Д. Ю. Кузнецов, А. А. Назаров, Исследование сети связи, управляемой адаптивным протоколом случайного множественного доступа, в условиях критической загрузки, *Пробл. передачи информ.*, 2004, том 40, выпуск 3, 69–80

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 40 2004 Вып. 3

УДК 621.394.74:519.2

© 2004 г. **Д. Ю. Кузнецов, А. А. Назаров**

ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТИ СВЯЗИ, УПРАВЛЯЕМОЙ АДАПТИВНЫМ ПРОТОКОЛОМ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА, В УСЛОВИЯХ КРИТИЧЕСКОЙ ЗАГРУЗКИ

Исследована математическая модель адаптивной сети связи случайного множественного доступа. Определено значение критической загрузки сети связи и в условиях критической загрузки найдено асимптотическое распределение вероятностей состояний канала передачи информации и числа заявок в источнике повторных вызовов. Доказано, что распределения нормированного числа заявок относятся к классу условных нормальных и экспоненциальных распределений, и показано как условные нормальные распределения в пределе переходят в класс экспоненциальных.

§ 1. Введение

Для обеспечения надежной передачи данных в телекоммуникационных сетях связи требуется проведение их математического моделирования с целью определения оптимальных характеристик передающего оборудования и разработки алгоритмов, гарантирующих доставку сообщений за приемлемое время. Эта проблема наиболее актуальна для сетей случайного доступа, в которых наблюдается существенная нерегулярность функционирования в условиях повышенной загрузки канала связи.

Для стабилизации таких сетей связи предлагаются различные модификации протоколов случайного доступа [1–4]. Так в [1, 2] исследованы, соответственно, асинхронная и синхронная модели сетей случайного множественного доступа, управляемых динамическим протоколом. Динамический протокол дает эффективные результаты при стабилизации сетей связи, но технически не реализуемы, так как каждая абонентская станция должна иметь информацию об общем количестве заявок, требующих повторной передачи. В [4] рассматривается модель синхронной системы случайного множественного доступа, управляемой протоколом дробления. Другой подход к стабилизации сетей связи случайного множественного доступа реализуется адаптивными протоколами [5–8]. Так в [5] рассмотрена модель сети связи, похожая на описываемую в данной статье, но там определяется только одна характеристика сети – пропускная способность.

Действенным инструментом математического моделирования таких сетей связи является аппарат теории массового обслуживания, с помощью которого строятся аналитические модели сетей передачи данных. В отличие от классических моделей массового обслуживания здесь необходимо рассматривать системы массового обслуживания (СМО) с повторными вызовами [9]. Развитие методов исследования систем с повторными вызовами требует определенного внимания, так как в настоящее время системы подобного рода очень широко применяются в моделировании.

Одним из таких методов является метод асимптотического анализа [10]. Этим методом в [6, 7] исследованы две модели адаптивных сетей случайного доступа в условиях перегрузки [6], когда загрузка ρ канала связи больше некоторого критического значения S для сети с конечным числом N абонентских станций (АС), и в условиях большой загрузки [7], когда величина загрузки ρ сходится к S, оставаясь меньше критического значения S при бесконечном числе АС. Отметим, что в последнем случае величина S имеет смысл пропускной способности сети связи.

В данной статье рассмотрены сети связи с числом N абонентских станций в асимптотических условиях $N \to \infty$, когда загрузка ρ сходится к S как сверху, так и снизу, что позволяет от первой модели [6] перейти ко второй [7], а также провести исследования случаев, когда $\rho = S$.

В статье найдены асимптотические распределения вероятностей состояний канала связи и числа заявок в источнике повторных вызовов (ИПВ). Доказано, что распределения нормированного числа заявок относятся к классу условных нормальных и экспоненциальных распределений, и показано как условные нормальные распределения в пределе переходят в класс экспоненциальных.

§ 2. Математическая модель адаптивной сети случайного доступа

В [6] в качестве математической модели адаптивной сети связи случайного доступа предлагается рассмотреть однолинейную СМО, на вход которой поступают заявки от N внешних источников (абонентских станций). Время генерирования заявки каждым источником случайное, имеет экспоненциальную функцию распределения с параметрами ρ/N. Если в момент обращения заявки канал свободен, то заявка принимается к обслуживанию, продолжительность которого случайная с функцией распределения $B(s)$. Если канал занят, то обе заявки искажаются и переходят в источник повторных вызовов; с этого момента начинает рассылаться сигнал оповещения о конфликте, продолжительность которого имеет функцию распределения $A(s)$. Заявки, поступившие во время рассылки сигнала оповещения, переходят в ИПВ, не искажая распространяющегося в канале режима оповещения, по завершении которого канал вновь становится свободным. Задержка сообщений в ИПВ является случайной и имеет распределение, определяемое интенсивностью $1/T$ (смысл параметра T будет пояснен ниже). После случайной задержки в ИПВ заявки вновь обращаются к каналу с повторной попыткой его захвата.

