T. A. Bodnar, On steady periodic waves on the surface of a fluid of finite depth, *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, 2011, Volume 52, Issue 3, 60–67

УДК 517+532

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Т. А. Боднарь

Технологический институт Алтайского государственного технического университета,
659305 Бийск
E-mail: bta@bti.secna.ru

Найдено решение интегрального уравнения Некрасова и определена область его существования в теории распространения установившихся нелинейных волн по поверхности жидкости конечной глубины. Построены зависимости для расчета профиля волн и скоростей их распространения как функций отношения глубины жидкости к длине волны. Проведено сравнение скоростей, полученных с использованием линейной и нелинейной теорий распространения волн.

Ключевые слова: интегральное уравнение, нелинейный оператор, точка бифуркации, функция тока, комплексный потенциал.

1. Решение интегрального уравнения Некрасова для жидкости конечной глубины. Задача о периодических нелинейных волнах на поверхности жидкости конечной глубины h, представляющая собой обобщение задачи Некрасова ($h = \infty$) [1], сформулирована в работе [2]. Там же получено интегральное уравнение, отличающееся от интегрального уравнения Некрасова лишь видом ядра, и доказано существование его решения. Ниже кратко изложен способ получения данного интегрального уравнения.

Рассмотрим установившиеся волны, движущиеся по поверхности жидкости глубиной h, измеренной в отсутствие волн, слева направо со скоростью c. Начало координат O находится на вертикальной линии, проходящей через гребень какой-либо волны на расстоянии h от дна, ось Oy направлена вертикально вверх, ось Ox — вправо (рис. 1). В системе координат, связанной с волной, дно движется справа налево со скоростью c.

При конечной глубине жидкости h область $OACDEB$ одной волны длиной λ сверху ограничена неизвестным профилем волны, слева и справа — вертикалями, проходящими через две соседние впадины; снизу — плоским твердым дном. В плоскости комплексной переменной $z = x+iy$ эта область отображается на кольцо $OACDEB$ с внешним радиусом $r = 1$, внутренним радиусом r_0 и расположенными на небольшом расстоянии друг от друга линиями разреза AC, BE вдоль вещественной оси $-1 \leqslant \xi \leqslant -r_0$ в плоскости комплексной переменной $u = \xi + i\eta$ (см. рис. 1).

На границе области $OACDEB$ комплексной плоскости u функция тока ψ и потенциал скоростей φ удовлетворяют следующим соотношениям: на внешней окружности $\psi = 0$, $-c\lambda/2 < \varphi < c\lambda/2$; на внутренней окружности $\psi = ch$, $-c\lambda/2 < \varphi < c\lambda/2$; на верхнем берегу разреза $0 < \psi < ch$, $\varphi = c\lambda/2$; на нижнем берегу $0 < \psi < ch$, $\varphi = -c\lambda/2$. Этим соотношениям удовлетворяет также комплексный потенциал волны $w = \varphi + i\psi$, который определяется формулой $w = (c\lambda/(2\pi i)) \ln u$. Условия на внутренней окружности позволяют установить связь радиуса r_0 с глубиной жидкости h и длиной волны λ: $h_\lambda = h/\lambda = -(2\pi)^{-1} \ln r_0$.

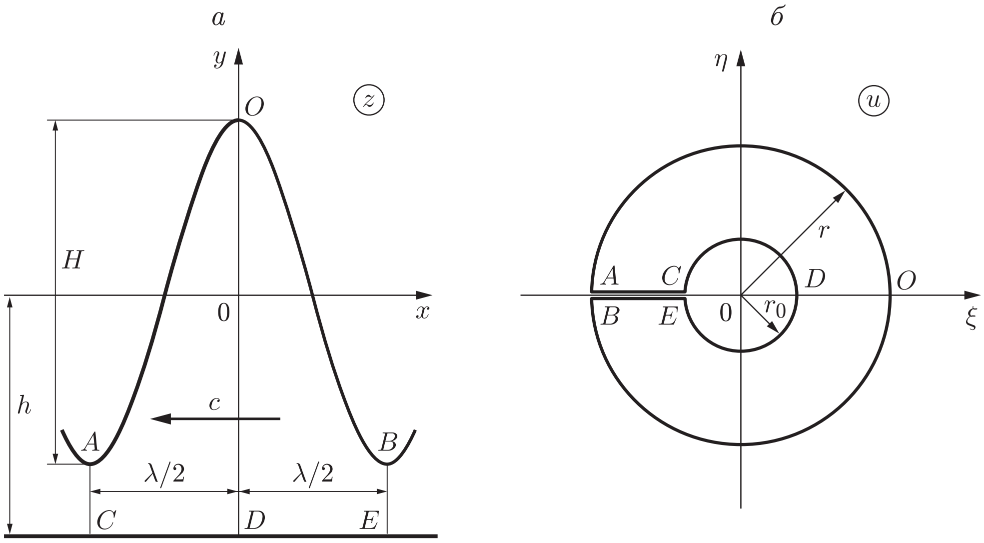

Рис. 1. Профиль волны в плоскостях комплексных переменных z (a) и u ($б$)

