МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_56
EDN: VGNTRP

О РАЦИОНАЛЬНЫХ СОПРЯЖЕННЫХ СУММАХ ФЕЙЕРА НА ОТРЕЗКЕ И АППРОКСИМАЦИЯХ СОПРЯЖЕННОЙ ФУНКЦИИ

П.Г. Поцейко

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

ON RATIONAL CONJUGATE FEJÉR SUMS ON AN INTERVAL AND APPROXIMATIONS OF THE CONJUGATE FUNCTION

P.G. Patseika

Yanka Kupala State University of Grodno

Аннотация. Исследуются аппроксимации сопряженной функции на отрезке [–1, 1] суммами Фейера сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с ограничениями на количество геометрически различных полюсов. Устанавливается интегральное представление соответствующих приближений. Для сопряженной функции с плотностью $(1-x)^{\gamma}$, $\gamma \in (1/2,1)$ получены интегральное представление приближений, оценка поточечных приближений и равномерных приближений с определенной мажорантой. Установлено ее асимптотическое выражение при $n \to \infty$, зависящее от параметров аппроксимирующей функции. В заключительной части найдены оптимальные значения параметров, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания мажоранты. В качестве следствия найдены оценки приближений на отрезке [–1, 1] сопряженной функции суммами Фейера сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва.

Ключевые слова: *сопряженная функция*, *ряд Фурье – Чебышёва*, *суммы Фейера*, *функция со степенной особенностью*, *поточечные и равномерные приближения*, *наилучшие приближения*, *асимптотические оценки*.

Для цитирования: *Поцейко*, *П.Г.* О рациональных сопряженных суммах Фейера на отрезке и аппроксимациях сопряженной функции / П.Г. Поцейко // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 56–67. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_56. – EDN: VGNTRP

Abstract. The approximations of the conjugate function on the segment [–1, 1] by Fejér sums of conjugate rational integral Fourier – Chebyshev operators with restrictions on the number of geometrically different poles are investigated. An integral representation of the corresponding approximations is established. An integral representation of approximations, estimation of pointwise approximations and uniform approximations with a certain majorant are obtained for a conjugate function with density $(1-x)^{\gamma}$, $\gamma \in (1/2,1)$. Its asymptotic expression for $n \to \infty$, depending on the parameters of the approximating function is established. In the final part, the optimal values of parameters at which the highest rate of decreasing majorant is provided are found. As a corollary, the estimates of approximations of conjugate function on the segment [–1, 1] by Fejér sums conjugate polynomial Fourier – Chebyshev series are found.

Keywords: *conjugate function*, *Fourier – Chebyshev series*, *Fejér sums*, *function with power singularity*, *pointwise and uniform approximations*, *best approximations*, *asymptotic estimates*.

For citation: *Patseika*, *P.G.* On rational conjugate Fejér sums on an interval and approximations of the conjugate function / P.G. Patseika // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 56–67. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_56 (in Russian). – EDN: VGNTRP

Введение

При решении различных задач математики и ее приложений возникают интегралы с ядром типа Коши, взятые вдоль отрезка действительной оси, которые при помощи различных преобразований приводятся к виду:

$$\hat{f}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in [-1,1], \quad (0.1)$$

где интеграл в правой части понимается в смысле главного значения по Коши и для его существования достаточно потребовать, чтобы функция $f(t)$ удовлетворяла на отрезке $[-1,1]$ условию Липшица любого порядка [1], [2].

Преобразование $\hat{f}(x)$ можно рассматривать также как один из вариантов определения сопряжённой функции с функцией *f*, заданной на отрезке [–1, 1]. При этом суперпозиция $\hat{f}(\cos\theta)$ определённым образом выражается через функцию, тригонометрически сопряжённую с индуцированной функцией $f(\cos\theta)$, а именно

$$\hat{f}(\cos\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f(\cos\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau-\theta}{2} d\tau, \quad x = \cos\theta.$$

Последнее выражение является хорошо известным [3], [4] представлением сопряженной функции с ядром Гильберта 2π-периодической функции *f*.

Задачи, связанные с изучением 2π-периодических сопряженных функций, имеют богатую историю и затронули интересы большого числа выдающихся математиков, среди которых И.И. Привалов [5], [6], А.Н. Колмогоров [7], М. Рисс [8], [9]. Полиномиальные приближения сингулярного интеграла вида (0.1) с плотностью $f(t)$, принадлежащей различным функциональным классам, изучались в работах В.П. Моторного [10], [11]. Отметим классическую задачу Н.К. Бари [12] и С.Б. Стечкина [13] о взаимосвязях между наилучшими приближениями функций и им сопряжённых. Математики белорусской математической школы В.Р. Мисюк и А.А. Пекарский [14] изучили её алгебраический аналог на отрезке [–1, 1].

Исследование рациональной аппроксимации сопряжённой функции носит эпизодический характер. В.Н. Русак и И.В. Рыбаченко [15] нашли сравнительные порядковые оценки для рациональных приближений взаимно сопряжённых в смысле Гильберта функций действительной переменной в пространстве непрерывных 2π-периодических функций. А.А. Пекарским и Т.С. Мардвилко [16] установлены тесные взаимосвязи между наилучшими равномерными рациональными и кусочно-полиномиальными аппроксимациями функций и им сопряженных на отрезке. В [17] изучены рациональные аппроксимации на отрезке [–1, 1] сопряженной функции вида (0.1) частичными суммами сопряженных рядов Фурье по одной системе ортогональных рациональных функций Чебышёва – Маркова. В частности, найдены оценки равномерных приближений, когда плотность $f(t)$ имеет на отрезке [–1, 1] степенную особенность. Установлено, что в этом случае рациональные приближения имеют большую скорость убывания в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

В рациональной аппроксимации нашли применение операторы, являющиеся аналогами известных полиномиальных периодических операторов Фурье, Фейера, Джексона, Валле Пуссена [18], [19]. В 1979 году Е.А. Ровба [20] ввел интегральный оператор на отрезке на основании системы рациональных функций Чебышёва –Маркова, который является обобщением частичных сумм полиномиальных рядов Фурье–Чебышёва.

Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, где a_k либо являются действительными и $|a_k|<1$, либо попарно комплексно-сопряженными. На множестве суммируемых на отрезке $[-1,1]$ с весом $(1-x^2)^{-1/2}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор [20]:

$$s_n(f,\, x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v)\frac{\sin\lambda_n(v,\, u)}{\sin\frac{v-u}{2}}dv,\; x=\cos u, \quad (0.2)$$

где

$$\lambda_n(v,\, u)=\int\limits_{u}^{v}\left(\frac{1}{2}+\lambda_n(y)\right)dy,$$

$$\lambda_n(y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1+2|\alpha_k|\cos(y-\arg\alpha_k)+|\alpha_k|^2}, \quad (0.3)$$

$$\alpha_k=\frac{a_k}{1+\sqrt{1-a_k^2}},\; |\alpha_k|<1.$$

Оператор $s_n: f\to\mathbb{R}_n(A)$, где $\mathbb{R}_n(A)$ – множество рациональных функций вида:

$$\frac{p_n(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k x)},$$

A – множество параметров $(a_1, a_2,\ldots,a_n)$, $p_n(x)\in\mathbb{P}_n$, и $s_n(1,\, x)\equiv 1$. Если положить $a_k=0, k=1,\ldots,n$, то $s_n(f,\, x)$ представляет собой частичную сумму полиномиального ряда Фурье – Чебышева. Вместе с интегральным представлением (0.2), в работе [20] получены оценки сверху приближений на отрезке оператором $s_n(\cdot,\cdot)$ на ряде функциональных классов. Установлено, что оператор $s_n(\cdot,\cdot)$ при специальном выборе параметров $a_k, k=1,\ldots,n,$ совпадает с частичной суммой рядов Фурье функции $f(\cos u)$ по системе рациональных функций, введенных С. Такенакой [21] и Ф. Мальмквистом [22]. Из результатов работы [23] в этом случае следуют признаки сходимости последовательности $\{s_n(\cdot,\cdot)\}_{n=0}^{+\infty}$. Новый метод рациональной аппроксимации на отрезке впоследствии нашел широкое применение в решении практических задач [24]–[26].