Определим состояние канала величиной k, которая может принимать три значения: $k = 0$, если канал свободен; $k = 1$, если он занят обслуживанием заявки (передачей сообщения); $k = 2$, когда в нем реализуется сигнал оповещения о конфликте. Обозначим через i число заявок в ИПВ.

Параметр T, определяющий интенсивность обращения заявок из ИПВ, совпадает с текущим значением состояния адаптера, который стабилизирует функционирование рассматриваемой неустойчивой сети случайного доступа.

Процесс изменения состояний $T(t)$ адаптера определим следующим образом:

$$T(t+\Delta t) = \begin{cases} T(t) - \alpha\Delta t, & \text{если } k(t) = 0, \\ T(t), & \text{если } k(t) = 1, \\ T(t) + \beta\Delta t, & \text{если } k(t) = 2. \end{cases} \qquad (1)$$

В отличие от [6] здесь рассматривается несколько иная конструкция адаптера (1).

Процесс изменения состояний адаптивной сети связи определим трехмерным случайным процессом $\{k(t), i(t), T(t)\}$.

В данной статье ограничимся исследованием системы, в которой функции распределения $B(s)$ и $A(s)$ являются экспоненциальными со следующими параметрами: $\mu = 1$ для времени обслуживания и $\mu_1 = 1/\nu$ для продолжительности сигнала оповещения о конфликте.

В этом случае рассматриваемый случайный процесс $\{k(t), i(t), T(t)\}$ является марковским, поэтому приведенную математическую модель будем называть марковской. Изложенный ниже метод исследования можно обобщить и для анализа немарковской модели для произвольных функций распределения $B(s)$ и $A(s)$ методами дополнительной переменной [11].

Для исследования построенной адаптивой системы обозначим

$$P\left(k(t)=k, i(t)=i, T \leq T(t)<T+dT\right)=P_k(i, T, t)dT.$$

Аналогично работе [6] нетрудно показать, что распределение вероятностей $P_k(i, T, t)$ в стационарном режиме

$$P_k(i, T, t)=P_k(i, T)$$

удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\left[\rho\left(1-\frac{i}{N}\right)+\frac{i}{T}\right] P_0(i, T)=\alpha \frac{\partial P_0(i, T)}{\partial T}+P_1(i, T)+\frac{1}{\nu} P_2(i, T), \\
&\left[\rho\left(1-\frac{1}{N}-\frac{i}{N}\right)+\frac{i}{T}+1\right] P_1(i, T)=\rho\left(1-\frac{i}{N}\right) P_0(i, T)+\frac{i+1}{T} P_0(i+1, T), \\
&\left[\rho\left(1-\frac{i}{N}\right)+\frac{1}{\nu}\right] P_2(i, T)=-\beta \frac{\partial P_2(i, T)}{\partial T}+\rho\left(1-\frac{i-1}{N}\right) P_2(i-1, T)+ \\
&+\rho\left(1-\frac{1}{N}-\frac{i-2}{N}\right) P_1(i-2, T)+\frac{i-1}{T} P_1(i-1, T).
\end{aligned} \tag{2}$$

Полученная система уравнений с соответствующими краевыми условиями при $i=0$ и условием нормировки для вероятностного распределения $P_k(i, T)$ определяет функционирование марковской модели адаптивной сети случайного доступа с оповещением о конфликте как для конечного ($N<\infty$), так и для бесконечного ($N=\infty$) числа АС.

В [6] проведено исследование этой системы в условиях перегрузки, когда $\rho>S$, где S – некоторое критическое значение, величина которого будет определена ниже. В [7] исследование системы (2) проведено при $N=\infty$ в условиях большой загрузки, когда ρ сходится к S, оставаясь меньше этого значения.

В данной статье исследование системы (2) проводится в асимптотических условиях: $N \rightarrow \infty$ и $\rho \rightarrow S$, причем рассматриваются случаи, когда интенсивность ρ поступления заявок в сеть стремится к критическому значению S как сверху, так и снизу, а также при постоянном $\rho=S$. При этом существенное значение имеет скорость сходимости ρ к S и скорость возрастания $N \rightarrow \infty$, так как при различных условиях асимптотические распределения вероятностей состояний системы будут относиться к двум разным классам: классу условных нормальных распределений и классу экспоненциальных распределений. В данном случае распределения первого из них могут в пределе переходить в распределения второго класса. Тем самым, установлена связь задачи, решенной в [6], с задачей [7], а также получены результаты, определяющие функционирование адаптивных сетей связи в условиях критической загрузки $\rho=S$.

