А. А. Назаров, С. Л. Шохор, Исследование управляемого несинхронного множественного доступа в спутниковых сетях связи с оповещением о конфликте, *Пробл. передачи информ.*, 2000, том 36, выпуск 1, 77–89

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 36 2000 Вып. 1

УДК 621.394/395.74-503.5

© 2000 г. **А.А. Назаров, С.Л. Шохор**

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОГО НЕСИНХРОННОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА В СПУТНИКОВЫХ СЕТЯХ СВЯЗИ С ОПОВЕЩЕНИЕМ О КОНФЛИКТЕ

Проводится исследование сети связи с динамическим протоколом случайного множественного доступа с оповещением о конфликте без потери искаженных сообщений. Строится немарковская модель сети. Методом производящих функций находятся основные вероятностные характеристики. Проводится сравнение полученных результатов с результатами, полученными в [1] с помощью асимптотических методов. Находится область применимости асимптотических результатов.

§ 1. Введение

В данной работе рассматривается та же, что и в [1], спутниковая сеть связи с большим числом территориально-распределенных абонентских станций, которые передают сообщения через геостационарный спутник-ретранслятор. Так как спутниковый канал связи совместно используют все абонентские станции, то возможно совпадение времени ретрансляции сообщений от двух или более станций, при этом сообщения искажаются и требуют повторной передачи. Такая ситуация называется конфликтом. Предполагается, что спутник-ретранслятор имеет возможность обнаружения возникающих конфликтов и реализации сигнала оповещения. Абонентские станции способны воспринимать (идентифицировать) сигнал оповещения о конфликте так, чтобы в каждой станции по прошествии заданного времени распространения сигнала можно было определить, правильно приняты переданные сообщения или нет. Сообщения, поступающие на спутник-ретранслятор во время распространения сигнала оповещения о конфликте, считаются искаженными. Все искаженные сообщения поступают в источник повторных вызовов (ИПВ). После определения абонентской станцией того, что посланное сообщение попало в конфликт, станция производит случайную задержку, после которой вновь реализует передачу. В динамическом протоколе [1] предлагается использовать случайную задержку повторной попытки, распределенную экспоненциально с параметром, зависящим от количества сообщений, находящихся в ИПВ. Динамические протоколы, как правило, технически не реализуемы, но могут приближенно оценивать функционирование адаптивных протоколов, в которых количество заявок в источнике повторных вызовов заменяется некоторым оценочным значением.

В связи с достаточной сложностью и ресурсозатратами на создание и эксплуатацию подобных сетей связи большое значение имеет возможность еще на этапе проектирования предсказать возможные характеристики работы системы и выбрать оптимальные параметры. В число таких параметров и характеристик входят пропускная способность сети, вероятность возникновения конфликта, среднее число повторных попыток, требующихся для успешной передачи, среднее время доставки сообщения и т. д. Для нахождения этих характеристик используется метод математического моделирования и аппарат теории массового обслуживания [2, 3]. К сожалению, в большинстве случаев построенные модели оказываются достаточно сложными, и тогда для исследования применяются методы асимптотического анализа [4]. В [1] этот метод применен для нахождения распределения вероятностей состояния сети связи, а в [5] – для определения времени доставки сообщений. Модель сети рассматривается в предельных отношениях, и результаты находятся с некоторым приближением. В этой работе удалось получить точное аналитическое решение, используя метод производящих функций [3]; также проведено сравнение предельных и допредельных результатов, и найдена область применимости асимптотических результатов.

§ 2. Математическая модель

Для исследования рассмотренной сети построим ее математическую модель в виде однолинейной системы массового обслуживания, на вход которой поступает простейший с параметром λ поток требований. Если в момент поступления заявки прибор свободен, то заявка занимает прибор в течение случайного времени с функцией распределения $B(t)$. Если за время ее обслуживания другие требования не поступали, то исходная заявка считается неискаженной и покидает систему. Если во время обслуживания заявки поступает другая, то обе считаются искаженными; возникает конфликт, и начинается интервал оповещения о конфликте, длительность которого имеет функцию распределения $A(t)$. Требования, поступающие в систему на интервале оповещения о конфликте, считаются искаженными. Все искаженные заявки поступают в источник повторных вызовов. Требования из ИПВ обращаются к прибору после случайной задержки, распределенной по показательному закону с параметром σ/i, где i – число заявок в ИПВ.

§ 3. Исследование допредельной модели методом производящих функций

Пусть функции распределения времени обслуживания и интервала оповещения о конфликте неэкспоненциальны, тогда случайный процесс $\{i(t), k(t)\}$, где $i(t)$ – число заявок в ИПВ, $k(t)$ – состояние прибора, не является марковским. Для исследования системы используем метод дополнительной переменной [6], в котором предлагается ввести новую компоненту $z(t)$ таким образом, чтобы от немарковского процесса $\{i(t), k(t)\}$ перейти к линейному марковскому процессу $\{i(t), k(t), z(t)\}$. Введем случайный процесс $z(t)$ – время, оставшееся до конца текущего состояния прибора при значениях $k(t) = \{1, 2\}$.

Определим вероятность того, что в момент времени t в ИПВ находится i заявок: $P_0(i,t) = P\{k(t) = 0,\ i(t) = i\}$ – прибор свободен; $P_1(i,z,t) = P\{k(t) = 1,$ $i(t) = i,\ z(t) < z\}$ – прибор занят, и до конца обслуживания осталось времени меньше чем z; $P_2(i,z,t) = P\{k(t) = 2,\ \ i(t) = i,\ \ z(t) < z\}$ – продолжается интервал оповещения о конфликте, и до его конца осталось времени меньше чем z.