В работе [27] построен рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва, сопряженный с (0.2), образом которого является рациональная функция вида

$$\frac{\sqrt{1-x^2}\,p_{n-1}(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k x)},\; p_{n-1}\in\mathbb{P}_{n-1},$$

и изучены его аппроксимационные свойства. В частности, установлено интегральное представление

$$\hat{s}_n(f,\, x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)\frac{\cos\frac{v-u}{2}-\cos\lambda_n(v,\, u)}{\sin\frac{v-u}{2}}dv,$$

$$x=\cos u, \quad (0.4)$$

где $\lambda_n(v,\, u)$ определена в (0.3), и получены оценки рациональных приближений на отрезке [–1, 1] сопряженной функции с плотностью $(1-x)^{\gamma}, \gamma>1/2$, в случае ограничений на количество геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции. В том числе найдены значения параметров аппроксимирующей функции, при которых обеспечивается скорость убывания равномерных рациональных приближений большая в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

Метод приближений средними арифметическими рядов Фурье 2π-периодических функций уходит своими корнями в работы Л. Фейера [28], А. Лебега [29] и к настоящему времени достаточно хорошо изучен, найдя широкое применение в полиномиальной аппроксимации (см., напр., [30]–[33]).

Изучению приближений сопряженных 2π-периодических функций суммами Фейера сопряженных тригонометрических рядов Фурье посвящены работы С.М. Никольского [34], Г. Алексича [35], А.В. Ефимова [36], [37], С.Б. Стечкина [38].

В [39] были введены суммы Фейера сопряженных рациональных рядов Фурье – Чебышёва на отрезке [–1, 1] с двумя геометрически различными полюсами и в продолжении работы [17] найдены оценки приближений сопряженной функции с плотностью, имеющей на отрезке [–1, 1] степенную особенность. Так же установлено, что специальным выбором параметра аппроксимирующей функции можно добиться увеличения скорости рациональных приближений в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

Целью настоящей работы является изучение аппроксимационных свойств сумм Фейера рационального интегрального оператора (0.4) в случае ограничений на количество геометрически различных полюсов. В работе устанавливается интегральное представление соответствующих приближений, и исследуются приближения на отрезке [–1, 1] сопряженной функции с плотностью $(1-x)^{\gamma}, \gamma \in (1/2, 1)$. В заключительной части найдены оптимальные значения параметров аппроксимирующей функции, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания мажоранты рациональных приближений изучаемым аппаратом.

1 Сопряженные суммы Фейера интегральных операторов Фурье – Чебышёва

Пусть q – произвольное натуральное число. A_q есть подмножество A параметров таких, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ровно q различных и кратность каждого параметра равна $m, n = mq, n > q$. Таким образом, будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями с q геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости.

Составим сумму:

$$\hat{\sigma}_{n,\,q}(f,\,x) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\hat{s}_{kq}(f,\,x), \qquad (1.1)$$
$$x \in [-1,1],\ \ m \in \mathbb{N},$$

где $\hat{s}_{kq}(f,\,x)$ определена в (0.4).

Выражение (1.1) естественно назвать суммами Фейера сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышева с q геометрически различными полюсами.

Заметим, что приближения непрерывных функций с характерными особенностями рациональными функциями с фиксированным числом геометрически различных полюсов впервые рассматривались в работах К.Н. Лунгу [40], [41].

Введем следующие обозначения

$$\hat{\varepsilon}_{n,\,q}(f,\,x,\,A_q) = \hat{f}(x) - \hat{\sigma}_{n,\,q}(f,\,x),\ \ x \in [-1,1],$$
$$\hat{\varepsilon}_{n,\,q}(f,\,A_q) = \left\|\hat{f}(x) - \hat{\sigma}_{r,\,q}(f,\,x)\right\|_{C[-1,1]},\ \ n \to \infty.$$

***Теорема* 1.1.** *Для приближений сопряженной функции* (0.1) *на отрезке* [–1, 1] *суммами Фейера* (1.1) *имеет место интегральное представление*

$$\hat{\varepsilon}_{n,\,q}(f,\,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) K_n(v,\,u)\,dv,\ \ x = \cos u, \qquad (1.2)$$

где $K_n(v,\,u) = \left(\cos\frac{v-u}{2} - \cos\left(\frac{v-u}{2} - \lambda_q^*\right) + \right.$

$$\left. + \cos\left(\frac{v-u}{2} + m\lambda_q^*\right) - \cos\left(\frac{v-u}{2} + (m+1)\lambda_q^*\right)\right) \times$$
$$\times \frac{1}{8\pi(m+1)\sin\frac{v-u}{2}\sin^2\frac{\lambda_q^*}{2}},\ \ n = mq,$$
$$\lambda_q^* = \lambda_q^*(v,\,u) =$$
$$= \int_u^v \sum_{k=1}^{q} \frac{1-|\alpha_k|^2}{1 + 2|\alpha_k|\cos\left(y - \arg\alpha_k\right) + |\alpha_k|^2}\,dy. \qquad (1.3)$$

Доказательство. Рассмотрим приближения на отрезке [–1, 1] сопряженной функции (0.1) сопряженным рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва (0.4) в случае q геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции:

$$\hat{\delta}_{kq}(f,\,x) = \hat{f}(x) - \hat{s}_{kq}(f,\,x),\ x \in [-1,1],\ k = 0,1,\ldots.$$

Просуммируем правую и левую части последнего равенства по k от 0 до m и разделим на $m + 1$. Тогда

$$\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\hat{\delta}_{kq}(f,\,x) = \qquad (1.4)$$
$$= \hat{f}(x) - \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\hat{s}_{kq}(f,\,x) = \hat{\varepsilon}_{n,\,q}(f,\,x),\ x \in [-1,1].$$

С другой стороны, известно [27], что в рассматриваемом нами случае имеет место интегральное представление

$$\hat{\delta}_{kq}(f,\,x) =$$
$$= \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)\left(\zeta\left(\frac{\omega_q(\zeta)}{\omega_q(\xi)}\right)^k + \xi\left(\frac{\omega_q(\xi)}{\omega_q(\zeta)}\right)^k\right)\frac{dv}{\zeta - \xi},$$
$$k = 0,1,\ldots,$$

где $\omega_q(\zeta)=\prod_{k=1}^{q}\frac{\zeta+\alpha_k}{1+\alpha_k\zeta}$, $\xi=e^{iu}$, $\zeta=e^{iv}$, $x=\cos u$.

Подставим последнее соотношение в (1.4) и поменяем порядок суммирования и интегрирования. Тогда

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}(f,x)=\frac{i}{2\pi(m+1)}\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\cos v)}{\zeta-\xi}\left[\zeta\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\omega_q(\zeta)}{\omega_q(\xi)}\right)^k+\xi\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\omega_q(\xi)}{\omega_q(\zeta)}\right)^k\right]dv,$$

$$x=\cos u.$$

Суммы в квадратных скобках представляют собой суммы геометрических прогрессий с соответствующими знаменателями. Следовательно,

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}(f,x)=\frac{i}{2\pi(m+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\cos v)}{\zeta-\xi}\times \qquad (1.5)$$

$$\times\left[\zeta\frac{1-(\omega_q(\zeta)\overline{\omega_q(\xi)})^{m+1}}{1-\omega_q(\zeta)\overline{\omega_q(\xi)}}+\xi\frac{1-(\omega_q(\xi)\overline{\omega_q(\zeta)})^{m+1}}{1-\omega_q(\xi)\overline{\omega_q(\zeta)}}\right]dv,$$

$$x=\cos u.$$

Отсюда находим

$$\hat{\varepsilon}_{r,q}(f,x)=\frac{i}{2\pi(m+1)}\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi}f(\cos v)\frac{\Phi_n(v,u)}{(\zeta-\xi)(2-[\omega_q(\zeta)\overline{\omega_q(\xi)}+\omega_q(\xi)\overline{\omega_q(\zeta)}])}dv,$$

$$x=\cos u.$$

$$\Phi_n(v,u)=\zeta+\xi-\left[\zeta\frac{\omega_q(\xi)}{\omega_q(\zeta)}+\xi\frac{\omega_q(\zeta)}{\omega_q(\xi)}\right]+$$

$$+\left[\zeta\frac{\omega_q^m(\zeta)}{\omega_q^m(\xi)}+\xi\frac{\omega_q^m(\xi)}{\omega_q^m(\zeta)}\right]-\left[\zeta\frac{\omega_q^{m+1}(\zeta)}{\omega_q^{m+1}(\xi)}+\xi\frac{\omega_q^{m+1}(\xi)}{\omega_q^{m+1}(\zeta)}\right].$$