§ 3. Исследование основных характеристик адаптивной сети случайного доступа

Основными характеристиками адаптивной сети случайного доступа назовем распределение вероятностей R_k состояний канала и величину S критической загрузки, которая для сетей с бесконечным числом АС имеет смысл пропускной способности, а для сетей с конечным числом станций определяет область перегрузки, если $\rho>S$, и область номального функционирования, если $\rho<S$.

Уточним, что пропускной способностью S адаптивной сети случайного доступа с бесконечным числом АС будем называть точную верхнюю границу тех значений ρ, для которых в сети существует стационарный режим.

В дальнейших выкладках используется положительный малый параметр ε, его значение будет определено ниже, где в асимптотических условиях $N \to \infty$, $\rho \to S$ будет показано, что либо ε пропорционально $1/\sqrt{N}$ и разности $S-\rho$, либо $\varepsilon^2 N \to \infty$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть при $N \to \infty$ переменные i и T распределения $P(i,T)$ стремятся к бесконечности ($i \to \infty$, $T \to \infty$) таким образом, что для некоторого положительного параметра $\varepsilon \to 0$, такого что $N\varepsilon \to \infty$, конечны выражения*

$$i\varepsilon = x, \quad T\varepsilon = y, \quad \frac{1}{\varepsilon^2}P_k(i,T) = \Pi_k(x,y,\varepsilon) \to \Pi_k(x,y). \tag{3}$$

Тогда распределение вероятностей

$$P(k(t) = k) = R_k$$

состояний канала имеет вид

$$R_0 = \frac{g+1}{\nu g^2 + 2g + 1}, \quad R_1 = \frac{g}{\nu g^2 + 2g + 1}, \quad R_2 = \frac{\nu g^2}{\nu g^2 + 2g + 1}, \tag{4}$$

а величина S определяется равенством

$$S = R_1(g), \tag{5}$$

где g – единственный положительный корень уравнения

$$\nu \frac{g^2}{g+1} = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{6}$$

Доказательство. В системе (2), выполнив замену (3), получим

$$\begin{aligned}
&\left[\rho\left(1 - \frac{x}{N\varepsilon}\right) + \frac{x}{y}\right]\Pi_0(x,y,\varepsilon) = \varepsilon\alpha\frac{\partial\Pi_0(x,y,\varepsilon)}{\partial y} + \Pi_1(x,y,\varepsilon) + \frac{1}{\nu}\Pi_2(x,y,\varepsilon),\\
&\left[\rho\left(1 - \frac{1}{N} - \frac{x}{N\varepsilon}\right) + \frac{x}{y} + 1\right]\Pi_1(x,y,\varepsilon) =\\
&= \rho\left(1 - \frac{x}{N\varepsilon}\right)\Pi_0(x,y,\varepsilon) + \frac{x+\varepsilon}{y}\Pi_0(x+\varepsilon,y,\varepsilon),\\
&\left[\rho\left(1 - \frac{x}{N\varepsilon}\right) + \frac{1}{\nu}\right]\Pi_2(x,y,\varepsilon) =\\
&= -\varepsilon\beta\frac{\partial\Pi_2(x,y,\varepsilon)}{\partial y} + \rho\left(1 - \frac{x-\varepsilon}{N\varepsilon}\right)\Pi_2(x-\varepsilon,y,\varepsilon) +\\
&+ \rho\left(1 - \frac{1}{N} - \frac{x-2\varepsilon}{N\varepsilon}\right)\Pi_1(x-2\varepsilon,y,\varepsilon) + \frac{x-\varepsilon}{y}\Pi_1(x-\varepsilon,y,\varepsilon).
\end{aligned} \tag{7}$$

В этой системе выполним предельный переход при $\rho \to S$, $N \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, $N\varepsilon \to \infty$, $\Pi_k(x,y,\varepsilon) \to \Pi_k(x,y)$. Обозначив $S + \dfrac{x}{y} = G$, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&G\Pi_0(x,y) = \Pi_1(x,y) + \frac{1}{\nu}\Pi_2(x,y),\\
&(G+1)\Pi_1(x,y) = G\Pi_0(x,y),\\
&\frac{1}{\nu}\Pi_2(x,y) = G\Pi_1(x,y)
\end{aligned} \tag{8}$$

относительно $\Pi_k(x,y)$, нетривиальное решение которой можно записать с точностью до мультипликативной составляющей в виде

$$\Pi_k(x,y) = R_k \Pi(x,y), \tag{9}$$

где величины R_k, удовлетворяющие условию нормировки $R_0 + R_1 + R_2 = 1$, имеют вид (4) при $g = G$.

