2 \left[ g_1 \frac{1 - g_1^k}{1 - g_1} + \frac{1}{3} \frac{g_1}{1 - g_1} \left( k - \frac{1 - g_1^k}{1 - g_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \frac{g_1^2}{1 - g_1} \left( g_1 \frac{1 - g_1^{2k}}{1 - g_1^2} - g_1^k \frac{1 - g_1^k}{1 - g_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда после серии несложных преобразований с учетом соотношения  $\langle \Delta l^2 \rangle = 2 \langle \Delta l \rangle^2$  получаем точное аналитическое выражение

$$\begin{aligned} \langle [\Delta z^{(k)}]^2 \rangle &= \frac{2}{3} \frac{\langle \Delta l \rangle^2}{1 - g_1} \left[ k + 3(1 - g_1) + g_1(2 - g_1) \frac{1 - g_1^k}{1 - g_1} \right. \\ &\quad \left. - 2g_1^3 \frac{1 - g_1^{2k}}{1 - g_1^2} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что при  $k = 0 - 3$  соотношение (12) переходит в формулы, полученные ранее в [17]. В то же время выписанный нами результат точного усреднения отличается

от выражения (13), приведенного в работе [18]. Это связано с тем, что указанное выражение несправедливо для малых значений  $k$ , т. к. при его получении все три пространственные проекции второго момента смещения исходно предполагались равноправными.

Выражения для моментов второго порядка  $\langle [\Delta x^{(k)}]^2 \rangle = \langle [\Delta y^{(k)}]^2 \rangle$  смещения фотона по двум ортогональным друг другу и оси  $z$  осям  $x$  и  $y$  при  $k$ -кратном рассеянии также легко записать с учетом точного аналитического соотношения

$$\begin{aligned} \langle [\Delta x^{(k)}]^2 \rangle + \langle [\Delta y^{(k)}]^2 \rangle + \langle [\Delta z^{(k)}]^2 \rangle \\ = 2 \frac{\langle \Delta l \rangle^2}{1 - g_1} \left( k - \frac{1 - g_1^k}{1 - g_1} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

соответствующего выражению (25) работы [19].

## 5. Быстрое решение задачи распространения методом интегрирования по путям

С учетом приведенных выше точных аналитических соотношений эффективная фазовая функция (2), интегрально описывающая распределение вероятности прохождения фотонов по отрезку траектории длиной  $\Delta z$  с изменением направления распространения на 2D угол  $\theta = (\theta, \varphi)$ , теперь принимает вид

$$\begin{aligned} P_s(\theta, \Delta z) &= \exp \left\{ - [k_{\text{eff}}(\Delta z) + 1] \frac{\mu_a}{\mu_s} \right\} \\ &\times \frac{1}{4\pi} \frac{1 - g_1^{2k_{\text{eff}}(\Delta z)}}{[1 + g_1^{2k_{\text{eff}}(\Delta z)} - 2g_1^{k_{\text{eff}}(\Delta z)} \cos \theta]^{3/2}}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $k_{\text{eff}}(\Delta z)$  определяется решением трансцендентного уравнения (12). Типичную зависимость  $k_{\text{eff}}$  от  $\Delta z$ , нормированного на транспортную длину рассеяния  $(\mu'_s)^{-1}$ , при  $g_1 = 0.95$  иллюстрирует рис.3. Здесь в двойном логарифмическом масштабе сплошной кривой показана точная зависимость  $\Delta z(k_{\text{eff}})$ , рассчитанная из полученного нами аналитического выражения (12), а штриховой – ее аналог, вычисленный из соотношения (13) работы [18]. Легко убедиться в том, что при  $\Delta z < (2 \div 3)(\mu'_s)^{-1}$  различие ре-