Применение приемов, аналогичных использованным при выводе уравнения Некрасова для угла $\omega(\theta)$ между вектором скорости и горизонталью, позволило получить уравнение [2]

$$\omega(\theta) = \int\limits_0^{2\pi} K(\theta, \sigma, h_\lambda) \frac{\mu(h_\lambda) \sin \omega(\sigma)}{1 + \mu(h_\lambda) \int\limits_0^{\sigma} \sin \omega(s)\, ds}\, d\sigma \tag{1.1}$$

с ядром

$$K(\theta, \sigma, h_\lambda) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - r_0^{2k}}{1 + r_0^{2k}} \frac{\sin k\theta \sin k\sigma}{k\pi} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{th}(2k\pi h_\lambda) \frac{\sin k\theta \sin k\sigma}{k\pi}.$$

В [2] утверждается, что доказательство существования решения интегрального уравнения Некрасова ($h_\lambda = \infty$) аналогично доказательству существования решения уравнения (1.1).

Целью данной работы является получение решения уравнения (1.1) относительно неизвестных функций $\omega(\theta)$, $\mu(h_\lambda)$ и определение для каждого фиксированного значения глубины $h \in (0, \infty)$ области значений длины волны λ, при которых решение (1.1) существует.

Для решения уравнения (1.1) используем метод [3], основанный на замене ядра $K(\theta, \sigma, h_\lambda)$ на укороченное ядро $K_n(\theta, \sigma, h_\lambda)$. Уравнение (1.1) отличается от уравнения Некрасова только видом ядра, что не оказывает влияния на процедуру решения интегрального уравнения, приведенную в [3]. Поэтому ниже приводятся основные обозначения и формулы из работы [3], записанные с учетом наличия в (1.1) параметра h_λ:

$$\omega_n(\theta) = A_n[\omega_n, h_\lambda, \mu_{1n}(h_\lambda)]. \tag{1.2}$$

Здесь

$$A_n[\omega_n(\theta), h_\lambda, \mu_{1n}(h_\lambda)] = \int\limits_0^{2\pi} K_n(\theta, \sigma, h_\lambda) \frac{\mu_{1n}(h_\lambda) \sin \omega_n(\sigma)}{1 + \mu_{1n}(h_\lambda) \int\limits_0^{\sigma} \sin \omega_n(s)\, ds}\, d\sigma,$$

$$K_n(\theta,\sigma,h_\lambda) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{th}(2k\pi h_\lambda)\,\frac{\sin k\theta \sin k\sigma}{k\pi},$$

$\mu_{1n}(h_\lambda)$ — решение уравнения (1.1) относительно параметра μ в случае укороченного ядра $K_n(\theta,\sigma,h_\lambda)$ в окрестности первой точки бифуркации линеаризованного уравнения с собственным значением $\mu_1 = 3\operatorname{cth}(2\pi h_\lambda)$ [1]. Введем обозначения

$$f_n(\sigma) = \sin\omega_n(\sigma), \qquad g_n(\sigma) = \int\limits_0^{\sigma} \sin\omega_n(s)\,ds$$

и представим нелинейный оператор $A_n[\omega_n(\theta), h_\lambda, \mu_{1n}(h_\lambda)]$ в виде суммы линейного по параметру $\mu_{1n}(h_\lambda)$ оператора

$$\mu_{1n}(h_\lambda)B_n[\omega_n(\theta),h_\lambda] = \mu_{1n}(h_\lambda)\int\limits_0^{2\pi} K_n(\theta,\sigma,h_\lambda)\,\frac{f_n(\sigma)}{1+g_n(\sigma)}\,d\sigma$$