В системе (7) разложим функции $\Pi_k(x \pm \varepsilon, y, \varepsilon)$ в ряд по приращениям аргумента x с точностью до $o(\varepsilon)$. Сложив все три уравнения, получим

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y}\Pi_0(x,y,\varepsilon) - \rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)\Pi_2(x,y,\varepsilon) - \left[2\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+\frac{x}{y}\right]\Pi_1(x,y,\varepsilon)\right\} +$$
$$+\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left\{\alpha\Pi_0(x,y,\varepsilon) - \beta\Pi_2(x,y,\varepsilon)\right\} = o(\varepsilon).$$

Поделив левую и правую части этого равенства на ε, в тех же предельных условиях, что и выше, используя равенство (9), получим относительно $\Pi(x,y)$ уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\frac{x}{y}R_0 - SR_2 - \left(2S+\frac{x}{y}\right)R_1\right]\Pi(x,y)\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\alpha R_0 - \beta R_2\right]\Pi(x,y)\right\} = 0,$$

которое совпадает с вырожденным уравнением Фоккера – Планка для плотности распределения вероятностей $\Pi(x,y)$ некоторого двумерного стационарного диффузионного процесса, коэффициенты диффузии которого равны нулю. Следовательно, также равны нулю и его коэффициенты переноса, поэтому можно записать следующие равенства:

$$\begin{cases} (G-S)R_0 - SR_2 - (S+G)R_1 = 0, \\ \alpha R_0 - \beta R_2 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Из второго равенства этой системы, используя равенства (4) при $g = G$, получим уравнение

$$\nu\frac{G^2}{G+1} = \frac{\alpha}{\beta},$$

решение G которого и обозначим через g. Тем самым, равенства (4) доказаны.

Первое уравнение системы (10), используя условие нормировки для R_k, запишем в виде

$$g(R_0 - R_1) - S = 0.$$

Из (4) очевидно следует, что $g(R_0 - R_1) = R_1$, поэтому имеет место равенство (5), определяющее значение S критической загрузки адаптивной сети случайного доступа. ▲

Следствие 1. *Переменные x, y связаны линейным соотношением*

$$x = (g - S)y. \tag{11}$$

Доказательство. Так как $g = G$, а $G = S + \dfrac{x}{y}$, то (11), очевидно, выполнено.

Еще раз отметим, что в равенстве (11) g и S – постоянные величины, определяемые уравнением (6) для g и равенством (5) для S.

Следствие 2. *Максимальное значение величины S определяется равенством*

$$S^* = \frac{1}{2\left(1+\sqrt{\nu}\right)} \tag{12}$$

и достигается для тех значений α и β параметров адаптера, которые удовлетворяют соотношению

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{\nu}}{1+\sqrt{\nu}}. \tag{13}$$

Доказательство. Так как $S = R_1(g)$, то $S^* = \max\limits_{0\le g<\infty} R_1(g)$. В силу того, что $R_1(g) = \dfrac{g}{\nu g^2 + 2g + 1}$, максимальное значение $R_1(g)$ достигается при $g = 1/\sqrt{\nu}$, следовательно, имеет место равенство (12). А так как $\dfrac{\alpha}{\beta} = \nu\dfrac{g^2}{g+1}$, то положив $g = 1/\sqrt{\nu}$, получим равенство (13).

Отметим, что при найденных значениях параметров α и β адаптера, максимизирующих значение величины S, распределение вероятностей R_k состояний канала имеет вид

$$R_0 = \frac{1}{2}, \quad R_1 = \frac{1}{2\,(1+\sqrt{\nu})}, \quad R_2 = \frac{\sqrt{\nu}}{2\,(1+\sqrt{\nu})},$$

что показывает сравнительно слабую зависимость основных характеристик S и R_k адаптивной сети связи от основного параметра ν такой сети при оптимальном выборе значений параметров α и β адаптера.

Далее перейдем к более детальному исследованию адаптивной сети случайного доступа.

§ 4. Исследование распределения вероятностей состояний адаптивной сети случайного доступа

При более детальном исследовании математической модели рассматриваемой сети связи воспользуемся тем результатом, что переменные x и y, характеризующие состояние ИПВ и адаптера в асимптотических условиях

$$N \to \infty, \quad \varepsilon \to 0, \quad N\varepsilon \to \infty, \quad \rho \to S, \tag{14}$$

связаны линейным соотношением (11), поэтому асимптотическое распределение вероятностей $\Pi_k(x, y, \varepsilon)$ можно определить в виде

$$\Pi_k(x, y, \varepsilon) = H_k(x, \varepsilon). \tag{15}$$

Нашей задачей является нахождение асимптотического распределения

$$H_k(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} H_k(x, \varepsilon).$$

Из равенств (9) и (15) очевидно следует, что

$$H_k(x) = R_k H(x), \tag{16}$$

т.е. двумерное распределение $H_k(x)$ состояний сети связи факторизуется и представляет собой произведение распределения R_k состояний канала и асимптотической плотности распределения $H(x)$ нормированного $i\varepsilon$ числа заявок в ИПВ. Отметим, что из равенства (16) следует в асимптотических условиях (14) стохастическая независимость состояний канала и ИПВ.

Можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *При $\rho = S - \varepsilon\gamma$, где $\gamma \in (-\infty, +\infty)$, в асимптотических условиях* (14) *плотность распределения $H(x)$ имеет вид*

$$H(x) = C\exp\left\{-\frac{(x+\eta\gamma)^2}{2b\eta}\right\}, \qquad x \ge 0,$$

где C – нормирующая константа, $\eta = \dfrac{N\varepsilon^2}{S}$, а положительный параметр b определяется равенством (27).

Доказательство. В системе (7) разложим функции $\Pi_k(x \pm \varepsilon, y, \varepsilon)$ в ряд по приращениям аргумента x с точностью до $o(\varepsilon^2)$. Получим

$$\left[\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+\frac{x}{y}\right]\Pi_0(x,y,\varepsilon)=\varepsilon\alpha\frac{\partial\Pi_0(x,y,\varepsilon)}{\partial y}+\Pi_1(x,y,\varepsilon)+\frac{1}{\nu}\Pi_2(x,y,\varepsilon),$$
$$\left[\rho\left(1-\frac{1}{N}-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+\frac{x}{y}+1\right]\Pi_1(x,y,\varepsilon)=$$
$$=\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)\Pi_0(x,y,\varepsilon)+\frac{x}{y}\Pi_0(x,y,\varepsilon)+$$
$$+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y}\Pi_0(x,y,\varepsilon)\right\}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\frac{x}{y}\Pi_0(x,y,\varepsilon)\right\}+o(\varepsilon^2),$$
$$\frac{1}{\nu}\Pi_2(x,y,\varepsilon)=-\varepsilon\beta\frac{\partial\Pi_2(x,y,\varepsilon)}{\partial y}-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)\Pi_2(x,y,\varepsilon)\right\}+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)\Pi_2(x,y,\varepsilon)\right\}+\rho\left(1-\frac{1}{N}-\frac{x}{N\varepsilon}\right)\Pi_1(x,y,\varepsilon)-$$
$$-2\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)\Pi_1(x,y,\varepsilon)\right\}+\frac{4\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)\Pi_1(x,y,\varepsilon)\right\}+$$
$$+\frac{x}{y}\Pi_1(x,y,\varepsilon)-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y}\Pi_1(x,y,\varepsilon)\right\}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\frac{x}{y}\Pi_1(x,y,\varepsilon)\right\}+o(\varepsilon^2).$$

Учитывая, что переменные x и y связаны линейной зависимостью (11), а отношение $\dfrac{x}{y} = g - S$ постоянно, выполнив в последней системе замену (15), получим

$$\left[\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S\right]H_0(x,\varepsilon)=\varepsilon\alpha(g-S)\frac{\partial H_0(x,\varepsilon)}{\partial x}+H_1(x,\varepsilon)+\frac{1}{\nu}H_2(x,\varepsilon),$$
$$\left[\rho\left(1-\frac{1}{N}-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S+1\right]H_1(x,\varepsilon)=$$
$$=\left[\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S\right]H_0(x,\varepsilon)+\varepsilon(g-S)\frac{\partial H_0(x,\varepsilon)}{\partial x}+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}(g-S)\frac{\partial^2 H_0(x,\varepsilon)}{\partial x^2}+o(\varepsilon^2),$$
$$\frac{1}{\nu}H_2(x,\varepsilon)=-\varepsilon\beta(g-S)\frac{\partial H_2(x,\varepsilon)}{\partial x}-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)H_2(x,\varepsilon)\right\}+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)H_2(x,\varepsilon)\right\}+\left[\rho\left(1-\frac{1}{N}-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S\right]H_1(x,y,\varepsilon)-$$
$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[2\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S\right]H_1(x,\varepsilon)\right\}+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left[4\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S\right]H_1(x,\varepsilon)\right\}+o(\varepsilon^2). \tag{17}$$

Выполнив в этой системе предельный переход (14), для функций $H_k(x)$ получим систему линейных алгебраических уравнений, совпадающую с (8), следовательно, действительно $H_k(x)$ имеют вид (16), где R_k определяются равенствами (4).