Для анализа системы воспользуемся методом производящих функций. Введем обозначения:

$$
\begin{aligned}
&F_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i P_0(i), \quad F_1(x,z) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i P_1(i,z),\\
&F_2(x,z) = \sum_{i=2}^{\infty} x^i P_2(i,z), \quad F_1(x) = \lim_{z\to\infty} F_1(x,z),\\
&F_2(x) = \lim_{z\to\infty} F_2(x,z),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $P_k(x,z)$ – вероятности состояний системы в стационарном режиме. Также обозначим: $\rho = \lambda b$ – загрузка системы, S – пропускная способность канала связи, т.е точная верхняя граница множества тех значений загрузки ρ, при которых в системе существует стационарный режим.

Теорема 1. *Если загрузка системы ρ меньше, чем пропускная способность S, и существует конечный интеграл $T = \int\limits_0^\infty t dA(t)$, то производящие функции вероятностей состояний системы имеют вид:*

$$
\begin{aligned}
F_0(x) &= \frac{(\rho+\gamma)P_0(0)\{\gamma(1-\beta-x)\delta+\rho x(1-\beta-\delta)\}}{(\rho+\gamma)\delta\{\gamma(1-\beta-x)-\beta\rho x\}+\beta x\delta(\gamma+\rho x)^2\alpha(x)}+ \\
&+\frac{xP_0(0)\alpha(x)\{\gamma^2\beta\delta-\rho^2x^2(1-\beta-\delta)+\rho\gamma x(\beta-x+(x+\beta)\delta)\}}{(\rho+\gamma)\delta\{\gamma(1-\beta-x)-\beta\rho x\}+\beta x\delta(\gamma+\rho x)^2\alpha(x)}, \\
F_1(x) &= \frac{P_0(0)\gamma(1-\delta)\{(\rho+\gamma)(1-\beta-x)+x(\rho x+\gamma)\beta\alpha(x)\}}{(\rho+\gamma)\delta\{\gamma(1-\beta-x)-\beta\rho x\}+\beta x\delta(\gamma+\rho x)^2\alpha(x)}, \\
F_2(x) &= \frac{P_0(0)x^2\gamma(\rho+\gamma)(1-\delta)(1-\alpha(x))}{(\rho+\gamma)\delta\{\gamma(1-\beta-x)-\beta\rho x\}+\beta x\delta(\gamma+\rho x)^2\alpha(x)},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где

$$
\begin{aligned}
P_0(0) &= \frac{\delta\{\gamma-[\gamma+\rho(2+a(\rho+\gamma))]\beta\}}{\{\gamma+\rho(2+a(\rho+\gamma))\}(1-\beta)-\rho(2+a(\rho+\gamma))\delta}, \\
\beta &= (\rho+\gamma)/b\int\limits_0^\infty e^{-(\rho+\gamma)t/b}(1-B(t))dt, \\
\alpha(x) &= \rho/b(1-x)\int\limits_0^\infty e^{-\rho(1-x)t/b}A(t)dt, \\
\delta &= \rho/b\int\limits_0^\infty e^{-\rho t/b}B(t)dt,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$b = \int\limits_0^\infty t dB(t)$ – среднее время обслуживания, $\gamma = \sigma b$, $a = T/b$ (T – средняя длительность интервала оповещения о конфликте).

Доказательство. Вероятности $P_0(i,t)$, $P_1(i,z,t)$, $P_2(i,z,t)$ в стационарном режиме удовлетворяют системе дифференциально-разностных уравнений:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\rho+\gamma}{b}P_0(i) = \dfrac{\partial P_1(i,0)}{\partial z}+\dfrac{\partial P_2(i,0)}{\partial z} \quad \text{при} \quad i>1, \\
\dfrac{\rho+\gamma}{b}P_1(i,z) = \dfrac{\partial P_1(i,z)}{\partial z}-\dfrac{\partial P_1(i,0)}{\partial z}+\dfrac{\rho}{b}B(z)P_0(i)+ \\
+\dfrac{\gamma}{b}B(z)P_0(i+1) \quad \text{при} \quad i>0, \\
\dfrac{\rho}{b}P_2(i,z) = \dfrac{\partial P_2(i,z)}{\partial z}-\dfrac{\partial P_2(i,0)}{\partial z}+\dfrac{\rho}{b}A(z)P_1(i-2)+ \\
+\dfrac{\gamma}{b}A(z)P_1(i-1)+\dfrac{\rho}{b}P_2(i-1,z) \quad \text{при} \quad i>2,
\end{cases}
\tag{4}
$$

где $P_1(i) = P_1(i,\infty)$, $\dfrac{\partial P_k(i,0)}{\partial z} = \left.\dfrac{\partial P_k(i,z)}{\partial z}\right|_{z=0}$; с начальными условиями по i:

$$\begin{cases} \dfrac{\rho}{b}P_0(0) = \dfrac{\partial P_1(0,0)}{\partial z}, \\ \dfrac{\rho+\gamma}{b}P_0(1) = \dfrac{\partial P_1(1,0)}{\partial z}, \\ \dfrac{\rho}{b}P_1(0,z) = \dfrac{\partial P_1(0,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial P_1(0,0)}{\partial z} + \dfrac{\rho}{b}B(z)P_0(0) + \dfrac{\gamma}{b}B(z)P_0(1), \\ \dfrac{\rho}{b}P_2(2,z) = \dfrac{\partial P_2(2,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial P_2(2,0)}{\partial z} + \dfrac{\rho}{b}A(z)P_1(0) + \dfrac{\gamma}{b}A(z)P_1(1). \end{cases} \tag{5}$$

В самом деле, для $P_0(i,t)$, $P_1(i,z,t)$, $P_2(i,z,t)$ можно записать равенства:

$$\begin{cases} P_0(i,t+\Delta t) = P_1(i,\Delta t,t) + P_2(i,\Delta t,t) + \\ +\,(1-(\lambda+i\sigma/i)\Delta t)P_0(i,t) \quad \text{при} \quad i>1, \\ P_1(i,z,t+\Delta t) = P_0(i,t)\lambda\Delta t B(z) + P_0(i+1,t)\sigma\Delta t B(z) + \\ +\,(1-(\lambda+\sigma)\Delta t)\left[P_1(i,z+\Delta t,t) - P_1(i,\Delta t,t)\right] \quad \text{при} \quad i>0, \\ P_2(i,z,t+\Delta t) = P_1(i-2,\infty,t)\lambda\Delta t A(z) + \\ +\,P_1(i-1,\infty,t)\sigma\Delta t A(z) + P_2(i-1,z+\Delta t,t)\lambda\Delta t + \\ +\,(1-\lambda\Delta t)\left[P_2(i,z+\Delta t,t) - P_2(i,\Delta t,t)\right] \quad \text{при} \quad i>2. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь Δt – бесконечно малый интервал времени. Из (6) следует (4). Аналогично получены начальные условия (5).