и нелинейного по тому же параметру оператора

$$C[\omega_n(\theta),h_\lambda,\mu_{1n}(h_\lambda)] = \int\limits_0^{2\pi} K_n(\theta,\sigma,(h_\lambda))\,\frac{f_n(\sigma)g_n(\sigma)\mu_{1n}(h_\lambda)(1-\mu_{1n}(h_\lambda))}{(1+g_n(\sigma))(1+\mu_{1n}(h_\lambda)g_n(\sigma))}\,d\sigma.$$

Тогда уравнение (1.2) можно записать в виде

$$\omega_n(\theta) = \mu_{1n}(h_\lambda)B_n[\omega_n(\theta),h_\lambda] + C[\omega_n(\theta),h_\lambda,\mu_{1n}(h_\lambda)]. \tag{1.3}$$

Решением эквивалентных уравнений (1.2), (1.3) являются параметр $\mu_{1n}(h_\lambda)$ и тригонометрический полином

$$\omega_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin k\theta \tag{1.4}$$

с коэффициентами a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющими интегральным уравнениям

$$a_k = \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{th}(2k\pi h_\lambda)\,\frac{\mu_{1n}(h_\lambda)\sin k\sigma f_n(\sigma)}{3k\pi(1+\mu_{1n}(h_\lambda)g_n(\sigma))}\,d\sigma. \tag{1.5}$$

Принимая в качестве нулевого приближения значение $\mu_{11}(h_\lambda) = 1$, можно показать, что при $n = 1$ правая часть уравнения (1.3) является линейной функцией параметра $\mu_{11}(h_\lambda)$:

$$\omega_1^0(\theta) = \mu_{11}^0(h_\lambda)B_1[\omega_1^0(\theta),h_\lambda]. \tag{1.6}$$

Уравнение (1.6) представим следующим образом:

$$\omega_1^0(\theta) = \mu_{11}^0(h_\lambda)\operatorname{th}(2\pi h_\lambda)B_1[\omega_1^0(\theta)]. \tag{1.7}$$

Здесь

$$B_1[\omega_1^0(\theta)] = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\theta\sin\sigma f_1(\sigma)}{3\pi(1+g_1(\sigma))}\,d\sigma.$$

В соответствии с [3] уравнение (1.7) имеет единственное решение

$$\omega_1^0 = a_1^0 \sin\theta, \qquad \mu_{11}^0(h_\lambda) = \mu_{11}^0(\infty)\operatorname{cth}(2\pi h_\lambda),$$

где $a_1^0 = 0{,}047\,452$; $\mu_{11}^0(\infty) = \pi$. Также в работе [3] доказана теорема об условиях существования и единственности решения уравнения (1.2) для жидкости бесконечной глубины ($h_\lambda = \infty$). Эта теорема может быть обобщена на случай конечной глубины жидкости [4]. Действительно, функция $\omega_1^0(\theta)$ является решением уравнения (1.2) при $n = 1$, если

$$A_1[\omega_1^0(\theta), \mu_{11}(h_\lambda)] - \mu_{11}^0(h_\lambda) B_1[\omega_1^0] = 0, \tag{1.8}$$

где

$$A_1[\omega_1^0(\theta), \mu_{11}(h_\lambda)] = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_{11}(h_\lambda) \sin\theta \sin\sigma f_1(\sigma)}{3\pi(1 + \mu_{11}(h_\lambda) g_1(\sigma))}\, d\sigma.$$

Подынтегральные функции уравнения (1.8) удовлетворяют тем же условиям, что и в теореме, доказанной в [3], поэтому решение уравнения (1.2) в точке $\omega_1^0(\theta) = a_1^0 \sin\theta$ существует и единственно, если

$$\mu_{11}^0(\infty) \leqslant \mu_{11}^0(h_\lambda) \leqslant A_1[\omega_1^0(\theta), \infty] B_1^{-1}[\omega_1^0(\theta)], \tag{1.9}$$

где

$$A_1[\omega_1^0(\theta), \infty] = \lim_{\mu_{11}(h_\lambda) \to \infty} A_1[\omega_1^0(\theta), \mu_{11}(h_\lambda)] = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta \sin\sigma f_1(\sigma)}{3\pi g_1(\sigma)}\, d\sigma.$$

Подставляя в неравенства (1.9) решение уравнения (1.7) для $\mu_{11}^0(h_\lambda)$, можно показать, что первое неравенство выполняется при любых значениях $\mu_{11}^0(h_\lambda) \geqslant \mu_{11}^0(\infty)$, $h_\lambda \geqslant 0$, а второе (с учетом того, что $\operatorname{cth}(2\pi h_\lambda)$ является монотонно убывающей функцией h_λ) — при условии

$$h_\lambda^* \leqslant h_\lambda \leqslant \infty, \tag{1.10}$$

где

$$h_\lambda^* = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{A_1[\omega_1^0(\theta), \infty] + \mu_{11}^0(\infty) B_1[\omega_1^0(\theta)]}{A_1[\omega_1^0(\theta), \infty] - \mu_{11}^0(\infty) B_1[\omega_1^0(\theta)]}.$$