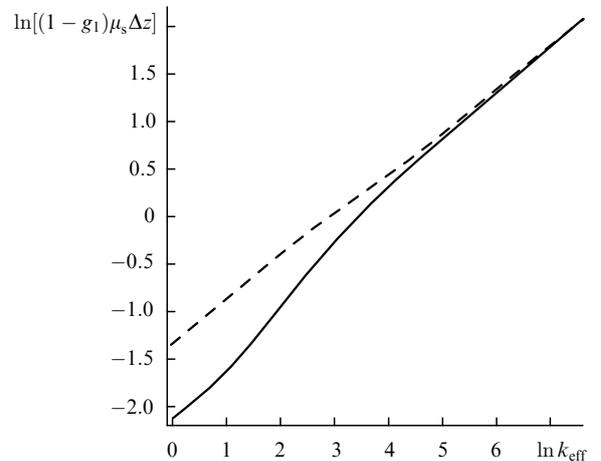


Рис.3. Зависимости  $(1 - g_1)\mu_s \Delta z$  от  $k_{\text{eff}}$  для  $g_1 = 0.95$ . Сплошная кривая – зависимость  $\Delta z(k_{\text{eff}})$ , рассчитанная из (12), штриховая кривая – ее аналог, рассчитанный из выражения (13) работы [18].

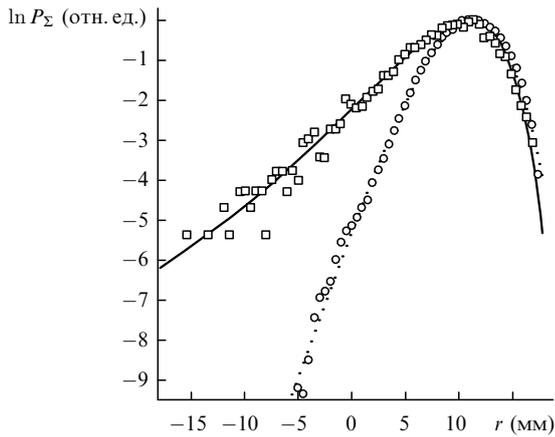


Рис.4. Центральные сечения распределений вероятности  $P_{\Sigma}(r)$  прохождения фотонов (а) и геометрия эксперимента (б). Расчет проведен методами Монте-Карло ( $\square$ ) и интегрирования по путям при  $\langle \Delta z \rangle = 8\mu_s^{-1}$  и  $k_{\text{eff}}(\Delta z)$ , определенном через  $\langle k \rangle(\Delta z)$  (пунктирная кривая) и из выражения (12) (сплошная кривая).

зультатов двух вариантов расчета оказывается весьма существенным, и лишь в диффузионном пределе  $\Delta z \gg (\mu_s')^{-1}$  они совпадают.

Поскольку использованное для записи (14) точное аналитическое соотношение (12) выражено через те же параметры, которые исходно описывали информацию о процессах рассеяния ( $\mu_s$  и  $g_1$ ) и поглощения ( $\mu_a$ ) в исходной постановке проблемы, и является точным, возможность быстрого и точного (в описанном выше смысле) решения задачи многократного малоуглового рассеяния методом интегрирования по путям можно считать доказанной [5, 6, 12, 13]. Последнее утверждение иллюстрируется рис.4,а, на котором показаны центральные сечения распределений вероятности  $P_{\Sigma}(r)$  прохождения фотонов через разные точки модельного объекта, роль которого играет сильно рассеивающая и слабо поглощающая ( $\mu_a = 0.01 \text{ мм}^{-1}$  и  $\mu_s = 14 \text{ мм}^{-1}$ ,  $g_1 = 0.95$ ) среда в цилиндрическом сосуде диаметром  $2R = 35 \text{ мм}$  с поглощающими стенками ( $r$  – расстояние до оси цилиндра). Приемник расположен на боковой поверхности цилиндра под углом  $90^\circ$  к излучателю (рис.4,б). Распределения  $P_{\Sigma}(r)$  рассчитаны методами Монте-Карло и интегрирования по путям по методике работы [13] при  $\langle \Delta z \rangle =$

$8\mu_s^{-1}$  с использованием фазовой функции Хеньи – Гринштейна, причем  $k_{\text{eff}}(\Delta z)$  определено через  $\langle k \rangle(\Delta z)$  и рассчитано из выражения (12). Угловая апертура излучателя для метода Монте-Карло составляла  $10^\circ$  при площади приемной площадки  $1 \text{ мм}^2$ .