Умножив каждое уравнение (4) и (5) на x^i, просуммировав по i от нуля до ∞ и переписав их с использованием обозначений (1),(3), получим систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $F_0(x)$, $F_1(x,z)$, $F_2(x,z)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\rho+\gamma}{b}F_0(x) - \dfrac{\gamma}{b}P_0(0) = \dfrac{\partial F_1(x,0)}{\partial z} + \dfrac{\partial F_2(x,0)}{\partial z}, \\ \dfrac{\rho+\gamma}{b}F_1(x,z) - \dfrac{\gamma}{b}P_1(0,z) = \dfrac{\partial F_1(x,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial F_1(x,0)}{\partial z} + \\ +\,B(z)F_0(x)\left(\dfrac{\rho}{b} + \dfrac{\gamma}{bx}\right) - \dfrac{\gamma}{bx}B(z)P_0(0), \\ \dfrac{\rho(1-x)}{b}F_2(x,z) = \dfrac{\partial F_2(x,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial F_2(x,0)}{\partial z} + \\ +\,A(z)F_1(x)\left(\dfrac{\rho x^2}{b} + \dfrac{\gamma x}{b}\right) - \dfrac{\gamma x}{b}A(z)P_1(0). \end{cases} \tag{7}$$

Во втором и третьем уравнениях системы (7) перейдем к пределу при $z \to \infty$. Так как $\dfrac{\partial F_k(x,z)}{\partial z}$ имеет смысл плотности распределения, то $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{\partial F_k(x,z)}{\partial z} = 0$. Получаем выражения для производных от $F_k(x,z)$ по z в нуле:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1(x,0)}{\partial z} &= \left(\frac{\rho}{b} + \frac{\gamma}{bx}\right)F_0(x) - \frac{\rho+\gamma}{b}F_1(x) + \frac{\gamma}{b}P_1(0) - \frac{\gamma}{bx}P_0(0), \\ \frac{\partial F_2(x,0)}{\partial z} &= \left(\frac{\rho x^2}{b} + \frac{\gamma x}{b}\right)F_1(x) - \frac{\rho(1-x)}{b}F_2(x) - \frac{\gamma x}{b}P_1(0). \end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим второе уравнение системы (7). При фиксированном x – это дифференциальное неоднородное линейное уравнение относительно неизвестной функции $F_1(x,z)$. Решая это уравнение, получаем $F_1(x,z) = e^{\frac{\rho+\gamma}{b}z}f_1(x,z)$, где

$$
\begin{aligned}
f_1(x,z) = \int\limits_0^z e^{-\frac{\rho+\gamma}{b}t} \left(\frac{\partial F_1(x,0)}{\partial z} - \left(\frac{\rho}{b} + \frac{\gamma}{bx}\right) B(t) F_0(x) - \right. \\
\left. -\frac{\gamma}{b} P_1(0,t) + \frac{\gamma}{bx} B(t) P_0(0) \right) dt.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Имеем $\lim\limits_{z\to\infty} F_1(x,z) = F_1(x) \leq 1$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{z\to\infty} f_1(x,z) = 0$. Поэтому

$$
\frac{\partial F_1(x,0)}{\partial z} = \left(\frac{\rho}{b} + \frac{\gamma}{bx}\right)(1-\beta)F_0(x) + \frac{\gamma}{b}\Pi - \frac{\gamma}{bx}P_0(0)(1-\beta), \tag{10}
$$

где

$$
\Pi = \frac{\rho+\gamma}{b} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\rho+\gamma}{b}t} P_1(0,t)dt. \tag{11}
$$

Аналогично, из решения третьего уравнения системы (7) получаем

$$
\frac{\partial F_2(x,0)}{\partial z} = \left(\frac{\rho x^2}{b} + \frac{\gamma x}{b}\right)\alpha(x)F_1(x) - \frac{\gamma}{b}x\alpha(x)P_1(0). \tag{12}
$$

Для нахождения констант Π и $P_1(0)$ воспользуемся системой (5). Решение третьего уравнения этой системы записывается в виде

$$
\begin{aligned}
&P_1(0,z) = e^{\frac{\rho z}{b}} C(z), \\
&C(z) = \int\limits_0^z e^{-\frac{\rho t}{b}} \left\{ \frac{\partial P_1(0,0)}{\partial z} - \left(\frac{\rho}{b}P_0(0) + \frac{\gamma}{b}P_0(1)\right) B(t) \right\} dt.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Имеем $\lim\limits_{z\to\infty} P_1(0,z) = P_1(0) \leq 1$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{z\to\infty} C(z) = 0$. Поэтому

$$
P_1(0,z) = e^{\frac{\rho}{b}z} P_0(0) \frac{\rho}{b} \int\limits_0^z e^{-\frac{\rho}{b}t} \left(1 - \frac{B(t)}{\delta}\right) dt \tag{14}
$$

и

$$
P_1(0) = \lim_{z\to\infty} P_1(0,z) = \frac{1-\delta}{\delta} P_0(0), \tag{15}
$$

$$
\Pi = \frac{\rho+\gamma}{b} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\rho+\gamma}{b}t} P_1(0,t)dt = \frac{\rho}{\gamma} P_0(0) \left(1 - \frac{(1-\beta)}{\delta}\right). \tag{16}
$$