Используя приведенные выше значения a_1^0, $\mu_{11}^0(\infty)$, находим $h_\lambda^* = 0{,}011\,348\,20$. Следовательно, внутренний радиус r_0 области отображения профиля волны на плоскость (ξ, η) (см. рис. 1) удовлетворяет следующему ограничению: $r_0 < \exp(-2\pi h_\lambda^*) = 0{,}931\,180$.

Функция $\omega_n(\theta)$ является решением уравнения (1.2), если для произвольного $h_\lambda \in [h_\lambda^*, \infty]$ и любого n коэффициент $a_1 = a_1^0$. При этом система n уравнений (1.5) содержит n неизвестных $a_2, a_3, \ldots, a_n, \mu_{1n}(h_\lambda)$ и имеет решение, которое не может быть тривиальным.

Решение системы (1.5) проведено методом последовательных приближений в точках $h_\lambda = 0{,}08$; $0{,}10$; $0{,}20$; $0{,}40$; $0{,}60$; $0{,}80$; $1{,}00$; $1{,}20$; $1{,}40$. Результаты расчетов параметра $\mu_{1n}(h_\lambda)$ и коэффициентов a_k тригонометрического полинома (1.4) для ряда значений h_λ, удовлетворяющих условиям (1.10), показали, что при сохранении шести значащих цифр после запятой значения этих величин не меняются при $1{,}4 \leqslant h_\lambda < \infty$; слабо меняются в интервале $0{,}4 \leqslant h_\lambda < 1{,}4$ и существенно меняются при $h_\lambda^* < h_\lambda < 0{,}4$. Ниже приводятся результаты расчета параметра $\mu_{11}(h_\lambda)$ и коэффициентов a_k для некоторых значений $h_\lambda \in [h_\lambda^*, \infty]$:

— при $h_\lambda = 1{,}4$ $\mu_{15}(h_\lambda) = 3{,}489\,858$, $a_1 = 4{,}745\,20 \cdot 10^{-2}$, $a_2 = 3{,}382\,66 \cdot 10^{-3}$, $a_3 = 3{,}036\,47 \cdot 10^{-4}$, $a_4 = 3{,}013\,21 \cdot 10^{-5}$, $a_5 = 3{,}159\,15 \cdot 10^{-6}$;

— при $h_\lambda = 0{,}4$ $\mu_{15}(h_\lambda) = 3{,}543\,810$, $a_1 = 4{,}745\,20 \cdot 10^{-2}$, $a_2 = 3{,}518\,69 \cdot 10^{-3}$, $a_3 = 3{,}229\,50 \cdot 10^{-4}$, $a_4 = 3{,}274\,95 \cdot 10^{-5}$, $a_5 = 3{,}507\,92 \cdot 10^{-6}$;

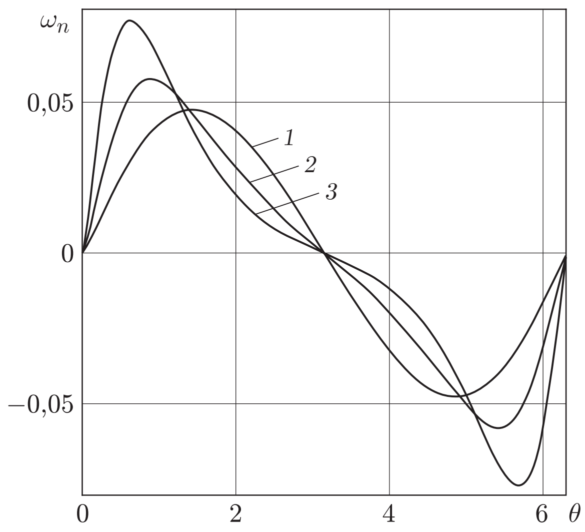

Рис. 2. Зависимость $\omega_n(\theta)$:
1 — $h_\lambda = 1{,}40$; *2* — $h_\lambda = 0{,}10$; *3* — $h_\lambda = 0{,}08$