Далее, сложив все три уравнения системы (17), получим

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left\{\alpha(g-S)H_0(x,\varepsilon)+(g-S)H_0(x,\varepsilon)-\beta(g-S)H_2(x,\varepsilon)-\right.$$
$$\left.-\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)-\left[2\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S\right]H_1(x,\varepsilon)\right\}+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{(g-S)H_0(x,\varepsilon)+\rho H_2(x,\varepsilon)+(4\rho+g-S)H_1(x,\varepsilon)\right\}=o(\varepsilon^2). \tag{18}$$

Учитывая, что $\rho=S-\varepsilon\gamma$, запишем

$$\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)=S-\varepsilon\left(S\frac{x}{N\varepsilon^2}+\gamma\right)+o(\varepsilon).$$

Обозначив $\eta=\dfrac{N\varepsilon^2}{S}$, последнее равенство представим в следующем виде:

$$\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)=S-\varepsilon\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)+o(\varepsilon). \tag{19}$$

Подставив это выражение в (18), получим

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\{(g-S)[\alpha H_0(x,\varepsilon)-\beta H_2(x,\varepsilon)]+(g-S)H_0(x,\varepsilon)-SH_2(x,\varepsilon)-$$
$$-(S+g)H_1(x,\varepsilon)\}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)(H_2(x,\varepsilon)+2H_1(x,\varepsilon))\right\}+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{(g-S)H_0(x,\varepsilon)+SH_2(x,\varepsilon)+(3S+g)H_1(x,\varepsilon)\right\}=o(\varepsilon^2). \tag{20}$$

Стоящее в фигурных скобках выражение первого слагаемого этого равенства в силу системы (10) при $\varepsilon\to 0$ стремится к нулю, т.е. является величиной бесконечно малой. Определим порядок этой величины относительно параметра ε. Для этого систему (17) перепишем с точностью до $o(\varepsilon)$. Получим систему

$$\left[\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S\right]H_0(x,\varepsilon)-H_1(x,\varepsilon)-\frac{1}{\nu}H_2(x,\varepsilon)=\varepsilon\alpha(g-S)\frac{\partial H_0(x,\varepsilon)}{\partial x},$$
$$\left[\rho\left(1-\frac{1}{N}-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S+1\right]H_1(x,\varepsilon)-$$
$$-\left[\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S\right]H_0(x,\varepsilon)=\varepsilon(g-S)\frac{\partial H_0(x,\varepsilon)}{\partial x}+o(\varepsilon),$$
$$\frac{1}{\nu}H_2(x,\varepsilon)-\left[\rho\left(1-\frac{1}{N}-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S\right]H_1(x,y,\varepsilon)=$$
$$=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left\{\beta(g-S)H_2(x,\varepsilon)+SH_2(x,\varepsilon)+(S+g)H_1(x,\varepsilon)\right\}+o(\varepsilon),$$

в которую подставим выражение (19):

$$
\begin{aligned}
&gH_0(x,\varepsilon)-H_1(x,\varepsilon)-\frac{1}{\nu}H_2(x,\varepsilon)=\varepsilon\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)H_0(x,\varepsilon)+\varepsilon\alpha(g-S)\frac{\partial H_0(x,\varepsilon)}{\partial x}+o(\varepsilon),\\
&(g+1)H_1(x,\varepsilon)-gH_0(x,\varepsilon)=\\
&=\varepsilon\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)(H_1(x,\varepsilon)-H_0(x,\varepsilon))+\varepsilon(g-S)\frac{\partial H_0(x,\varepsilon)}{\partial x}+o(\varepsilon),\\
&\frac{1}{\nu}H_2(x,\varepsilon)-gH_1(x,y,\varepsilon)=-\varepsilon\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)H_1(x,\varepsilon)-\\
&-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left\{\beta(g-S)H_2(x,\varepsilon)+SH_2(x,\varepsilon)+(S+g)H_1(x,\varepsilon)\right\}+o(\varepsilon).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Решение этой системы будем искать в виде

$$
H_k(x,\varepsilon)=R_kH(x)+\varepsilon h_k(x)+o(\varepsilon),
\tag{22}
$$

тогда систему (21) можно переписать следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&gh_0(x)-h_1(x)-\frac{1}{\nu}h_2(x)=\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)R_0H(x)+\alpha(g-S)R_0H'(x),\\
&(g+1)h_1(x)-gh_0(x)=\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)(R_1-R_0)H(x)+(g-S)R_0H'(x),\\
&\frac{1}{\nu}h_2(x)-gh_1(x)=\\
&=-\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)R_1H(x)-\left\{\beta(g-S)R_2+SR_2+(S-g)R_1\right\}H'(x).
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Таким образом, относительно h_k получена неоднородная система линейных алгебраических уравнений с определителем системы, равным нулю, но в силу равенства (10) ранги расширенной и собственной матриц системы (23) совпадают. Тем самым, для системы (23) существует решение h_k, определяемое с точностью до произвольной составляющей, в качестве которой выберем h_1. Определим h_0 из второго уравнения системы (23) в виде

$$
h_0(x)=\frac{(g+1)}{g}h_1(x)+\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)\frac{(R_0-R_1)}{g}H(x)-\frac{g-S}{g}R_0H'(x).
\tag{24}
$$