Приравнивая найденные из (8) выражения для $\dfrac{\partial F_k(x,0)}{\partial z}$, $k = 1, 2$, к (11) и (13) и подставляя их в первое уравнение (7), получаем линейную алгебраическую систему трех уравнений с тремя неизвестными функциями $F_0(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ и неизвестной константой $P_0(0)$:

$$
\begin{cases}
(F_1(x)x(\rho+\gamma) - F_0(x)(\rho x+\gamma)\beta)\delta - \\
\quad - P_0(0)(x\gamma(1-\delta) - \gamma\beta\delta + \rho x(1-\beta-\delta)) = 0, \\
P_0(0)(\rho x(1-\beta) + (\gamma(1-x-\beta) - \rho x)\delta) + \\
\quad + F_0(x)(\rho x\beta - \gamma(1-x-\beta))\delta + \\
\quad + x^2(P_0(0)\gamma(1-\delta) - F_1(x)(\rho x+\gamma)\delta)\alpha(x) = 0, \\
P_0(0)x\gamma + F_2(x)\rho\delta - x(F_2(x)\rho + P_0(0)\gamma)\delta - \\
\quad - x(\rho x+\gamma)\delta(1-\alpha(x))F_1(x) - P_0(0)x\gamma(1-\delta)\alpha(x) = 0.
\end{cases} \tag{17}
$$

Решая эту систему для производящих функций через константу $P_0(0)$, получим выражения, имеющие вид (2). Для нахождения $P_0(0)$ имеем условие нормировки: $F_0(1) + F_1(1) + F_2(1) = 1$. Учитывая, что $\alpha(1) = 1$, а $\alpha'(1) = \rho a$, и разрешая неопределенность типа $0/0$, получаем выражение для $P_0(0)$ в виде (3). ▲

Замечание 1. Полученные выражения для производящих функций от вероятностей состояния системы массового обслуживания позволяют определить вероятностные характеристики сети связи, такие как среднее количество сообщений в сети, вероятности простоя канала или вероятности возникновения конфликта:

$$\begin{aligned}
&M\{i\} = \{2\gamma[-a\rho(3+a\rho) + (3+2a\rho(4+a\rho))(1-\beta)] + \\
&+ 2a\gamma^2(2(1-\beta) - a\rho\beta) + 2\rho(1+a\rho)(5(1-\beta) - 2 - a\rho\beta) + \\
&+ (\rho+\gamma)^2(1-\beta)a_2\}\rho\gamma(1-\delta) : \\
&: \{2(\rho+\gamma)[\gamma(1-\beta-a\rho\beta) - \rho\beta(2+a\rho)] \times \\
&\times [(\gamma + \rho(2 + a(\rho+\gamma)))(1-\beta) - \rho(2 + a(\rho+\gamma))\delta]\},
\end{aligned} \tag{18}$$

где $a_2 = T_2/b^2$, $T_2 = \int\limits_0^\infty t^2 dA(t)$ – второй момент. По теореме Литтла можно определить среднюю задержку до успешной передачи как $M\{W\} = M\{i\}\frac{b}{\rho}$.

Замечание 2. Рассмотрим условие большой загрузки, т.е. условие, при котором производительность системы $\rho \uparrow S$, где S – пропускная способность. При таком условии вероятность отсутствия в системе заявок $P_0(0)$ должна стремиться к нулю. Переходя к пределу в выражении для $P_0(0)$ при $\rho \to S$ и приравнивая результат к нулю, получаем уравнение $(1-\beta_1)\gamma = S(2+a(S+\gamma))$. Обозначая суммарную загрузку системы как вновь генерируемыми заявками, так и повторными, через $S+\gamma = G$, получаем уравнение для пропускной способности

$$S = \frac{(1-\beta_1)G}{1+\beta_1(1+aG)}, \tag{19}$$

где $\beta_1 = \frac{G}{b}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{G}{b}t}B(t)dt$.

§ 4. Асимптотический анализ модели

Для решения системы (4) воспользуемся методом асимптотического анализа марковизируемых систем [4].

Предлагается исследовать систему уравнений в условиях большой загрузки, т.е. при $\rho \uparrow S$.

Введем обозначения: $\frac{1}{\varepsilon}P_k(i,z) = \Pi_k(x,z,\varepsilon)$, $i\varepsilon = x$, где $\varepsilon = S - \rho$. Тогда систему (4) можно переписать в виде

$$\begin{cases}
\frac{S-\varepsilon+\gamma}{b}\Pi_0(x,\varepsilon) = \frac{\partial \Pi_1(x,0,\varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_2(x,0,\varepsilon)}{\partial z}, \\
\frac{S-\varepsilon+\gamma}{b}\Pi_1(x,z,\varepsilon) = \frac{\partial \Pi_1(x,z,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_1(x,0,\varepsilon)}{\partial z} + \frac{S-\varepsilon}{b}B(z)\Pi_0(x,\varepsilon) + \\
+ \frac{\sigma}{b}B(z)\Pi_0(x+\varepsilon,\varepsilon), \\
\frac{S-\varepsilon}{b}\Pi_2(x,z,\varepsilon) = \frac{\partial \Pi_2(x,z,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_2(x,0,\varepsilon)}{\partial z} + \frac{S-\varepsilon}{b}A(z)\Pi_1(x-2\varepsilon,\varepsilon) + \\
+ \frac{\gamma}{b}A(z)\Pi_1(x-\varepsilon,\varepsilon) + \frac{S-\varepsilon}{b}\Pi_2(x-\varepsilon,z,\varepsilon).
\end{cases} \tag{20}$$