— при $h_\lambda = 0{,}2$ $\mu_{15}(h_\lambda) = 4{,}232\,746$, $a_1 = 4{,}745\,20 \cdot 10^{-2}$, $a_2 = 5{,}509\,82 \cdot 10^{-3}$, $a_3 = 6{,}645\,89 \cdot 10^{-4}$, $a_4 = 8{,}700\,20 \cdot 10^{-5}$, $a_5 = 1{,}197\,92 \cdot 10^{-5}$;

— при $h_\lambda = 0{,}1$ $\mu_{17}(h_\lambda) = 7{,}449\,619$, $a_1 = 4{,}745\,20 \cdot 10^{-2}$, $a_2 = 1{,}955\,54 \cdot 10^{-2}$, $a_3 = 6{,}062\,62 \cdot 10^{-3}$, $a_4 = 1{,}833\,19 \cdot 10^{-3}$, $a_5 = 5{,}654\,61 \cdot 10^{-4}$, $a_6 = 1{,}784\,75 \cdot 10^{-4}$, $a_7 = 5{,}688\,10 \cdot 10^{-5}$;

— при $h_\lambda = 0{,}08$ $\mu_{110}(h_\lambda) = 10{,}351\,113$, $a_1 = 4{,}745\,20 \cdot 10^{-2}$, $a_2 = 3{,}317\,71 \cdot 10^{-2}$, $a_3 = 1{,}624\,11 \cdot 10^{-2}$, $a_4 = 7{,}398\,48 \cdot 10^{-3}$, $a_5 = 3{,}358\,48 \cdot 10^{-3}$, $a_6 = 1{,}545\,08 \cdot 10^{-3}$, $a_7 = 7{,}220\,15 \cdot 10^{-4}$, $a_8 = 3{,}419\,57 \cdot 10^{-4}$, $a_9 = 1{,}633\,32 \cdot 10^{-4}$, $a_{10} = 7{,}772\,45 \cdot 10^{-5}$.

Полученные в результате решения системы (1.5) многочлены $\omega_n(\theta)$ совместно с параметрами $\mu_{1n}(h_\lambda)$ обращают уравнение (1.2) в тождество. На рис. 2 приведены зависимости $\omega_n(\theta)$ при $h_\lambda = 0{,}08$; $0{,}10$; $1{,}40$. Значения параметра $\mu_{1n}(h_\lambda)$, вычисленные на отрезке $h_\lambda \in [0{,}08; 1{,}40]$, аппроксимируются полиномом четвертой степени по $\operatorname{cth}(2\pi h_\lambda)$

$$\mu_1(h_\lambda) = 1{,}328\,223 - 1{,}672\,586 \operatorname{cth}(2\pi h_\lambda) + \\ + 6{,}586\,490 \operatorname{cth}^2(2\pi h_\lambda) - 3{,}582\,053 \operatorname{cth}^3(2\pi h_\lambda) + 0{,}829\,784 \operatorname{cth}^4(2\pi h_\lambda) \qquad (1.11)$$

с максимальной относительной погрешностью $|(\mu_1(h_\lambda) - \mu_{1n}(h_\lambda))\mu_{1n}^{-1}(h_\lambda)| = 10^{-6}$.

Далее у функций $\mu_{1n}(h_\lambda)$, $\omega_n(\theta)$ индекс n опускается, поскольку в области существования решения уравнения (1.1) всегда найдется такое число n, при котором $\mu_{1n}(h_\lambda)$, $\omega_n(\theta)$ могут считаться истинными решениями.

2. Скорость и профиль волны для жидкости конечной глубины. Отображение области $OACDEB$ плоскости переменной $u = \xi + i\eta$ на плоскость переменной $z = x + iy$ задается формулой [1]

$$z = \frac{i\lambda}{2\pi}\Big(\ln u + b_1 u + \frac{1}{2}\, b_2 u^2 + \frac{1}{3}\, b_3 u^3 + \ldots\Big), \qquad (2.1)$$

из которой с учетом зависимости $u = \mathrm{e}^{i\theta}$ на свободной поверхности $r = 1$ в плоскости (ξ, η) следует параметрическая запись координат поверхности волны в плоскости комплексной переменной z

$$x = -\frac{\lambda}{2\pi}\Big(\theta + b_1 \sin\theta + \frac{1}{2}\, b_2 \sin 2\theta + \frac{1}{3}\, b_3 \sin 3\theta + \ldots\Big), \\ y = \frac{\lambda}{2\pi}\Big(b_1 \cos\theta + \frac{1}{2}\, b_2 \cos 2\theta + \frac{1}{3}\, b_3 \cos 3\theta + \ldots\Big). \qquad (2.2)$$