## 6. Заключение

Итак, решение задачи распространения света через сильно рассеивающие объекты можно существенно ускорить за счет введения фазовой функции многократного рассеяния (2). При независимых актах однократного рассеяния и устойчивых распределениях  $P_s^{(1)}(\theta)$  для этого используется абсолютно та же априорная информация об объекте ( $\mu_{a,s}$  и  $P_s^{(1)}(\theta)$ ). В случае малоуглового рассеяния скорость расчета может быть увеличена в  $\sim 10^4$  раз ( $g_1 = 0.95$ ) и более при изменении  $\Delta z$  от  $\Delta z < \mu_s^{-1}$  до  $\Delta z \sim (\mu_s')^{-1}$ , хотя такое увеличение и сопровождается постепенным снижением точности расчета от точности метода Монте-Карло до точности диффузионного приближения [8]. Это позволяет оптимизировать (по скорости и точности) схему решения задачи многократного рассеяния и верифицировать быстрые приближенные алгоритмы, предложенные нами ранее для диффузионной оптической томографии объектов с размерами порядка 1000 длин рассеяния [19].

Отметим также, что описанный выше подход достаточно легко переносится на известные более сложные модели процессов однократного рассеяния, в которых  $P_s^{(1)}(\theta)$  определяется через линейную суперпозицию двух или более фазовых функций Хеньи – Гринштейна [8, 9].

1. Duderstadt J.J., Martin W.R. *Transport Theory* (New York: John Wiley & Sons, 1979).
2. Исмару А. *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах* (М.: Мир, 1981).
3. Metropolis N., Ulam S. *J. Am. Statistical Association*, **44**, 335 (1949).
4. Соболь И.М. *Метод Монте-Карло* (М.: Наука, 1985).
5. Feynman R.P., Hibbs A.R. *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York: McGraw-Hill Higher Education, 1965).
6. Kleinert H. *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, and Polymer Physics* (Singapore: World Scientific, 1995).
7. Perelman L.T. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 1341 (1994).
8. Van de Hulst H.C. *Multiple Light Scattering* (New York: Acad. Press, 1980).
9. Zege E.P. et al. *Image Transfer Through a Scattering Medium* (Berlin: Springer, 1991).
10. Kim A., Ishimaru A. *Appl. Opt.*, **37**, 5313 (1998).
11. Kokhanovsky A.A. *J. Phys. D*, **30**, 2837 (1997); *Meas. Sci. Technol.*, **13**, 233 (2002).
12. Premoze S. et al. *Proc. Eurographics 14th Symp. Rendering' 2003* (Leuven, Belgium, 2003, pp 1 – 12).
13. Воронов А.В. и др. *Квантовая электроника*, **34**, 547 (2004).
14. Turcu I. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **6**, 537 (2004); *Appl. Opt.*, **45**, 639 (2006).
15. Henyey L.G., Greenstein J.L. *Astrophys. J.*, **93**, 70 (1941); Jacques S.L. et al. *Lasers Life Sci.*, **1**, 309 (1987).
16. Uchaikin V.V., Zolotarev V.M. *Chance and Stability. Stable Distributions and their Applications* (The Netherlands, Utrecht: VSP, 1999).
17. Zaccanti G. et al. *Pure Appl. Opt.*, **3**, 897 (1994).
18. Gandjbakhche A.H. et al. *J. Statistical Physics*, **69** (1/2), 35 (1992).
19. Чурсин Д.А. и др. *Квантовая электроника*, **29**, 83 (1999); Третьяков Е.В. и др. *Квантовая электроника*, **31**, 1095 (2001).