Умножив числитель и знаменатель подынтегрального выражения на $2\sqrt{\xi\zeta}$ и заметив, что

$$\omega_q(\zeta)\overline{\omega_q(\xi)}=e^{i\lambda_q^*(v,u)},\ \xi=e^{iu},\zeta=e^{iv},$$

где $\lambda_q^*(v,u)$ из (1.3), придем к (1.2). □

В теореме 1.1 положим значения параметров $\alpha_k=0$, $k=1,2,\ldots,q$. Тогда величина $\hat{\varepsilon}_{n,1}(f,x,O)=\hat{\varepsilon}_n^{(0)}(f,x)$ – приближения сопряженной функции (0.1) суммами Фейера сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва. Из теоремы 1.1 получаем

***Следствие* 1.1.** *Имеет место интегральное представление*

$$\hat{\varepsilon}_n^{(0)}(f,x)=\frac{1}{4\pi(n+1)}\int_{-\pi}^{\pi}f(\cos v)\frac{\sin(n+1)(v-u)dv}{\sin^2\frac{v-u}{2}},$$

$$x=\cos u,\ n\in\mathbb{N}.$$

Для доказательства последнего интегрального представления достаточно в (1.2) положить параметры $\alpha_k=0$, $k=1,2,\ldots,q$.

2 Приближения сопряженной функции с плотностью, имеющей степенную особенность

Изучим приближения суммами Фейера (1.1) сопряжённой функции с плотностью $f_\gamma(x)=(1-x)^\gamma$, $\gamma\in(1/2,1)$. Для простоты изложения сделаем следующую замену параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^q$:

$$\alpha_k\mapsto-\alpha_k,\ \alpha_k\in[0,1),\ k=1,\ldots,q.$$

***Теорема* 2.1.** *Для приближений сопряженной функции* (0.1) *с плотностью* $f_\gamma(x)$ *на отрезке* $[-1,1]$ *суммами Фейера* (1.2) *имеют место*:

1) *интегральное представление*:

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}(f_\gamma,x,A_q)=-\frac{2^{1-\gamma}\sin\pi\gamma}{\pi(m+1)}\times$$

$$\times\int_0^1\frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}}{\sqrt{1-2t\cos u+t^2}}\Omega_n(t,x)\sin\psi_n(x,t)dt, \quad (2.1)$$

где

$$\Omega_n(t,x)=\sqrt{\frac{1-2\omega_q^{m+1}(t)M_{q(m+1)}(x)+\omega_q^{2(m+1)}(t)}{1-2\omega_q(t)M_q(x)+\omega_q^2(t)}},$$

$$\psi_n(x,t)=\arg\frac{\xi}{1-t\xi}+\arg\frac{1-(\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{m+1}}{1-\omega_q(\xi)\omega_q(t)},$$

$$\omega_q(t)=\prod_{k=1}^{q}\frac{t-\alpha_k}{1-\alpha_k t},\ \xi=e^{iu},$$

$$M_q(x)=\frac{1}{2}\left(\omega_q(\xi)+\overline{\omega_q(\xi)}\right),$$

– рациональная функция Чебышёва – Маркова порядка q;

2) *поточечная оценка приближений*

$$|\hat{\varepsilon}_{n,q}(f_\gamma,x,A_q)|\le\frac{2^{1-\gamma}\sin\pi\gamma\sqrt{1-x^2}}{\pi}\times$$

$$\left[\frac{1}{m+1}\int_0^1\frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}}{1-2tx+t^2}\Omega_n(t,x)dt+\right. \quad (2.2)$$

$$+\frac{\lambda_q(u)}{m+1}\int_0^1\frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}}{\sqrt{1-2tx+t^2}}\frac{|\omega_q(t)|(1-|\omega_q(t)|^{m+1})}{(1-|\omega_q(t)|)^2}dt-$$

$$\left.-\lambda_q(u)\int_0^1\frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}}{\sqrt{1-2tx+t^2}}\frac{|\omega_q(t)|^{m+1}}{1-|\omega_q(t)|}dt\right],\ x=\cos u,$$

где $\lambda_q(u)$ из (0.3);

3) *равномерно относительно* $x\in[-1,1]$ *неравенство*

$$|\hat{\varepsilon}_{n,q}(f_\gamma,x,A_q)|\le\sqrt{1-x^2}\,\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma,A_q),\ n\in\mathbb{N}, \quad (2.3)$$

где

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma,A_q)=\frac{2^{1-\gamma}\sin\pi\gamma}{\pi}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{m+1}\int_0^1(1-t)^{2\gamma-2}t^{-\gamma}\frac{1-|\omega_q(t)|^{m+1}}{1-|\omega_q(t)|}dt+\right.$$

$$+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{q}\frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k}\int_0^1(1-t)^{2\gamma-1}t^{-\gamma}\frac{1-|\omega_q(t)|^{m+1}}{(1-|\omega_q(t)|)^2}dt-$$

$$-\sum_{k=1}^{q}\frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k}\int_0^1 (1-t)^{2\gamma-1}t^{-\gamma}\,\frac{|\omega_q(t)|^{m+1}}{1-|\omega_q(t)|}dt\Bigg]. \quad (2.4)$$

Доказательство. Воспользуемся соотношением (1.4). Известно [26], что

$$\hat{\delta}_{kq}(f_\gamma,\, x,\, A_q) = \frac{-\sin\pi\gamma}{2^\gamma \pi i}\times$$

$$\times\int_0^1 (1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}\left[\frac{\xi\omega_q^k(\xi)}{1-t\xi} - \frac{\overline{\omega_q^k(\xi)}}{\xi - t}\right]\omega_q^k(t)dt,$$

$$\xi = e^{iu},\; x = \cos u,$$

где $\omega_q(\xi)$ определена в формулировке настоящей теоремы.

Просуммируем правую и левую части последнего равенства по k от 0 до m и разделим на $m+1$. Тогда

$$\hat{\varepsilon}_{n,\,q}(f_\gamma,\, x,\, A_q) = \frac{-\sin\pi\gamma}{2^\gamma \pi i(m+1)}\times$$

$$\times\int_0^1 (1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}\left[\frac{\xi(1-(\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{m+1})}{(1-t\xi)(1-\omega_q(\xi)\omega_q(t))} - \right.$$

$$\left. -\frac{1-(\overline{\omega_q(\xi)}\omega_q(t))^{m+1}}{(\xi-t)(1-\overline{\omega_q(\xi)}\omega_q(t))}\right]dt, \quad x=\cos u.$$

Заметив, что выражения в квадратных скобках интеграла, стоящего справа, являются взаимно комплексно-сопряженными, чтобы прийти к (2.1) достаточно выполнить соответствующие преобразования.

Докажем второе утверждение теоремы 2.1. Из (2.1) следует, что при $x \in [-1, 1]$

$$|\hat{\varepsilon}_{n,\,q}(f_\gamma,\, x,\, A_q)| \le \frac{2^{1-\gamma}\sin\pi\gamma}{\pi(m+1)}\times$$

$$\times\int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}}{\sqrt{1-2t\cos u + t^2}}\Omega_n(t,\, x)\,|\sin\psi_n(x,\, t)|dt. \quad (2.5)$$

где $\Omega_n(t,\, x)$ определена в формулировке настоящей теоремы.