Теорема 2. *Если функция распределения времени интервала оповещения о конфликте такова, что у нее существует второй момент, то асимптотическая плотность распределения* $\Pi(x)$ *числа заявок в ИПВ экспоненциальна и имеет вид*

$$\Pi(x) = \frac{1}{\varkappa}e^{-x/\varkappa},$$

$$\varkappa = \frac{\gamma(S+\gamma) + \{S^2(4+5Sa) + S(1+6Sa)\gamma}{2(S+\gamma)\{(2+2Sa+a\gamma)\beta_1 + (\gamma + S(2+a(S+\gamma)))\beta_2\}} -$$

$$- \frac{(1-Sa)\gamma^2 + S^2(S+\gamma)^2 a_2\}\beta_1}{2(S+\gamma)\{(2+2Sa+a\gamma)\beta_1 + (\gamma + S(2+a(S+\gamma)))\beta_2\}}, \tag{21}$$

$$\beta_1 = \frac{S+\gamma}{b}\int_0^\infty e^{-\frac{S+\gamma}{b}t}(1-B(t))dt, \ \beta_2 = \frac{1}{b}\int_0^\infty te^{-\frac{S+\gamma}{b}t}dB(t),$$

$$T_2 = \int_0^\infty t^2 dA(t), \ a_2 = \frac{T_2}{b^2}.$$

Доказательство проводится в три этапа. На первом этапе неизвестные функции $\Pi_k(x,z,\varepsilon)$ будем искать в виде

$$\Pi_k(x,z,\varepsilon) = \Pi_k(x,z) + \varepsilon f_k(x,z). \tag{22}$$

Раскладывая функции $\Pi_k(x\pm\varepsilon,z,\varepsilon)$ в ряд по приращениям аргумента x, ограничиваясь слагаемыми порядка ε^2, складывая все три уравнения системы (20), подставляя $\Pi_k(x,z,\varepsilon)$ в виде (22) и устремляя $z\to\infty$, получим уравнение

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\gamma}{b}\Pi_0(x) - \frac{2S+\gamma}{b}\Pi_1(x) - \frac{S}{b}\Pi_2(x)\right\} + \\ + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\gamma}{b}f_0(x) + \frac{2}{b}\Pi_1(x) + \frac{1}{b}\Pi_2(x) - \frac{2S+\gamma}{b}f_1(x) - \frac{S}{b}f_2(x)\right\} + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\frac{\gamma}{b}\Pi_0(x) + \frac{4S+\gamma}{b}\Pi_1(x) + \frac{S}{b}\Pi_2(x)\right\} = o(\varepsilon^2).\end{gathered} \tag{23}$$

На втором этапе выразим неизвестные функции $\Pi_k(x,z)$ через одну. Для этого в системе (20) положим $\varepsilon=0$. Решая полученную систему, найдем выражения для $\Pi_1(x,z)$ и $\Pi_2(x,z)$ через $\Pi_0(x)$:

$$\begin{gathered}\Pi_1(x,z) = e^{\frac{S+\gamma}{b}z}\frac{S+\gamma}{b}\Pi_0(x)\int_0^z e^{-\frac{S+\gamma}{b}t}\left[\frac{S+\gamma}{b}\int_0^\infty e^{-\frac{S+\gamma}{b}u}B(u)du - B(t)\right]dt, \\ \Pi_1(x) = \lim_{z\to\infty}\Pi_1(x,z) = \beta_1\Pi_0(x), \\ \Pi_2(x,z) = \frac{S+\gamma}{b}\beta_1\Pi_0(x)\int_0^z (1-A(t)dt, \\ \Pi_2(x) = \lim_{z\to\infty}P_2(x,z) = (S+\gamma)a\beta_1\Pi_0(x).\end{gathered} \tag{24}$$

Здесь $\frac{S+\gamma}{b}\int_0^\infty e^{-\frac{S+\gamma}{b}t}(1-B(t))dt = \beta_1$, $\int_0^\infty(1-A(t))dt = T$, $T/b = a$.

На третьем этапе найдем выражения для $f_k(x,z)$. Для этого в системе (20) функции $\Pi_k(x\pm\varepsilon,z,\varepsilon)$ разложим в ряд до $o(\varepsilon)$. Слагаемые, не содержащие ε, сокращаются. Деля на ε и устремляя ε к нулю, получим систему дифференциальных уравнений:

$$
\begin{cases}
\frac{1}{b}\Pi_0(x) - \frac{S+\gamma}{b} f_0(x) + \frac{\partial f_1(x,0)}{\partial z} + \frac{\partial f_2(x,0)}{\partial z} = 0,\\
\frac{1}{b}\Pi_1(x,z) - \frac{S+\gamma}{b} f_1(x,z) + \frac{\partial f_1(x,z)}{\partial z} - \frac{\partial f_1(x,0)}{\partial z} - \frac{1}{b}B(z)\Pi_0(x) +\\
+ \frac{S+\gamma}{b}B(z)f_0(x) + \frac{\gamma}{b}B(z)\frac{\partial \Pi_0(x)}{\partial x} = 0,\\
\frac{\partial f_2(x,z)}{\partial z} - \frac{\partial f_2(x,0)}{\partial z} - \frac{1}{b}A(z)\Pi_1(x) + \frac{S+\gamma}{b}A(z)f_1(x) -\\
- \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left\{(2S+\gamma)A(z)\Pi_1(x) + S\Pi_2(x,z)\right\} = 0.
\end{cases}
\tag{25}
$$

Устремляя $z \to \infty$, получаем выражения для производных в нуле:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_1(x,0)}{\partial z} &= \frac{S+\gamma}{b}(f_0(x) - f_1(x)) + \frac{1}{b}(\Pi_1(x) - \Pi_0(x)) + \frac{\gamma}{b}\frac{\partial \Pi_0(x)}{\partial x},\\
\frac{\partial f_2(x,0)}{\partial z} &= \frac{S+\gamma}{b} f_1(x) - \frac{1}{b}\Pi_1(x) - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{2S+\gamma}{b}\Pi_1(x) + \frac{S}{b}\Pi_2(x)\right\}.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Складывая все три уравнения, получаем

$$
\frac{\gamma}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\gamma\Pi_0(x) - (2S+\gamma)\Pi_1(x) - S\Pi_2(x)\right\} = 0. \tag{27}
$$