Подставляя это выражение в первое уравнение системы (23), определим h_2 в виде

$$
h_2(x)=\nu gh_1(x)-\nu\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)R_1H(x)-\nu(\alpha+1)(g-s)R_0H'(x).
\tag{25}
$$

Подставляя разложение (22) в (20) и учитывая равенства системы (10), выполнив некоторые преобразования, запишем

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left\{(g-S)\left[\alpha h_0(x)-\beta h_2(x)\right]+(g-s)h_0(x)-Sh_2(x)-(S+g)h_1(x)\right\}+\\
&+(R_2+2R_1)\frac{d}{dx}\left\{\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)H(x)\right\}+\\
&+\frac{1}{2}\left\{(g-S)R_0+SR_2+(3S+g)R_1\right\}\frac{d^2H(x)}{dx^2}=0.
\end{aligned}
$$

Подставляя в это равенство выражения (24) и (25) для $h_0(x)$ и $h_2(x)$, получим для функции $H(x)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$b\frac{d^2H(x)}{dx^2} + \frac{d}{dx}\left\{\left(\frac{x}{\eta} + \gamma\right)H(x)\right\} = 0, \tag{26}$$

где

$$b = \frac{\frac{\alpha}{g^2}(g + \alpha(g+1))(g-S)^2R_0 + R_1\frac{1+\nu g(\alpha+1)}{g}(g-S)R_0 + SR_1}{(g-S)\frac{\alpha}{g}(2R_0 - R_1) + 2R_1\frac{1-R_0}{g} + 2R_2 + 2R_1}. \tag{27}$$

Так как $N\varepsilon \to \infty$, а для $x = i\varepsilon$, очевидно, выполняются неравенства

$$0 \le i\varepsilon = x \le N\varepsilon \to \infty,$$

то для плотности распределения вероятностей $H(x)$ условие нормировки имеет вид

$$\int_0^\infty H(x)dx = 1, \tag{28}$$

а в силу необходимого условия сходимости несобственного интеграла в (28) для $H(x)$ выполняется соотношение

$$\lim_{x\to\infty} H(x) = 0,$$

поэтому, интегрируя (26) по x, для $H(x)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$bH'(x) + \left(\frac{x}{\eta} + \gamma\right)H(x) = 0,$$

решение которого, очевидно, имеет вид

$$H(x) = C\exp\left\{-\frac{(x+\eta\gamma)^2}{2b\eta}\right\} \quad \text{при} \quad x \ge 0. \tag{29}$$

Здесь

$$C = 1\Big/\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(x+\eta\gamma)^2}{2b\eta}\right\}dx = 1\Big/\sqrt{b\eta}\int_{\gamma\sqrt{\frac{\eta}{b}}}^\infty \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}dy. \quad \blacktriangle \tag{30}$$

Из равенства (29), очевидно, следует, что нормированное число $i\varepsilon$ заявок в ИПВ имеет условно нормальное распределение. При этом, если $\gamma < 0$, то плотность распределения $H(x)$ имеет максимальное значение, достигаемое в точке $x = -\eta\gamma$. Если $\gamma \ge 0$, то плотность $H(x)$ с ростом x монотонно убывает.

Рассмотрим случай, когда $N\varepsilon^2$ (а следовательно, η) неограниченно возрастает в асимптотических условиях $N \to \infty$, $\varepsilon \to 0$. Как следует из (29) и (30), при $\gamma < 0$, т.е. когда $\rho = S - \varepsilon\gamma > S$, предельное при $\eta \to \infty$ значение есть $H(x) \equiv 0$, и в этом случае ($\rho \ge S$) для рассматриваемой адаптивной сети связи не существует стационарных режимов.

При $\gamma > 0$, т.е. когда $\rho = S - \varepsilon\gamma < S$, при $\eta \to \infty$ функция $H(x)$ имеет вид

$$H(x) = \frac{\gamma}{b}\exp\left\{-\frac{\gamma}{b}x\right\} \quad \text{при} \quad x \ge 0.$$

Следовательно, асимптотическое распределение $H(x)$ является экспоненциальным распределением с параметром γ/b, что совпадает с результатами, полученными в работе [7].