Оценим величину $|\sin\psi_n(x,\, t)|$. Имеем

$$|\sin\psi_n(x,\, t)| \le \left|\sin\arg\frac{\xi}{1-\xi t}\right| +$$

$$\left|\sin\arg\frac{1-(\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{m+1}}{1-\omega_q(\xi)\omega_q(t)}\right| = \quad (2.6)$$

$$= \frac{|\sin u|}{\sqrt{1-2t\cos u + t^2}} + \left|\sin\arg\frac{1-(\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{m+1}}{1-\omega_q(\xi)\omega_q(t)}\right|,$$

$$t\in[0,1],\; x=\cos u,\; \xi = e^{iu}.$$

Оценим второе слагаемое.

$$\sin\arg\frac{1-(\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{m+1}}{1-\omega_q(\xi)\omega_q(t)} =$$

$$= \frac{1}{2i\Omega_n(t,\, x)}\left(\frac{1-(\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{m+1}}{1-\omega_q(\xi)\omega_q(t)} - \right.$$

$$\left. -\frac{1-(\overline{\omega_q(\xi)}\omega_q(t))^{m+1}}{1-\overline{\omega_q(\xi)}\omega_q(t)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i\Omega_n(t,\, x)}\left(\sum_{k=0}^{m}(\omega_q(\xi)\omega_q(t))^k - \sum_{k=0}^{m}(\overline{\omega_q(\xi)}\omega_q(t))^k\right) =$$

$$= \frac{1}{\Omega_n(t,\, x)}\sum_{k=0}^{m}\omega_q^k(t)N_{qk}(x),$$

где

$$N_{kq}(x) = \frac{1}{2i}\left(\omega_q^k(\xi) - \overline{\omega_q^k(\xi)}\right),\; \xi = e^{iu},\; x\in[-1,1],$$

– рациональная синус-дробь Чебышёва – Маркова порядка $kq,\, k = 0,1,2,\ldots,m.$ Известно [42, с. 50], что

$$|N_q(x)| \le |\sin u|\,\lambda_q(u),\; x = \cos u,$$

где $\lambda_q(u)$ из (0.3). Учитывая также, что $|\sin nt| \le n|\sin t|,$ находим

$$\left|\sin\arg\frac{1-(\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{m+1}}{1-\omega_q(\xi)\omega_q(t)}\right| \le$$

$$\le \frac{|\sin u|\,\lambda_q(u)}{\Omega_n(t,\, x)}\sum_{k=0}^{m}k\,|\omega_q^k(t)|.$$

Воспользовавшись известным соотношением

$$\sum_{k=0}^{m}kr^k = \frac{r(1-r^{m+1})}{(1-r)^2} - \frac{(m+1)r^{m+1}}{1-r},\; |r|<1,$$

придем к оценке

$$\left|\sin\arg\frac{1-(\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{m+1}}{1-\omega_q(\xi)\omega_q(t)}\right| \le$$

$$\le \frac{|\sin u|\,\lambda_q(u)}{\Omega_n(t,\, x)}\left[\frac{|\omega_q(t)|(1-|\omega_q(t)|^{m+1})}{(1-|\omega_q(t)|)^2} - \right.$$

$$\left. -\frac{(m+1)|\omega_q(t)|^{m+1}}{1-|\omega_q(t)|}\right].$$

Из (2.5), (2.6) и последней оценки следует (2.2).

Для доказательства третьего утверждения теоремы 2.1 в (2.2) воспользуемся оценкой

$$\sqrt{1-2t\cos u + t^2} \ge 1-t,\; t\in[0,1],\; u\in\mathbb{R}$$

а также оценкой

$$\Omega_n(t,\, x) = \sqrt{\frac{1-2\omega_q^{m+1}(t)M_{q(m+1)}(x) + \omega_q^{2(m+1)}(t)}{1-2\omega_q(t)M_q(x)+\omega_q^2(t)}} \le$$

$$\le \frac{1-|\omega_q(t)|^{m+1}}{1-|\omega_q(t)|},\; t\in[0,1],\; m\in\mathbb{N}. \qquad \square$$

В теореме 2.2 положим значение параметров $\alpha_k = 0, k = 1,2,\ldots,q.$ Тогда

$$\hat{\varepsilon}_{n,\,q}(f_\gamma,\, x,\, O) = \hat{\varepsilon}_n^{(0)}(f_\gamma,\, x)$$

есть приближения сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ на отрезке [–1, 1] суммами Фейера сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва. Отсюда получаем

***Следствие* 2.1.** *Для приближений сопряженной функции с плотностью* $f_\gamma(x)$ *на отрезке* $[-1, 1]$ *суммами Фейера сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва имеют место:*

1) *интегральное представление*:

$$\hat{\varepsilon}_n^{(0)}(f_\gamma, x) = -\frac{2^{1-\gamma}\sin\pi\gamma}{\pi(n+1)}\int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}}{(1-2tx+t^2)^2}p_n(t, x)dt,$$
$$x \in [-1, 1];$$

где

$$p_n(t, x) = (1-t^2)\sin u + 2t^{n+2}\sin(n+1)u -$$
$$-t^{n+1}\sin(n+2)u - t^{n+3}\sin nu, \; x = \cos u;$$

2) равномерно по $x \in [-1, 1]$ оценка:

$$|\,\hat{\varepsilon}_n^{(0)}(f_\gamma, x)| \le \frac{2^{1-\gamma}\sin\pi\gamma\sqrt{1-x^2}}{\pi(n+1)} \times$$
$$\times \int_0^1 (1-t)^{2\gamma-2}t^{-\gamma}\,\frac{1+t-(n+2)t^{n+1}+nt^{n+2}}{1-t}dt, \; n \in \mathbb{N}. \; \square$$

Утверждения последнего следствия легко получить, если положить в теореме 2.1 значения всех параметров равными нулю.

3 Асимптотическое выражение мажоранты приближений

Исследуем асимптотическое поведение величины (2.4) при $m \to \infty$. Для решения этой задачи в правой части (2.4) выполним замену переменного по формуле $t = (1-u)/(1+u)$, $dt = -2du/(1+u)^2$. Тогда

$$\hat{\varepsilon}^*_{n,q}(f_\gamma, A_q) = \frac{2^\gamma \sin\pi\gamma}{\pi(m+1)}\left[I_n^{(1)} + 2\left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right)I_n^{(2)} - \right.$$
$$\left. -2(m+1)\left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right)I_n^{(3)}\right], \; \beta_k = \frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}, \qquad (3.1)$$

где

$$I_n^{(1)} = \int_0^1 \frac{u^{2\gamma-2}}{(1-u^2)^\gamma}\frac{1-|\chi_q(u)|^{m+1}}{1-|\chi_q(u)|}du,$$

$$I_n^{(2)} = \int_0^1 \frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^\gamma}\frac{1-|\chi_q(u)|^{m+1}}{(1-|\chi_q(u)|)^2}du,$$

$$I_n^{(3)} = \int_0^1 \frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^\gamma}\frac{|\chi_q(u)|^{m+1}}{1-|\chi_q(u)|}du,$$

$$\chi_q(u) = \prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}.$$

Отметим, что в рассматриваемом нами случае для каждого значения $n \in \mathbb{N}$ может выбираться соответствующий набор параметров $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$. То есть, вообще говоря, $\beta_k = \beta_k(n)$, $k = 1, 2, \ldots, q$. При этом будем полагать, что выполнено следующее условие

$$\lim_{m\to\infty} m\beta_k = \infty, \; k = 1, 2, \ldots, q, \qquad (3.2)$$

и учитывать его в дальнейших рассуждениях. Положим, что параметры β_k, $k = 1, 2, \ldots, q$, упорядочены следующим образом:

$$0 < \beta_q \le \beta_{q-1} \le \ldots \le \beta_1 \le 1.$$

***Теорема* 3.1.** *Имеет место асимптотическое равенство*

$$\hat{\varepsilon}^*_{n,q}(f_\gamma, A_q) \sim \frac{2^\gamma \sin\pi\gamma}{\pi(m+1)}\left[\Psi_n(A_q) + \Phi_n(A_q)\right],$$
$$\gamma \in (1/2, 1), \; m \to \infty, \qquad (3.3)$$

где

$$\Psi_n(A_q) = \frac{2\gamma\Gamma(2\gamma-1)(m+1)^{2-2\gamma}}{2^{2\gamma}(1-\gamma)\left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma-1}} + 2\left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right) \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{q-1}\int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{2\gamma-1}du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma\left(1-\prod_{k=1}^j \frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\prod_{k=j+1}^q \frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)^2}$$
$$+2\left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right)\int_{\beta_1}^1 \frac{u^{2\gamma-1}du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma\left(1-\prod_{k=1}^q \frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)^2};$$

$$\Phi_n(A_q) = \sum_{j=1}^{q-1}\int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{2\gamma-2}du}{(1-u^2)^\gamma\left(1-\prod_{k=1}^j \frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\prod_{k=j+1}^q \frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)} +$$
$$+\int_{\beta_1}^1 \frac{u^{2\gamma-2}du}{(1-u^2)^\gamma\left(1-\prod_{k=1}^q \frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)}.$$