Рассмотрим второе уравнение системы (25). Это дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $f_1(x,z)$. Его решение:

$$
\begin{aligned}
&f_1(x,z) = e^{\frac{S+\gamma}{b}z} C_1(x,z),\\
&C_1(x,z) = \int_0^z e^{-\frac{S+\gamma}{b}t}\left[\frac{\partial f_1(x,0)}{\partial z} - \frac{1}{b}\Pi_1(x,t) + \right.\\
&\left. + \frac{1}{b}B(t)\Pi_0(x) - \frac{S+\gamma}{b}B(t)f_0(x) - \frac{\gamma}{b}B(t)\frac{\partial \Pi_0(x)}{\partial x}\right] dt.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Из $\lim\limits_{z\to\infty} f_1(x,z) = f_1(x) < \infty$ следует, что $\lim\limits_{z\to\infty} C_1(x,z) = 0$. Отсюда получаем выражение

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_1(x,0)}{\partial z} &= \frac{S+\gamma}{b^2}\int_0^\infty e^{-\frac{S+\gamma}{b}t}\Pi_1(x,t)dt - \frac{S+\gamma}{b^2}\Pi_0(x)\int_0^\infty e^{-\frac{S+\gamma}{b}t}B(t)dt +\\
&+ \left(\frac{S+\gamma}{b}\right)^2 f_0(x)\int_0^\infty e^{-\frac{S+\gamma}{b}t}B(t)dt + \frac{(S+\gamma)\gamma}{b^2}\frac{\partial \Pi_0(x)}{\partial x}\int_0^\infty e^{-\frac{S+\gamma}{b}t}B(t)dt.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Приравнивая выражения для $\dfrac{\partial f_1(x,0)}{\partial z}$ из (26) и (29), получаем формулу, определяющую $f_1(x)$ через $f_0(x)$:

$$
f_1(x) = f_0(x)\beta_1 + \frac{\gamma}{S+\gamma}\beta_1\frac{\partial \Pi_0(x)}{\partial x} - \beta_2\Pi_0(x). \tag{30}
$$

Рассмотрим третье уравнение системы (25). В выражение под знаком производной по x подставим результаты второго этапа:

$$
\begin{aligned}
&(2S+\gamma)A(z)\Pi_1(x) + S\Pi_2(x,z) =\\
&= (2S+\gamma)\beta_1\Pi_0(x)A(z) + \frac{S(S+\gamma)}{b}\beta_1\Pi_0(x)\int_0^z (1 - A(t))dt.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Используя (31), решаем уравнение

$$
\begin{aligned}
f_2(x,z) = {} & \frac{\partial f_2(x,0)}{\partial z}z + \frac{1}{b}\Pi_1(x)\int\limits_0^z A(t)dt - \frac{S+\gamma}{b}f_1(x)\int\limits_0^z A(t)dt + \\
& + \beta_1\frac{\partial \Pi_0(x)}{\partial x}\int\limits_0^z\left\{\frac{2S+\gamma}{b}A(t) + \frac{S(S+\gamma)}{b^2}\int\limits_0^t(1-A(u))du\right\}.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Подставляя в (32) выражение для производной от $f_2(x,0)$ из (26) и устремляя $z \to \infty$, получаем

$$
\begin{aligned}
& f_2(x) = (S+\gamma)af_1(x) - a\Pi_1(x) - \\
& - \left\{(2S+\gamma)a + S(S+\gamma)\frac{a_2}{2}\right\}\beta_1\frac{\partial \Pi_0(x)}{\partial x}.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Подставим результаты, полученные на втором и третьем этапах, в формулу (23), полученную на первом этапе. Заметим, что слагаемые при ε в первой степени равны нулю по (27). Собирая коэффициенты при $f_0(x)$, получаем это же выражение, равное нулю. Разделим обе части уравнения на ε^2 и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, получаем однородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $\Pi_0(x)$:

$$
\begin{aligned}
& 2(S+\gamma)\left\{(2+2Sa+a\gamma)\beta_1 + [\gamma + S(2+a(S+\gamma))]\beta_2\right\}\frac{\partial \Pi_0(x)}{\partial x} + \\
& \quad + \left\{\gamma(S+\gamma) + [S^2(4+5Sa) + S(1+6Sa)\gamma - (1-Sa)\gamma^2]\beta_1 + \right. \\
& \quad \left. + S^2(S+\gamma)^2\beta_1 a_2\right\}\frac{\partial^2 \Pi_0(x)}{\partial x^2} = 0.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Решение $\Pi_0(x)$ этого уравнения имеет вид показательной функции:

$$
\Pi_0(x) = C\exp\left(-\frac{x}{\varkappa}\right),
\tag{35}
$$

где C – произвольная постоянная, определяемая условием нормировки. Обозначим

$$
\Pi(x) = \Pi_0(x) + \Pi_1(x) + \Pi_2(x).
$$

Тогда, используя (24) и условие нормировки $\int\limits_0^\infty \Pi(x)dx = 1$, получим

$$
\begin{aligned}
& \Pi(x) = \frac{1}{\varkappa}e^{-\frac{x}{\varkappa}},\ \Pi_0(x) = \Pi(x)/H,\ \Pi_1(x) = \beta_1\Pi(x)/H, \\
& \Pi_2(x) = \beta_1(S+\gamma)a\Pi(x)/H,\ H = 1 + \beta_1(1 + a(S+\gamma)).
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Замечание 3. Подставляя в формулу (28) выражения для $\Pi_1(x)$ и $\Pi_2(x)$, получим

$$
(\gamma - (2S+\gamma)\beta_1 - S(S+\gamma)\beta_1 a)\frac{\partial \Pi_0(x)}{\partial x} = 0.
\tag{37}
$$

Так как $\dfrac{\partial \Pi_0(x)}{\partial x} \neq 0$, то обозначая через $G = S + \gamma$ общую загрузку системы, получаем уравнение, определяющее пропускную способность сети связи

$$
S = \frac{(1-\beta_1)G}{1+\beta_1(1+aG)},
\tag{38}
$$

очевидно совпадающее с (19).