Коэффициенты $b_1, b_2, b_3, \ldots$, входящие в уравнения (2.1), (2.2), удовлетворяют соотношению

$$\ln R(\theta) + i\omega(\theta) = \ln\left(1 + b_1\,\mathrm{e}^{i\theta} + b_2\,\mathrm{e}^{2i\theta} + b_3\,\mathrm{e}^{3i\theta} + \ldots\right) = a_1\,\mathrm{e}^{i\theta} + a_2\,\mathrm{e}^{2i\theta} + a_3\,\mathrm{e}^{3i\theta} + \ldots,$$

где $\ln R(\theta) = a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta + a_3\cos 3\theta + \ldots$. Действительная и мнимая части комплексной функции $\ln R(\theta) + i\omega(\theta)$ неявно зависят от отношения h_λ через коэффициенты $a_1, a_2, \ldots$. Значения действительной части $\ln R(\theta)$, вычисленные при $\theta = 0$ в девяти точках $h_\lambda = 0{,}08$; 0,10; 0,20; 0,40; 0,60; 0,80; 1,00; 1,20; 1,40, аппроксимируются таким же по виду полиномом

$$\ln R_a(0) = 7{,}079\,10\cdot 10^{-2} - 8{,}274\,40\cdot 10^{-2}\,\mathrm{cth}\,(2\pi h_\lambda) + 1{,}101\,96\cdot 10^{-1}\,\mathrm{cth}^2(2\pi h_\lambda) - \\ - 6{,}242\,16\cdot 10^{-2}\,\mathrm{cth}^3(2\pi h_\lambda) + 1{,}535\,03\cdot 10^{-2}\,\mathrm{cth}^4(2\pi h_\lambda) \qquad (2.3)$$

и с той же максимальной относительной погрешностью $|(\ln R_a(0) - \ln R(0))\ln^{-1} R(0)| = 10^{-6}$, что и параметр $\mu_1(h_\lambda)$ в формуле (1.11).

Коэффициенты $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 + a_1^2/2$, $b_3 = a_3 + a_1 a_2 + a_1^3/6$, …, входящие в уравнения (2.2), известны, если известно решение (1.4) интегрального уравнения (1.1). Ниже приведены значения коэффициентов b_k:

— при $h_\lambda = 1{,}4$ $b_1 = 4{,}745\,20\cdot 10^{-2}$, $b_2 = 4{,}508\,51\cdot 10^{-3}$, $b_3 = 4{,}819\,69\cdot 10^{-4}$, $b_4 = 5{,}428\,16\cdot 10^{-5}$, $b_5 = 6{,}291\,70\cdot 10^{-6}$;

— при $h_\lambda = 0{,}08$ $b_1 = 4{,}745\,20\cdot 10^{-2}$, $b_2 = 3{,}430\,29\cdot 10^{-2}$, $b_3 = 1{,}783\,32\cdot 10^{-2}$, $b_4 = 8{,}757\,08\cdot 10^{-3}$, $b_5 = 4{,}293\,38\cdot 10^{-3}$, $b_6 = 2{,}122\,69\cdot 10^{-3}$, $b_7 = 1{,}058\,58\cdot 10^{-3}$, $b_8 = 5{,}315\,47\cdot 10^{-4}$, $b_9 = 2{,}679\,44\cdot 10^{-4}$, $b_{10} = 1{,}346\,63\cdot 10^{-4}$.

В результате подстановки значений данных коэффициентов в уравнения (2.2) получены профили волн при $h = 1$ м, $h_\lambda = 1{,}40$; 0,08 (рис. 3). Из второго уравнения в (2.2) можно найти амплитуду волны H по формуле $H = y\big|_{\theta=0} - y\big|_{\theta=\pi}$. Полагая, например, $h = 1$ м, в результате вычислений получаем $H = 0{,}216\,954$ м при $h_\lambda = 0{,}08$ и $H = 0{,}012\,376\,8$ м при $h_\lambda = 1{,}4$.