Доказательство. Задача сводится к изучению асимптотического поведения интегралов $I_n^{(1)}$, $I_n^{(2)}$ и $I_n^{(3)}$ в (3.1) при $m \to \infty$. Рассмотрим интеграл $I_n^{(1)}$. Представим его в виде

$$I_n^{(1)} = I_n^{(4)} + I_n^{(5)} + I_n^{(6)}, \; n \in \mathbb{N}, \qquad (3.4)$$

где

$$I_n^{(4)} = \int_0^{\beta_q} f_\gamma(u)\frac{1-\left(\prod_{k=1}^q \frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right)^{m+1}}{1-\prod_{k=1}^q \frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}}du,$$

$$I_n^{(5)} = \sum_{j=1}^{q-1}\int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} f_\gamma(u)\frac{1-\left(\prod_{k=1}^j \frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\prod_{k=j+1}^q \frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)^{m+1}}{1-\prod_{k=1}^j \frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\prod_{k=j+1}^q \frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}}du,$$

$$I_n^{(6)} = \int_{\beta_1}^1 f_\gamma(u)\frac{1-\left(\prod_{k=1}^q \frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)^{m+1}}{1-\prod_{k=1}^q \frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}}du, \; f_\gamma(u) = \frac{u^{2\gamma-2}}{(1-u^2)^\gamma}.$$

Изучим асимптотическое поведение при $m \to \infty$ каждой из трех величин по отдельности.

Так для $I_n^{(4)}$ воспользуемся методами изучения асимптотического поведения интегралов, изложенными в [43, с. 375]. Продифференцируем интеграл по параметру m. Тогда

$$\frac{\partial I_n^{(4)}}{\partial m} = -\int_0^{\beta_q} f_\gamma(u)\frac{\ln \chi_q(u)}{1-\chi_q(u)} e^{(m+1)S(u)} du,$$

$$S(u) = \sum_{k=1}^{q} \ln \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}.$$

Теперь для исследования асимптотического поведения последнего интеграла при $m \to \infty$ воспользуемся методом Лапласа [44], [45]. Функция $S(u)$ убывает на отрезке $[0, \beta_q]$, следовательно достигает своего максимального значения при $u = 0$. Раскладывая функцию $S(u)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $u = 0$, а также учитывая, что

$$f_\gamma(u)\frac{\ln \chi_q(u)}{1-\chi_q(u)} \sim -u^{2\gamma-2}, u \to 0,$$

при некотором малом $\varepsilon > 0$ и $m \to \infty$ находим

$$\frac{\partial I_n^{(4)}}{\partial m} \sim \int_0^{\varepsilon} u^{2\gamma-2} \exp\left[-2u(m+1)\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right] du.$$

Выполнив в последнем интеграле замену переменного

$$2u(m+1)\left(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right) \mapsto t,$$

получим

$$\frac{\partial I_n^{(4)}}{\partial m} \sim \frac{\Gamma(2\gamma-1)}{\left(2(m+1)\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma-1}}, \ m \to \infty.$$

Проинтегрировав правую и левую части последнего асимптотического равенства по параметру m, получим

$$I_n^{(4)} \sim \frac{\Gamma(2\gamma-1)(m+1)^{2-2\gamma}}{2^{2\gamma}(1-\gamma)\left(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma-1}}, m \to \infty. \quad (3.5)$$

Займемся изучением величины $I_n^{(5)}$. Разобьем каждый из $q-1$ интегралов, входящих в ее определение на два интеграла

$$I_n^{(5)} = \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} f_\gamma(u) \frac{du}{1 - \prod_{k=1}^{j}\frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}\prod_{k=j+1}^{q}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}} + \delta_m, \quad (3.6)$$

где

$$\delta_m = -\sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} f_\gamma(u) \frac{\left(\prod_{k=1}^{j}\frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}\prod_{k=j+1}^{q}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)^{m+1}}{1 - \prod_{k=1}^{j}\frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}\prod_{k=j+1}^{q}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}} du.$$

Интегралы в сумме (3.6) существуют при $\beta_k \in (0, 1], k = 1, 2, \ldots, q,$ и не зависят от m. Интегралы в δ_m зависят от m и поскольку

$$\left|\prod_{k=1}^{j}\frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}\prod_{k=j+1}^{q}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right| < 1, \ u \in (\beta_{j+1}, \ \beta_j),$$

то очевидно, что стремятся к нулю при $m \to \infty$. Поэтому второе слагаемое в (3.6) имеет больший порядок малости при $m \to \infty$ в сравнении с первым и справедливо асимптотическое равенство

$$I_n^{(5)} \sim \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{2\gamma-2} du}{(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^{j}\frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}\prod_{k=j+1}^{q}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)}, \quad (3.7)$$

$$m \to \infty.$$

Аналогичным образом устанавливается справедливость асимптотического равенства

$$I_n^{(6)} \sim \int_{\beta_1}^{1} \frac{u^{2\gamma-2} du}{(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^{q}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)}, \ m \to \infty. \quad (3.8)$$

Подставив (3.5), (3.7) и (3.8) в (3.4), получим

$$I_n^{(1)} \sim \frac{\Gamma(2\gamma-1)(m+1)^{2-2\gamma}}{2^{2\gamma}(1-\gamma)\left(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma-1}} +$$

$$+\sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{2\gamma-2} du}{(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^{j}\frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}\prod_{k=j+1}^{q}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)} +$$

$$+\int_{\beta_1}^{1} \frac{u^{2\gamma-2} du}{(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^{q}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)}, \ m \to \infty. \quad (3.9)$$

Действуя таким же образом в отношении величин $I_n^{(2)}$ и $I_n^{(3)}$, находим, что

$$I_n^{(2)} \sim \frac{\Gamma(2\gamma-1)(m+1)^{2-2\gamma}}{2^{2\gamma+1}(1-\gamma)\left(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}} +$$

$$+\sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{2\gamma-1} du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^{j}\frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}\prod_{k=j+1}^{q}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)^2} +$$

$$+\int_{\beta_1}^{1} \frac{u^{2\gamma-1} du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^{q}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)^2}, m \to \infty. \quad (3.10)$$

$$I_n^{(3)} \sim \frac{\Gamma(2\gamma-1)(m+1)^{1-2\gamma}}{2^{2\gamma}\left(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}}, \ m \to \infty. \quad (3.11)$$

Теперь из равенства (3.1) на основании асимптотических соотношений (3.9) и (3.10), (3.11) получим асимптотическое равенство (3.3). □

Положив в теореме 3.1 значения параметров $\beta_k = 1, \ k = 1, 2, \ldots, q,$ величина

$$\varepsilon_{n,q}^*((1-x)^\gamma, \ O) = \varepsilon_n^{(0)}((1-x)^\gamma)$$

– есть мажоранта равномерных приближений сопряженной функции (0.1) суммами Фейера сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва. В этом случае получим

***Следствие* 3.1.** *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\hat{\varepsilon}_n^{(0)}(f_\gamma) \sim \frac{2^{1-\gamma}\gamma\Gamma(2\gamma-1)\sin\pi\gamma}{\pi(1-\gamma)(n+1)^{2\gamma-1}},\ \gamma \in (1/2, 1),\ n \to \infty.$$

В теореме 3.1 положим значение $q = 1$. То есть, аппроксимирующая функция имеет один полюс в открытой комплексной плоскости. В этом случае из теоремы 3.1 получим

***Следствие* 3.2.** *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\hat{\varepsilon}_{n,1}^*(f_\gamma,\ A_1) \sim \frac{2^\gamma \sin\pi\gamma}{\pi(n+1)}\left[\frac{2\gamma\Gamma(2\gamma-1)(n+1)^{2-2\gamma}\beta^{2\gamma-1}}{2^{2\gamma}(1-\gamma)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\beta^3}\int_\beta^1 \frac{u^{2\gamma-2}(u+\beta)(u^2+u\beta(1+\beta)+\beta^2)\,du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma}\right],\ n \to \infty.$$

Из последнего представления следует, что в случае одного полюса у аппроксимирующей функции, правая часть асимптотического равенства состоит из двух слагаемых и содержит один параметр β. Причем, если $\beta = \beta(n) \to 0,\ n \to \infty$, то первое слагаемое будет уменьшаться, в то время как второе будет увеличиваться.