Замечание 4. Асимптотическое математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение числа заявок в системе равны и определяются по формуле

$$M\{i\} = \sqrt{D^2} = \frac{\varkappa}{S-\rho}. \tag{39}$$

§ 5. Сравнение асимптотической и допредельной моделей

Покажем, что в условиях большой загрузки результаты, полученные в допредельном случае, совпадают с результатами асимптотического анализа. Для этого в конечных формулах, полученных для производящих функций, сделаем предельный переход при $\rho \uparrow S$. Исходя из определения производящей функции и используя обозначения, введенные в § 4, имеем:

$$\begin{gathered} F(1-\tau\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}(1-\tau\varepsilon)^i P(i) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon}P(i)(1-\tau\varepsilon)^i\varepsilon = \\ = \sum_i \Pi(x)(1-\tau\varepsilon)^{x/\varepsilon}\varepsilon = \int\limits_0^{\infty}\Pi(x)e^{-\tau x}dx = \varphi(\tau), \end{gathered} \tag{40}$$

где $x = i\varepsilon$, $\frac{1}{\varepsilon}P(i) = \Pi(x)$, ε – бесконечно малая положительная величина, $\tau > 0$ – произвольная переменная, а $\varphi(\tau) = \int\limits_0^{\infty}\Pi(x)e^{-\tau x}dx$ – характеристическая функция.

В формуле для $F(x)$ произведем замены: $\rho = S-\varepsilon$, $\gamma = G-S$, а вместо S подставим ее выражение через G из (19). При нахождении вида производящих функций были введены следующие обозначения:

$$\beta = \frac{\rho+\gamma}{b}\int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{\rho+\gamma}{b}t}(1-B(t))dt,$$

$$\alpha(x) = \frac{\rho(1-x)}{b}\int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{\rho(1-x)}{b}t}A(t)dt,$$

$$\delta = \frac{\rho}{b}\int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{\rho}{b}t}B(t)dt.$$

Рассмотрим эти выражения с учетом предложенных выше замен и разложим в ряд по ε в окрестности $\varepsilon = 0$ до $o(\varepsilon^2)$:

$$\begin{gathered} \beta = \frac{\rho+\gamma}{b}\int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{\rho+\gamma}{b}t}(1-B(t))dt = \frac{G-\varepsilon}{b}\int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{G-\varepsilon}{b}t}(1-B(t))dt = \\ = -\int\limits_0^{\infty}(1-B(t))de^{-\frac{G-\varepsilon}{b}t} = -(1-B(t))e^{-\frac{G-\varepsilon}{b}t}\Big|_0^{\infty} + \int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{G-\varepsilon}{b}t}d(1-B(t)) = \\ = 1 - \int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{G}{b}t}e^{-\frac{\varepsilon}{b}t}dB(t) = \quad \text{(разложим экспоненту в ряд по } \varepsilon\text{)} \\ = 1 - \int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{G}{b}t}dB(t) - \varepsilon\frac{1}{b}\int\limits_0^{\infty}te^{-\frac{G}{b}t}dB(t) - \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{1}{b^2}\int\limits_0^{\infty}t^2e^{-\frac{G}{b}t}dB(t) = \end{gathered} \tag{41}$$

$$= \beta_1 - \varepsilon\beta_2 - \frac{\varepsilon^2}{2}\beta_3 + o(\varepsilon^2),$$

где $\beta_1 = 1 - \int\limits_0^\infty e^{-\frac{G}{b}t} dB(t)$, $\beta_2 = \frac{1}{b}\int\limits_0^\infty t e^{-\frac{G}{b}t} dB(t)$, $\beta_3 = \frac{1}{b^2}\int\limits_0^\infty t^2 e^{-\frac{G}{b}t} dB(t)$.

Произведем аналогичные преобразования с δ:

$$\begin{gathered}
\delta = \frac{\rho}{b}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{b}t} B(t)dt = -\int\limits_0^\infty B(t) de^{-\frac{G-\varepsilon}{b}t} = -\,B(t)e^{-\frac{G-\varepsilon}{b}t}\Big|_0^\infty + \\
+\int\limits_0^\infty e^{-\frac{G}{b}t} e^{\frac{\varepsilon}{b}} t dB(t) = \delta_1 + \varepsilon\delta_2 + \frac{\varepsilon^2}{2}\delta_3 + o(\varepsilon^2),
\end{gathered} \tag{42}$$

где $\delta_1 = \int\limits_0^\infty e^{-\frac{G}{b}t} dB(t)$, $\delta_2 = \frac{1}{b}\int\limits_0^\infty t e^{-\frac{G}{b}t} dB(t)$, $\delta_3 = \frac{1}{b^2}\int\limits_0^\infty t^2 e^{-\frac{G}{b}t} dB(t)$.

Функция $\alpha(x)$ в этих обозначениях принимает вид

$$\begin{gathered}
\alpha(1-\tau\varepsilon) = \int\limits_0^\infty e^{-\tau\varepsilon\frac{S-\varepsilon}{b}t} dA(t) = \\
= \int\limits_0^\infty (1 - \varepsilon\tau\frac{St}{b} + \varepsilon^2\tau\frac{t}{b} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{S^2}{b^2}\tau^2 t^2) dA(t) = \\
= 1 - \varepsilon\tau S a + \varepsilon^2\tau a + \frac{\varepsilon^2}{2}\tau^2 S^2 a_2 + o(\varepsilon^2),
\end{gathered} \tag{43}$$

где $a = \frac{T}{b}$, $a_2 = \frac{T_2}{b^2}$, $T = \int\limits_0^\infty t dA(t)$, $T_2 = \int\limits_0^\infty t^2 dA(t)$.

