МАТЕМАТИКА

УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_95

О СТРОГО 2-МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

М.Н. Коновалова[1], **В.С. Монахов**[2], **И.Л. Сохор**[3]

[1]*Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Брянск*
[2]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*
[3]*Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина*

ON STRICTLY 2-MAXIMAL SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

M.N. Konovalova[1], **V.S. Monakhov**[2], **I.L. Sokhor**[3]

[1]*Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Bryansk*
[2]*Francisk Skorina Gomel State University*
[3]*Brest State A.S. Pushkin University*

Аннотация. Приводятся примеры конечных разрешимых и простых групп, в которых каждая 2-максимальная подгруппа является строго 2-максимальной. Доказывается, что если в группе G существует строго 2-максимальная подгруппа порядка 2, то группа является сверхразрешимой группой порядка $2pq$, где p и q – простые числа, не обязательно различные, либо G изоморфна знакопеременной группе A_4. Устанавливается строение конечной группы, в которой каждая 2-максимальная подгруппа является холловой. Для наследственной насыщенной решеточной формации $\mathfrak{F}$, содержащей все нильпотентные группы, и группы $G \notin \mathfrak{F}$ доказывается, что требование $\mathfrak{F}$-субнормальности всех строго 2-максимальных подгрупп совпадает с требованием субнормальности всех 2-максимальных подгрупп.

Ключевые слова: *конечная группа*, 2-*максимальная подгруппа*, *строго* 2-*максимальная подгруппа*, *холлова подгруппа*, *решеточная формация*.

Для цитирования: *Коновалова*, *М.Н.* О строго 2-максимальных подгруппах конечных групп / М.Н. Коновалова, В.С. Монахов, И.Л. Сохор // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 95–100. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_95

Abstract. We give examples of finite soluble and simple groups in which every 2-maximal subgroup is strictly 2-maximal. We prove that if in a group G there is a strictly 2-maximal subgroup of order 2, then G is a supersoluble group of order $2pq$, where p and q are primes, not necessarily distinct, or G is isomorphic to the alternating group A_4. We establish the structure of a finite group in which every 2-maximal subgroup is a Hall subgroup. We prove that the requirement of $\mathfrak{F}$-subnormality of all strictly 2-maximal subgroups coincides with the requirement of subnormality of all 2-maximal subgroups of a group G for a subgroup-closed saturated lattice formation $\mathfrak{F}$ containing all nilpotent groups and $G \notin \mathfrak{F}$.

Keywords: *finite group*, 2-*maximal subgroup*, *strictly* 2-*maximal subgroup*, *Hall subgroup*, *lattice formation*.

For citation: *Konovalova*, *M.N.* On strictly 2-maximal subgroups of finite groups / M.N. Konovalova, V.S. Monakhov, I.L. Sokhor // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 95–100. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_95 (in Russian)

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Запись $H \le G$ $(H < G)$ означает, что H – подгруппа (собственная подгруппа) группы G. Подгруппа M группы G называется максимальной подгруппой, обозначается $M \lessdot G$, если $M < G$ и из включений $M \le H \le G$ следует, что $M = H$ или $H = G$.

Пусть G – группа и H – подгруппа группы G. Будем использовать обозначение:

$$\mathrm{Max}(G,H) = \{M \lessdot G \mid H \le M\}.$$

Если $H = 1$ – единичная подгруппа группы G, то вместо $\mathrm{Max}(G,1)$ пишем $\mathrm{Max}(G)$, где $\mathrm{Max}(G)$ – множество всех максимальных подгрупп группы G. Следует отметить, что $\mathrm{Max}(G) = \varnothing$ в точности тогда, когда $G = 1$.

Подгруппа H группы G называется 2-максимальной подгруппой группы G, если существует подгруппа $M \in \mathrm{Max}(G,H)$ такая, что $H \lessdot M$; n-максимальной подгруппой группы G для $n \ge 3$, если существует подгруппа $M \in \mathrm{Max}(G,H)$ такая, что H – $(n-1)$-максимальная подгруппа в M.