4 Наилучшая мажоранта приближений суммами Фейера

Представляет интерес минимизировать правую часть соотношения (3.3) посредством выбора оптимального для этой задачи набора $A_q^* = \{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_q^*\}$. Будем искать наилучшую оценку приближений сопряженной функции с плотностью $(1-x)^\gamma$, $\gamma \in (1/2, 1)$ суммами Фейера (1.1). Положим

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma) = \inf_{A_q} \hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma,\ A_q),$$

где $\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma,\ A_q)$ мажоранта приближений сопряженной функции с плотностью $(1-x)^\gamma$, $\gamma \in (1/2, 1)$ суммами Фейера (1.1), определенные в (3.3).

***Теорема* 4.1.** *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}^*((1-x)^\gamma)) \sim \frac{\mu(q,\gamma)}{(n+1)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}\left(1-\frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right)}}, \qquad (4.1)$$
$$\gamma \in (1/2, 1), n \to \infty,$$

где

$$\mu(q,\gamma) =$$
$$= \frac{2^{1-\gamma+\frac{4\gamma^3-4\gamma^2-5\gamma+6}{2\gamma(1+\gamma)}} q^{\frac{4\gamma+1}{1+\gamma}}(1+\gamma)\sin\pi\gamma[c_1(\gamma)]^{\frac{2\gamma-1}{2(1+\gamma)}}}{\pi\gamma(1-\gamma)^{\frac{1}{2\gamma}\left(q+(2\gamma-1)\frac{1-(1-\gamma)^q}{\gamma(1+\gamma)}\right)}} \times$$
$$\times\left(\frac{\gamma^2\Gamma(2\gamma-1)}{2^{3-2\gamma}q^2}\right)^{\frac{1}{2\gamma}\left(1+(2\gamma-1)\frac{(1-\gamma)^{q-1}}{1+\gamma}\right)},$$

$$c_1(\gamma) = \int_0^1 \frac{u^{2\gamma+1}\,du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma} =$$
$$= \frac{\Gamma(1-\gamma)}{2\pi\gamma}\left(2\sqrt{\pi}\Gamma(3/2+\gamma) - \pi\Gamma(1+\gamma)\right), \qquad (4.2)$$
$$\gamma \in (1/2, 1).$$

Доказательство. Исследуем асимптотическое равенство (3.3). При постоянных значениях параметров $\beta_k,\ k = 1, 2, \ldots, q$, порядок в указанном соотношении, очевидно, не отличается от полиномиального, найденного в следствии 3.1. Вместе с условием (3.2) будем полагать, что $\beta_k = \beta_k(m) \to 0$ и $\beta_{k+1} = o(\beta_k)$ при $m \to \infty$. В этом случае нетрудно получить, что при $m \to \infty$ справедливы асимптотические равенства

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \sim \frac{1}{\beta_q},$$

$$1 - \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}\prod_{k=j+1}^q \frac{u-\beta_k}{u+\beta_k} \sim \frac{2u}{\beta_j},$$
$$j = 1, 2, \ldots, q,\ u \in [\beta_{j+1},\ \beta_j],$$

$$1 - \prod_{k=1}^q \frac{u-\beta_k}{u+\beta_k} \sim \frac{2\beta_1}{u},\ u \in [\beta_1, 1].$$

При этом (3.3) примет вид

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma,\ A_q) = \frac{2^\gamma \sin\pi\gamma}{\pi(m+1)\beta_q}\Psi_n(A_q) + \Phi_n(A_q), \quad (4.3)$$

где

$$\Psi_n(A_q) \sim \frac{2\gamma\Gamma(2\gamma-1)(m+1)^{2-2\gamma}\beta_q^{2\gamma}}{2^{2\gamma}(1-\gamma)} +$$
$$+\frac{1}{4(1-\gamma)}\sum_{j=1}^{q-1}\frac{\beta_j^2}{\beta_{j+1}^{2-2\gamma}} + \frac{c_1(\gamma)}{2\beta_1^2},$$

$c_1(\gamma)$ определена в (4.2),

$$\Phi_n(A_q) =$$
$$= \frac{1}{m+1}O\left(\frac{1}{4(1-\gamma)}\sum_{j=1}^{q-1}\frac{\beta_j}{\beta_{j+1}^{2-2\gamma}} + \frac{1}{2\beta_1}\int_0^1 \frac{u^{2\gamma-1}\,du}{(1-u^2)^\gamma}\right),$$
$$m \to \infty.$$

Ввиду очевидного асимптотического соотношения

$$\Phi_n(A_q) = o\left(\frac{1}{(m+1)\beta_q}\left(\frac{1}{4(1-\gamma)}\sum_{j=1}^{q-1}\frac{\beta_j^2}{\beta_{j+1}^{2-2\gamma}} + \frac{c_1(\gamma)}{2\beta_1^2}\right)\right),$$
$$m \to \infty,$$

при варьировании параметров $\beta_k,\ k = 1, 2, \ldots, q$, слагаемые в $\Phi_n(A_q)$ не влияют на асимптотическое поведение величины $\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma,\ A_q)$. Следовательно, нахождение наилучшего набора параметров необходимо осуществлять, исследуя выражение $\Psi_n(A_q)$. При каждом фиксированном

$\gamma \in (1/2, 1)$ оно представляет собой функцию переменных $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$, непрерывную в каждой точке q-мерного куба $[\delta, 1]^q$, где $\delta = \delta(n) > 0$ – некоторая величина, зависящая от n, и при любом n ограничивающая множество параметров $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$ слева. Согласно теореме Вейерштрасса функция $\Psi_n(A_q)$ имеет строгий минимум при некотором $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_q^*)$. Причем поскольку $\beta_k = 1, k = 1, \ldots, q$, соответствует полиномиальному случаю, а при $\beta_k = \beta_k(m) \to 0$, $m \to \infty$, достаточно большой скоростью величина $\Psi_n(A_q)$ неограниченно растет, то можно предположить, что β^* – внутренняя точка куба $[\delta, 1]^q$. Для того, чтобы найти оптимальный набор β^* для соответствующего асимптотического равенства, решим экстремальную задачу

$$\Psi_n(A_q) = c_q \beta_q^{2\gamma} + \frac{1}{4(1-\gamma)} \frac{\beta_{q-1}^2}{\beta_q^{2-2\gamma}} + \frac{1}{4(1-\gamma)} \frac{\beta_{q-2}^2}{\beta_{q-1}^{2-2\gamma}} + \ldots$$

$$\cdots + \frac{1}{4(1-\gamma)} \frac{\beta_1^2}{\beta_2^{2-2\gamma}} + \frac{c_1(\gamma)}{2\beta_1^2} \underset{A_q}{\to} \min,$$

где для краткости положено

$$c_q = \frac{2\gamma \Gamma(2\gamma - 1)(m+1)^{2-2\gamma}}{2^{2\gamma}(1-\gamma)}.$$

Естественно искать точку минимума этой функции там, где выполняется необходимое условие экстремума: $\partial \Psi_n(A_q) / \partial \beta_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, q$. Несложные вычисления приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} 2\gamma c_q \beta_q^{2\gamma-1} - \dfrac{1}{2} \dfrac{\beta_{q-1}^2}{\beta_q^{3-2\gamma}} = 0, \\ \dfrac{\beta_{q-1}}{\beta_q^{2-2\gamma}} - (1-\gamma) \dfrac{\beta_{q-2}^2}{\beta_{q-1}^{3-2\gamma}} = 0, \\ \dfrac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}^{2-2\gamma}} - (1-\gamma) \dfrac{\beta_{q-3}^2}{\beta_{q-2}^{3-2\gamma}} = 0, \\ \ldots \\ \dfrac{\beta_2}{\beta_3^{2-2\gamma}} - (1-\gamma) \dfrac{\beta_1^2}{\beta_2^{3-2\gamma}} = 0, \\ \dfrac{\beta_1}{2(1-\gamma)\beta_2^{2-2\gamma}} - \dfrac{c_1(\gamma)}{\beta_1^3} = 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

из которой последовательно находим:

$$\frac{\beta_{q-1}^2}{\beta_q^{2-2\gamma}} = 4\gamma c_q \beta_q^{2\gamma}, \quad \frac{\beta_{q-2}^2}{\beta_{q-1}^{2-2\gamma}} = \frac{4\gamma c_q \beta_q^{2\gamma}}{1-\gamma}, \ldots,$$

$$\frac{\beta_1^2}{\beta_2^{2-2\gamma}} = \frac{4\gamma c_q \beta_q^{2\gamma}}{(1-\gamma)^{q-2}}, \quad \frac{c_1(\gamma)}{2\beta_1^2} = \frac{4\gamma c_q \beta_q^{2\gamma}}{4(1-\gamma)^{q-1}}.$$