Рассмотрим функцию $F(1-\tau\varepsilon)$. Используя (41), (42), (43) и ограничиваясь слагаемыми порядка ε^2, получим выражение для характеристической функции $\varphi(\tau)$:

$$\varphi(\tau) = \frac{\nu}{\nu+\tau}, \tag{44}$$

где $\nu = 1/\varkappa$, а $\varkappa$ определено в утверждении теоремы 2. Так как

$$\varphi(\tau) = \int\limits_0^\infty e^{-\tau x}\Pi(x) = \frac{\nu}{\nu+\tau},$$

то асимптотическая плотность $\Pi(x)$ имеет вид

$$\Pi(x) = \nu e^{-\nu x} = \frac{1}{\varkappa} e^{-\frac{x}{\varkappa}}. \tag{45}$$

Эта формула совпадает с формулой (36), приведенной в § 4. Следовательно, в условиях большой загрузки результаты, полученные в допредельной и асимптотической моделях, совпадают.

Рассмотрим три различных случая: время обслуживания и интервал оповещения о конфликте имеют экспоненциальное, равномерное и детерминированное распределения. В табл. 1 представлены значения максимальной по параметру γ пропускной способности при различных значениях a.

Проведем сравнение математических ожиданий и среднеквадратических отклонений при изменении значений загрузки системы ρ от нуля до S и при таких значениях γ, которые дают максимальную пропускную способность, т. е. когда $\gamma = G^* - S^*$.

Как видно из табл. 2, где А – допредельное математическое ожидание числа заявок в системе, В – асимптотическое математическое ожидание, С – допредельное

Таблица 1

Максимальная пропускная способность

Распределения	Пропускная способность	a			
		1	4	10	100
Детерминированное	G^*	0,558	0,375	0,265	0,095
	S^*	0,192	0,145	0,110	0,044
Равномерное	G^*	0,699	0,417	0,282	0,096
	S^*	0,211	0,152	0,113	0,044
Экспоненциальное	G^*	1,0	0,5	0,316	0,2
	S^*	0,25	0,167	0,120	0,045

Таблица 2

Изменение значений асимптотического и допредельного математического ожидания и среднеквадратического отклонения при различных распределениях в зависимости от загрузки системы

Загрузка	Экспоненциальное				Равномерное				Детерминированное			
ρ	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
0,005	0,0	1,0	0,0	1,0	0,0	0,9	0,3	0,9	0,00	0,8	0,0	0,8
0,05	0,0	1,2	0,2	1,2	0,6	1,1	0,9	1,1	0,05	1,1	0,3	1,1
0,1	0,1	1,6	0,7	1,6	1,3	1,7	1,5	1,7	0,35	1,7	1,0	1,7
0,15	0,7	2,5	1,6	2,5	2,8	3,1	2,8	3,1	2,00	3,9	3,2	3,9
0,18	1,5	3,5	2,7	3,5	5,9	6,2	6,0	6,2	11,6	13,6	13,4	13,6
0,19	2,0	4,1	3,3	4,1	8,9	9,1	9,0	9,1	95,8	96	98,1	98,2
0,21	3,9	6,2	5,5	6,2	188	192	191	192				
0,23	9,9	12	11	12								
0,24	22	25	24	25								
0,25	∞	∞	∞	∞								

среднеквадратическое отклонение, D – асимптотическое среднеквадратическое отклонение, асимптотические результаты являются грубой верхней оценкой для значений среднего числа сообщений в сети, но среднеквадратические отклонения достаточно близки при $\rho > 0,7S$. При этом в системах с экспоненциальными распределениями времени обслуживания и длины интервала оповещения о конфликте асимптотические результаты отличаются от допредельных в большей степени, чем при других распределениях. Также видно, что системы с экспоненциальными распределениями дают лучшие результаты (больше пропускная способность канала связи, в повторной передаче в среднем нуждается меньше сообщений).

Таким образом, можно утверждать, что методы асимптотического анализа лучше применять для нахождения среднеквадратических отклонений числа сообщений в сети, а среднее число заявок искать либо в сетях с большой загрузкой, либо другими методами, например, эргодическими. С другой стороны, значения математического ожидания при небольших ρ очень малы, и хотя асимптотические результаты отличаются от допредельных при малой загрузке достаточно сильно, абсолютная погрешность невелика. Также видно, что асимптотический анализ лучше применять при исследовании сетей связи, которые описываются немарковскими случайными процессами. Но как раз в случае неэкспоненциальных распределений уравнения, описывающие функционирование сети связи, имеют громоздкий и трудноразрешимый вид, тогда как при марковской модели они достаточно просты и разрешимы различными методами.

Следовательно, можно сделать вывод о том, что исследование сетей связи с протоколами случайного множественного доступа можно проводить асимптотическим методом при условии, что время, которое требуется для успешной передачи сообщения в сети, и длина интервала оповещения о конфликте распределены неэкспоненциально, и при этом загрузка канала связи велика.

§ 6. Заключение

Таким образом, в данной работе проведено исследование спутниковой сети связи с динамическим протоколом случайного множественного доступа с оповещением о конфликте, найдены асимптотическое и допредельное распределения числа требований в системе (2), (21), пропускная способность канала связи (19), среднее время доставки сообщений. В результате сравнения результатов, полученных в предельной и допредельной моделях, найдена область применимости метода асимптотического анализа. Показано, что асимптотические результаты являются грубой верхней оценкой для среднего количества сообщений в системе и применимы для исследований сетей связи с неэкспоненциальными распределениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Назаров А. А. , Пичугин С. Б.* Исследование спутниковой сети связи методом математического моделирования//Изв. вузов. Физика. 1992. № 9. С. 120-129.
2. *Баруча-Рид А. Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.:Наука, 1969.
3. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. М.:Машиностроение, 1979.
4. *Назаров А. А.* Асимптотический анализ марковизируемых систем. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991.
5. *Назаров А. А., Бутакова Е. Л.* Распределение времени доставки сообщения в сетях с протоколами случайного множественного доступа // Автоматика и вычисл. техника. 1997. № 6. С. 65–75.
6. *Кениг Д., Штойян Д.* Методы теории массового обслуживания. М.: Радио и связь, 1981.

Поступила в редакцию
03.07.98
После переработки
24.08.99