Условие на открытой поверхности жидкости $c^2 R^{-2}(\theta) + 2gy = \mathrm{const}$, следующее из теоремы Бернулли, использовалось при выводе интегрального уравнения Некрасова и урав-

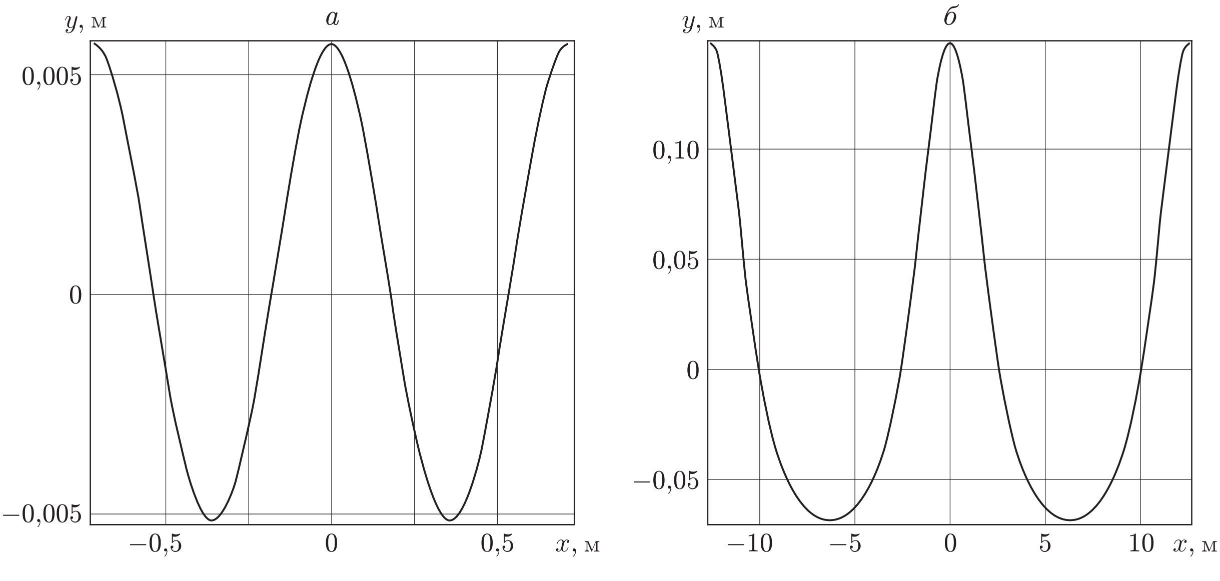

Рис. 3. Профиль волны при $h = 1$ м:
а — $h_\lambda = 1{,}40$; *б* — $h_\lambda = 0{,}08$

нения (1.1). Это условие позволяет установить связь между скоростью распространения волны c, глубиной жидкости h и длиной волны λ в виде уравнения [5]

$$1 + \mu(h_\lambda) \int\limits_0^\theta \sin(\omega(\theta))\, d\theta = \frac{2\pi c^2 \mu(h_\lambda)}{3g\lambda} \exp(-3 \ln R(\theta)). \tag{2.4}$$

Полагая в уравнении (2.4) $\theta = 0$, находим, что скорость движения вершины волны относительно дна равна

$$c = \Big(\frac{3g\lambda R^3(0)}{2\pi\mu(h_\lambda)}\Big)^{1/2}. \tag{2.5}$$

Заменяя в уравнении (2.5) функции $\mu(h_\lambda)$, $R(0)$ их аппроксимациями $\mu_1(h_\lambda)$, $R_a(0)$ (формулы (1.11), (2.3) соответственно), получаем аналитическую зависимость $c = c(\lambda, h_\lambda)$.

Функции $R(0)$, $\mu(h_\lambda)$ в правой части уравнения (2.5) получены в результате решения интегрального уравнения (1.1) и зависят только от отношения h_λ. Возведя в квадрат левую и правую части (2.5), это уравнение можно записать в виде $c^2 = \lambda F(h_\lambda)$, где $F(h_\lambda) = 3gR^3(0)(2\pi\mu(h_\lambda))^{-1}$. Производная

$$\frac{dc^2(\lambda)}{d\lambda} = F(h_\lambda) - h_\lambda \frac{dF(h_\lambda)}{dh_\lambda}$$

не зависит от длины волны λ и обращается в нуль в точке $h_\lambda^0 = F(h_\lambda^0)(dF(h_\lambda^0)/dh_\lambda)^{-1}$. Следовательно, при любой глубине жидкости h максимальная скорость распространения волны, имеющей длину $\lambda_0 = (h_\lambda^0)^{-1}h$, равна $c_{\max} = \sqrt{F(h_\lambda^0)(h_\lambda^0)^{-1}h}$. Поскольку функция $F(h_\lambda)$ известна, нетрудно получить значения $h_\lambda^0 = 0{,}092\,669\,2$, $F(h_\lambda^0) = 0{,}731\,607$, $\lambda_0 = 10{,}791\,072h$, $c_{\max} = 0{,}897\,495\sqrt{gh}$. На рис. 4 приведена зависимость $c(\lambda)$, рассчитанная в окрестности точки λ_0 при $h = 1$ м.