§ 5. Выбор значения нормирующего параметра

Наконец, можно уточнить значение нормирующего параметра ε, определяемого двумя равенствами

$$\rho = S - \varepsilon\gamma, \qquad \eta = \frac{N\varepsilon^2}{S}.$$

Из рассуждений данной статьи следует, что асимптотические условия

$$\rho \to S \quad \text{и} \quad N \to \infty$$

должны быть согласованы следующим образом: если η – конечно, то ε можно положить равным $1/\sqrt{N}$, при этом $\eta = 1/S$, параметр γ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, а $\rho = S - \dfrac{\gamma}{\sqrt{N}}$, т.е. загрузка ρ может быть больше, меньше, либо равной критическому значению S.

Отметим, что в работе [6] рассматривалось условие $\rho > S$ – условие перегрузки, значение номирующего параметра $\varepsilon = 1/\sqrt{N}$, при этом асимптотическое распределение $H(x)$ являлось, безусловно, нормальным.

Если η неограниченно возрастает, т.е. $N\varepsilon^2 \to \infty$, то асимптотическое распределение $H(x)$ существует лишь при условии $\gamma > 0$, и в этом случае, полагая $\gamma = 1$, в качестве малого параметра ε можно выбирать $\varepsilon = S - \rho$, как это было определено в работе [7]. Как показано в данной статье, для асимптотических условий

$$\rho \to S \quad \text{и} \quad N \to \infty$$

должно выполняться соотношение

$$\lim_{\rho \to S,\, N \to \infty} N(S-\rho)^2 = \infty.$$

В этом случае результаты данной статьи совпадают с результатами [7].

§ 6. Заключение

Таким образом, в статье проведено исследование математической модели адаптивной сети связи случайного доступа в условиях критической загрузки. Найдены основные характеристики сети, такие как величина S критической загрузки (5), распределение вероятностей R_k состояний канала (4) и плотность распределения $H(x)$ вероятностей значений нормированного $i\varepsilon$ числа заявок в ИПВ (29). Показано, что это распределение относится к одному из классов: либо к классу условно нормальных распределений, либо к классу экспоненциальных распределений, и показано как можно от распределений первого класса перейти к распределениям второго класса.

В данной статье рассмотрена стационарная марковская модель сети связи. Представляется целесообразным провести исследование немарковских моделей для произвольных функций распределения $B(s)$ и $A(s)$ времени передачи сообщения и продолжительности сигнала оповещения о конфликте, а также исследование переходных режимов в этих математических моделях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Назаров А.А., Шохор С.Л.* Исследование управляемого несинхронного множественного доступа в спутниковых сетях связи с оповещением о конфликте // Пробл. передачи информ. 2000. Т. 36. № 1. С. 77–89.
2. *Назаров А.А., Одышев Ю.Д.* Исследование сети связи с динамическим протоколом “синхронная Алоха” в условиях большой загрузки // Автоматика и вычислительная техника. 2001. № 1. С. 77–84.
3. *Хомичков И.И.* Системы массового обслуживания с повторными вызовами и вероятность потери при сдвоенных соединяющих // Докл. АН Беларуси. 1998. Т. 42. № 2. С. 36–39.
4. *Цыбаков Б.С., Михайлов В.А.* Случайный множественный доступ пакетов. Алгоритм дробления // Пробл. передачи информ. 1980. Т. 16. № 4. С. 65–79.
5. *Михайлов В.А.* Геометрический анализ устойчивости цепей Маркова в $\mathbb{R}^n_+$ и его приложение к вычислению пропускной способности адаптивного алгоритма случайного множественного доступа // Пробл. передачи информ. 1988. Т. 24. № 1. С. 61–73.
6. *Кузнецов Д.Ю., Назаров А.А.* Исследование сетей связи с конечным числом абонентских станций, управляемых адаптивными протоколами случайного множественного доступа в условиях перегрузки // Автоматика и телемеханика. 1999. № 12. С. 99–113.
7. *Кузнецов Д.Ю., Назаров А.А.* Исследование сетей связи с адаптивными протоколами случайного множественного доступа в условиях большой загрузки для бесконечного числа станций // Автоматика и вычислительная техника. 2003. № 3. С. 55–64.
8. *Кузнецов Д.Ю., Назаров А.А.* Адаптивные сети случайного доступа. Томск: Дельтаплан, 2002.
9. *Falin G.I., Temppleton J.G.C.* Retrial queues. London: Chapman and Hall, 1997.
10. *Назаров А.А.* Асимптотический анализ марковизируемых систем. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991.
11. *Кениг Д., Штойян Д.* Методы теории массового обслуживания. М: Радио и связь, 1981.

Кузнецов Дмитрий Юрьевич
Томский политехнический университет
dima@ido.tpu.edu.ru
Назаров Анатолий Андреевич
Томский государственный университет
nazarov@fpmk.tsu.ru

Поступила в редакцию
11.08.2003
После переработки
13.04.2004