Таким образом, с оптимальным набором параметров функция $\Psi_n(A_q)$ имеет вид

$$\begin{gathered} \Psi_n(A_q^*) = c_q \beta_q^{*2\gamma} + \frac{\gamma c_q \beta_q^{*2\gamma}}{1-\gamma} + \frac{\gamma c_q \beta_q^{*2\gamma}}{(1-\gamma)^2} + \ldots + \\ + \frac{\gamma c_q \beta_q^{*2\gamma}}{(1-\gamma)^{q-1}} + \frac{\gamma c_q \beta_q^{*2\gamma}}{(1-\gamma)^{q-1}} = \frac{c_q (1+\gamma) \beta_q^{*2\gamma}}{(1-\gamma)^{q-1}}. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Осталось найти параметр β_q^*. С этой целью преобразуем систему (4.4) следующим образом

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\beta_{q-1}^*}{\beta_q^*}\right)^2 = 4\gamma c_q, \\ \left(\dfrac{\beta_{q-2}^*}{\beta_{q-1}^*}\right)^2 = \dfrac{1}{1-\gamma} \left(\left(\dfrac{\beta_{q-1}^*}{\beta_q^*}\right)^2\right)^{1-\gamma} = \dfrac{(4\gamma c_q)^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \\ \left(\dfrac{\beta_{q-3}^*}{\beta_{q-2}^*}\right)^2 = \dfrac{1}{1-\gamma} \left(\left(\dfrac{\beta_{q-2}^*}{\beta_{q-1}^*}\right)^2\right)^{1-\gamma} = \dfrac{(4\gamma c_q)^{(1-\gamma)^2}}{(1-\gamma)(1-\gamma)^{1-\gamma}}, \\ \ldots \\ \left(\dfrac{\beta_1^*}{\beta_2^*}\right)^2 = \dfrac{(4\gamma c_q)^{(1-\gamma)^{(q-2)}}}{(1-\gamma)^{\frac{1-(1-\gamma)^{(q-2)}}{\gamma}}}. \end{cases} \tag{4.6}$$

С другой стороны, из последнего уравнения в (4.4) получим

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 = \left(\frac{2(1-\gamma)c_1(\gamma)}{\beta_1^{2(1+\gamma)}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}.$$

Отсюда и из последнего уравнения системы (4.6) будем иметь

$$\beta_1^2 = (2c_1(\gamma))^{\frac{1}{1+\gamma}} \left(\frac{(1-\gamma)^{\frac{1-(1-\gamma)^{(q-1)}}{\gamma(1-\gamma)}}}{(4\gamma c_q)^{(1-\gamma)^{(q-2)}}}\right)^{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}, \ \gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Учитывая, что $\dfrac{c_1(\gamma)}{2\beta_1^2} = \dfrac{\gamma c_q \beta_q^{2\gamma}}{(1-\gamma)^{q-1}}$, найдем

$$\beta_q = (2c_1(\gamma))^{\frac{1}{2(1+\gamma)}} \left(\frac{(1-\gamma)^{q-1-\frac{1-(1-\gamma)^{q-1}}{\gamma(1+\gamma)}}}{(4\gamma c_q)^{1-\frac{(1-\gamma)^{q-1}}{1+\gamma}}}\right)^{\frac{1}{2\gamma}}.$$

Подставив полученное представление параметра β_q в (4.5), выполнив необходимые алгебраические преобразования, и учитывая, что $n = mq$ придем к (4.1). □

Из теоремы 4.1 следует, что параметры аппроксимирующей рациональной функции (1.1) можно подобрать так, что для приближений сопряженной функции (0.1) с плотностью $(1-x)^\gamma$, $\gamma \in (1/2, 1)$, на отрезке [–1, 1] справедлива оценка

$$|\hat{f}_{f_\gamma} - \hat{\sigma}_{n,q}(f_\gamma, x)| \le \frac{\sqrt{1-x^2}\,\mu(q,\gamma)}{(n+1)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}\left(1-\frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right)}} + \delta_n^*, \ n \to \infty,$$

где величина $\mu(q, \gamma)$ определена в формулировке теоремы 4.1, а величина $\delta_n^* \to 0$ при $n \to \infty$ и имеет заведомо больший порядок малости в сравнение с главным членом асимптотического выражения справа.

В теореме 4.1 положим значение $q = 1$. То есть аппроксимирующая функция имеет один полюс в открытой комплексной плоскости. Тогда

$$|\hat{f}_{f_\gamma} - \hat{\sigma}_{n,1}(f_\gamma, x)| \le \frac{\sqrt{1-x^2}\,\mu(1,\gamma)}{(n+1)^{\frac{2}{1+\gamma}(2\gamma-1)}} + \delta_n^*, \, n \to \infty,$$

Поскольку величина $2/(1+\gamma) > 1$, то полученная скорость приближений является большей в сравнении с соответствующим полиномиальным аналогом (см. следствие 3.1).

Известно [46, с. 96], что наилучшие равномерные полиномиальные приближения функции $(1-x)^\gamma$ обладают следующим свойством:

$$E_{2n}(|x|^{2\gamma};[-1,1]) = \frac{1}{2^\gamma} E_n((1-x)^\gamma;[0,1]).$$

Используя аналогичные рассуждения, после некоторых преобразований из (4.1) находим, что

$$\hat{\varepsilon}^*_{n,\,q}(|x|^s) \sim \frac{\mu(q,\, s)}{(n+1)^{\frac{2}{s}\left(1-\frac{(2-s)^q}{2^{q-1}(s+2)}\right)(s-1)}}, \, n \to \infty, \, s \in (1, 2),$$

где

$$\mu(q,\, s) = \frac{2^{1-s+\frac{s^3-2s^2-5s+12}{s(2+s)}+\frac{1}{s}\left(q+4(s-1)\frac{2^q-(2-s)^q}{2^q s(2+s)}\right)}}{\pi s(2-s)^{\frac{1}{s}\left(q+4(s-1)\frac{2^q-(2-s)^q}{2^q s(2+s)}\right)}} \times$$

$$\times q^{2^{\frac{1+s}{2+s}}}(2+s)[c_1(s)]^{\frac{s-1}{2(1+\gamma)}} \times$$

$$\times \sin\frac{\pi s}{2}\left(\frac{s^2\Gamma(s-1)}{2^{5-s}q^2}\right)^{\frac{1}{s}\left(1+(s-1)\frac{(2-s)^{q-1}}{2^{q-2}(2+s)}\right)},$$

$$c_1(s) = \int_0^1 \frac{u^{s+1}\,du}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}, \, s \in (1, 2).$$

Заключение

В работе исследованы рациональные аппроксимации сопряженной функции на отрезке $[-1, 1]$ суммами Фейера сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с ограничениями на количество геометрически различных полюсов. Установлено интегральное представление приближений сопряженной функции.

Изучены рациональные аппроксимации на отрезке $[-1, 1]$ сопряженной функции с плотностью $(1-x)^\gamma$, $\gamma \in (1/2, 1)$, введенными суммами Фейера. Получены интегральное представление приближений, оценка поточечных приближений и равномерных приближений с определенной мажорантой. Установлено ее асимптотическое выражение при $n \to \infty$, зависящее от параметров аппроксимирующей функции. В заключительной части найдены оптимальные значения параметров, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания мажоранты.

Следствием полученных результатов являются оценки поточечных и равномерных приближений и асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений сопряженной функции на отрезке суммами Фейера сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что при специальном выборе параметров аппроксимирующей функции возможно добиться скорости приближений большей в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами. Этот результат справедлив даже в случае одного полюса у аппроксимирующей функции.

Автор выражает глубокую признательность профессору Е.А. Ровбе за ряд полезных советов и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов*, *Ф.Д.* Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958. – 543 с.

2. *Мусхелишвили*, *Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. – 3-е изд. / Н.И. Мусхелишвили. – Москва: Наука, 1968. – 513 с.

3. *Бари*, *Н.К.* Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. – Москва: Физматлит, 1961. – 936 с.

4. *Зигмунд*, *А.* Тригонометрические ряды. В 2-х томах. Том 1 / А. Зигмунд. – Москва: Мир, 1965. – 616 с.