Представляет интерес сравнение скорости распространения волны, найденной в результате решения точной нелинейной задачи (см. (2.5)), со скоростью распространения волн по поверхности жидкости глубиной h, полученной в рамках линейной теории [2, 5]:

$$c_1 = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\, \mathrm{th}\Big(\frac{2\pi h}{\lambda}\Big)}. \tag{2.6}$$

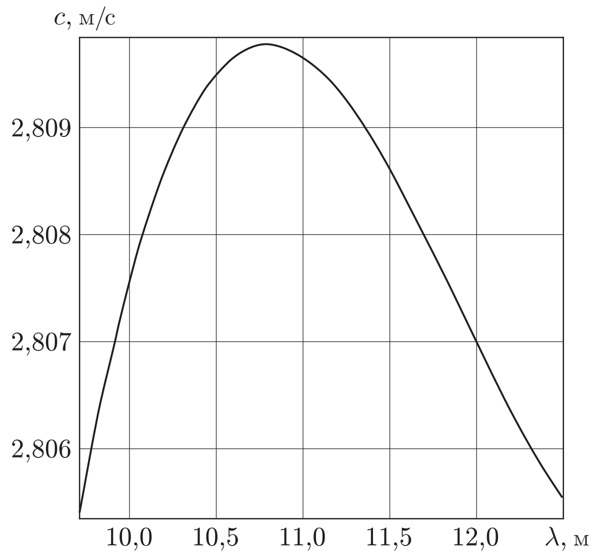

Рис. 4. Функция $c(\lambda)$ в окрестности точки λ_0 при $h = 1$ м

По формулам (2.5), (2.6) рассчитаны скорости $c(h_\lambda)$, $c_1(h_\lambda)$ и их относительные отклонения $\Delta(h_\lambda) = [c(h_\lambda) - c_1(h_\lambda)]c^{-1}(h_\lambda)$ при $h_\lambda \in [0{,}08; 1{,}40)$. Функция $\Delta(h_\lambda)$ не зависит от длины волны λ и глубины жидкости h, а зависит только от их отношения h_λ. Из этого утверждения и из анализа результатов расчетов следует, что для любых h и λ относительные отклонения величин скоростей $c(h_\lambda)$ и $c_1(h_\lambda)$ имеют систематический характер, причем $c(h_\lambda) > c_1(h_\lambda)$, если $h_\lambda \in (0{,}379\,324; \infty)$ и $c(h_\lambda) < c_1(h_\lambda)$, если $h_\lambda \in (0{,}08; 0{,}379\,324)$. Для всех $h_\lambda \in (0{,}4; \infty)$ различие значений скоростей, полученных в рамках линейной ($c_1(h_\lambda)$) и нелинейной ($c(h_\lambda)$) теорий распространения волн по поверхности жидкости, составляет менее 0,12 %, в интервале $h_\lambda \in (0{,}08; 0{,}40)$ это различие достигает 7,2 %.

Полученные выше результаты справедливы лишь для периодических волн постоянной формы, обладающих вертикальной симметрией. В работах [6, 7] изложены методы решения задач о распространении периодических и уединенных волн произвольной формы по поверхности жидкости конечной глубины.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Некрасов А. И.** Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М.: Изд-во АН СССР, 1951.
2. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
3. **Боднарь Т. А.** Об одном приближенном решении задачи Некрасова // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 6. С. 50–56.
4. **Боднарь Т. А.** Об установившихся волнах на поверхности жидкости конечной глубины // 3-я Всерос. конф. с участием зарубежных ученых “Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения”: Тез. докл., Бийск, 28 июня — 3 июля 2008 г. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 2008. С. 25–26.
5. **Милн-Томсон Л. М.** Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.
6. **Maklakov D. V.** Almost-hiest gravity waves on water of finite depth // Eur. J. Appl. Math. 2002. V. 13. P. 67–93.
7. **Карабут Е. А.** Точное решение одной нелинейной краевой задачи теории волн на поверхности жидкости конечной глубины // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 5. С. 741–762.

Поступила в редакцию 20/VII 2009 г.,
в окончательном варианте — 29/XII 2010 г.