5. *Привалов*, *И.И.* Sur les fonctions conjuguees / И.И. Привалов // Bulletin de la Société Mathématique de France. – 1916. – Vol. 44. – P. 100–103.

6. *Привалов*, *И.И.* К теории сопряженных тригонометрических рядов / И.И. Привалов // Математический сборник. – 1923. – № 2. – С. 224–228.

7. *Колмогоров*, *А.Н.* Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier / А.Н. Колмогоров // Fundamenta Mathematicae. – 1925. – Vol. 7. – P. 24–29.

8. *Riesz*, *M.* Les fonctions conjuguées et les séries de Fourier / M. Riesz // Comptes rendus de l'Acadéemie des Sciences. – 1924. – Vol. 178. – P. 1464–1467.

9. *Riesz*, *M.* Sur les fonctions conjuguées / M. Riesz // Mathematische Zeitschrift. – 1927. – Vol. 27. – P. 218–244.

10. *Моторный*, *В.П.* Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами / В.П. Моторный // Украинский математический журнал. – 2001. – Т. 53, № 3. – С. 331–345.

11. *Моторный*, *В.П.* Приближение одного класса сингулярных интегралов алгебраическими

многочленами с учетом положения точки на отрезке / В.П. Моторный // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. – 2001. – Т. 232. – С. 268–285.

12. *Бари*, *Н.К.* О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций / Н.К. Бари // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1955. – Т. 19, № 5. – С. 285–302.

13. *Стечкин*, *С.Б.* О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами / С.Б. Стечкин // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1956. – Т. 20, № 2. – С. 197–206.

14. *Мисюк*, *В.Р.* Сопряженные функции на отрезке и соотношения для их наилучших равномерных полиномиальных приближений / В.Р. Мисюк, А.А. Пекарский // Известия НАН Беларуси, Сер. физико-математических наук. – 2015. – № 2. – С. 37–40.

15. *Русак*, *В.Н.* Равномерная рациональная аппроксимация сопряжённых функций / В.Н. Русак, И.В. Рыбаченко // Вестник БГУ. Сер. 1. Математика и информатика. – 2013. – Т. 3. – С. 83–86.

16. *Mardvilko*, *T.S.* Conjugate Functions on the Closed Interval and Their Relationship with Uniform Rational and Piecewise Polynomial Approximations / T.S. Mardvilko, A.A. Pekarskii // Math. Notes. – 2016. – Vol. 99, iss. 3. – P. 272–283.

17. *Ровба*, *Е.А.* Приближения сопряженных функций частичными суммами сопряженных рядов Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышёва – Маркова / Е.А. Ровба, П.Г. Поцейко // Известия вузов. Математика. – 2020. – № 9. – С. 68–84.

18. *Русак*, *В.Н.* Об одном методе приближения рациональными функциями / В.Н. Русак // Весці АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1978. – Т. 3. – С. 15–20.

19. *Ровба*, *Е.А.* Рациональные интегральные операторы на отрезке / Е.А. Ровба // Вестник БГУ. Сер. 1. Мат. и инф. – 1996. – Т. 1, № 1. – С. 34–39.

20. *Ровба*, *Е.А.* Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации / Е.А. Ровба // Доклады АН БССР. – 1979. – Т. 23, № 11. – С. 968–971.

21. *Takenaka*, *S.* On the orthogonal functions and a new formula of interpolations / S. Takenaka // Japanese Journal of Mathematics. – 1925. – Vol. 2. – P. 129–145.

22. *Malmquist*, *F.* Sur la détermination d’une classe functions analytiques par leurs dans un ensemble donné de points / F. Malmquist // Compte Rendus Sixiéme Congrés math. scand. Kopenhagen, Denmark. – 1925. – Vol. 2, iss. 1. – P. 253–259.

23. *Джрбашян*, *М.М.* К теории рядов Фурье по рациональным функциям / М.М. Джрбашян // Известия Академии наук Армянской ССР. Сер. Физико-математическая. – 1956. – Т. 9, № 7. – С. 3–28.

24. *Смотрицкий*, *К.А.* О приближении дифференцируемых в смысле Римана – Лиувилля функций / К.А. Смотрицкий // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2002. – Т. 4. – С. 42–47.

25. *Patseika*, *P.G.* On one rational integral operator of Fourier – Chebyshev type and approximation of Markov functions / P.G. Patseika, Y.A. Rouba, K.A. Smatrytski // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. – 2020. – Vol. 2. – P. 6–27.

26. *Поцейко*, *П.Г.* Приближения на классах интегралов Пуассона рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва / П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62, № 2. – С. 362–386.

27. *Поцейко*, *П.Г.* Сопряженный рациональный оператор Фурье – Чебышёва и его аппроксимационные свойства / П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба // Известия вузов. Математика. – 2022. – № 3. – С. 44–60.

28. *Fejér*, *L.* Untersuchungen über Fouriersche Reihen / L. Fejér // Mathematische Annalen. – 1904. – Vol. 58. – P. 51–69.

29. *Lebesgue*, *H.* Sur les intégrales singuliéres / H. Lebesgue // Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série. – 1909. – Tome 1. – P. 25–117.

30. *Bernstein*, *S.* Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomés de degré donné / S. Bernstein, Hayez, imprimeur des academies royales. – Bruxelles, 1912. – 104 p.

31. *Никольский*, *С.М.* Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера / С.М. Никольский // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1940. – Т. 4, № 6. – С. 501–508.

32. *Zygmund*, *A.* On the degree of approximation of functions by Fejér means / A. Zygmund // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1945. – Vol. 51. – P. 274–278.

33. *Новиков*, *О.А.* Приближение классов интегралов Пуассона суммами Фейера / О.А. Новиков, О.Г. Ровенская // Донбасский гос. пед. ун-тет, Компьютерные исследования и моделирование. – 2015. – Т. 7, № 4. – С. 813–819.

34. *Никольский*, *С.М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами / С.М. Никольский // Труды математического ин-та им. В.А. Стеклова. – 1945. – Т. 15. – С. 3–76.

35. *Alexits*, *G.* Sur l’ordre de grandeur de l'approximation d’une fonction p’eriodique par les sommes de Fejér / G. Alexits // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. – 1952. – Vol. 3, iss. 1-2. – P. 29–42. – DOI: 10.1007/bf02146066.

36. *Ефимов*, *А.В.* О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера / А.В. Ефимов // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1958. – Т. 22, № 1. – С. 81–116.

37. *Ефимов*, *А.В.* Приближение сопряженных функций суммами Фейера / А.В. Ефимов // Успехи математических наук. – 1959. – Т. 14, № 1 (85). – С. 183–188.

38. *Стечкин*, *С.Б.* О приближении периодических функций суммами Фейера / С.Б. Стечкин // Тр. МИАН СССР. – 1961. – Т. 62. – С. 48–60.

39. *Поцейко*, *П.Г.* О суммах Фейера сопряженных рациональных рядов Фурье – Чебышёва и приближениях некоторых функций / П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXII междунар. науч. конф., Смоленск, 28–29 мая 2021 г. – СмолГУ; редкол.: проф. К.М. Расулов [и др.]. – Смоленск, 2021. – С. 300–321.

40. *Лунгу*, *К.Н.* О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов / К.Н. Лунгу // Математический сборник. – 1971. – Т. 86 (128), № 2 (10). – С. 314–324.

41. *Лунгу*, *К.Н.* О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов / К.Н. Лунгу // Сибирский математический журнал. – 1984. – Т. 15, № 2. – С. 151–160.

42. *Русак*, *В.Н.* Рациональные функции как аппарат приближения / В.Н. Русак. – Минск: БГУ, 1979. – 153 с.

43. *Сидоров*, *Ю.В.* Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – Москва: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит-ры, 1989. – 480 с.

44. *Евграфов*, *М.А.* Асимптотические оценки и целые функции / М.А. Евграфов. – Москва: Наука, 1979. – 320 с.

45. *Федорюк*, *М.В.* Асимптотика. Интегралы и ряды / М.В. Федорюк. – Москва: Гл. ред. физмат. лит-ры, 1987. – 544 с.

46. *Бернштейн*, *С.Н.* Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Часть 1. / С.Н. Бернштейн. – Москва; Ленинград: Главная редакция общетехнической литературы, 1937. – 200 с.

Поступила в редакцию 14.02.2023.

Информация об авторах

Поцейко Павел Геннадьевич – к.ф.-м.н.