Существуют группы, в которых одна и та же подгруппа одновременно является 2-максимальной и n-максимальной подгруппой для $n \ge 3$. Например, в группе $L_2(8)$ [1, IdGroup(504,156)] подгруппа C_2 является 2-максимальной, 3-максимальной и 4-максимальной подгруппой:

$$C_2 \lessdot D_{14} \lessdot L_2(8),$$

$$C_2 \lessdot S_3 \lessdot D_{18} \lessdot L_2(8),$$

$$C_2 \lessdot C_2^2 \lessdot C_2^3 \lessdot C_2^3 \rtimes C_7 \lessdot L_2(8).$$

Монахов В.С. и Княгина В.Н. [2, пример 3] привели пример групп, в которых для любого $n \geq 3$ некоторая 2-максимальная подгруппа является n-максимальной.

Вместе с тем, существуют ситуации, когда 2-максимальная подгруппа остается 2-максимальной в любых цепочках подгрупп. Подгруппа H группы G называется строго 2-максимальной подгруппой группы G, если $H \lessdot M$ для всех $M \in \mathrm{Max}(G, H)$. Ясно, что строго 2-максимальная подгруппа группы G 2-максимальна в G и не является n-максимальной в G ни для какого $n \geq 3$.

Через $\mathrm{Max}_2(G)$ будем обозначать множество всех 2-максимальных подгрупп группы G, через $\mathrm{Max}_2^*(G)$ – множество всех строго 2-максимальных подгрупп группы G. Если

$$H \in \mathrm{Max}_2(G) \setminus \mathrm{Max}_2^*(G),$$

то согласно [3] подгруппа H называется слабо 2-максимальной подгруппой группы G.

Ясно, что $\mathrm{Max}_2(G) = \varnothing$ в точности тогда, когда $G = 1$ или $|G|$ – простое число. Из леммы об индексах следует, что 2-максимальная подгруппа наименьшего индекса будет строго 2-максимальной, см. лемму 2.1. Поэтому $\mathrm{Max}_2^*(G) \neq \varnothing$ для любой группы $G \neq 1$ непростого порядка.

Второй автор данной работы сформулировал следующую проблему: «*Каковы главные факторы конечной группы, в которой каждая 2-максимальная подгруппа не является n-максимальной для любого* $n \geq 3$?» [4, 19.54]. Эта проблема рассматривалась в [3], [5], [6].

Если каждая 2-максимальная подгруппа группы G не является n-максимальной для $n \geq 3$, то $\mathrm{Max}_2(G) = \mathrm{Max}_2^*(G)$, т. е. каждая 2-максимальная подгруппа группы G строго 2-максимальна. Поэтому указанная проблема может быть сформулирована следующим образом: «Каковы главные факторы конечной группы, в которой $\mathrm{Max}_2(G) = \mathrm{Max}_2^*(G)$?»

В разделе 2 мы приводим примеры групп, в которых $\mathrm{Max}_2(G) = \mathrm{Max}_2^*(G)$, и некоторые наблюдения о строго 2-максимальных подгруппах.

В разделе 3 мы рассматриваем свойства групп с 2-максимальной подгруппой порядка 2. Такими группами являются, например, группы $L_2(8)$ и $L_2(13)$. В случае, когда в группе существует строго 2-максимальная подгруппа порядка 2, группа является сверхразрешимой группой порядка $4p$, $2pq$ или $2p^2$, где p и q – различные простые числа, либо изоморфна A_4, см. теорему 3.1.

В разделе 4 мы изучаем группу, в которой каждая 2-максимальная подгруппа является холловой, см. теорему 4.1. Опираясь на результаты Масловой Н.В. и Ревина Д.О. [7], мы получаем разрешимость группы, а затем применяем описание из [8].

Ю.В. Луценко и А.Н. Скиба [9] показали, что в ненильпотентной группе с субнормальными 2-максимальными подгруппами все собственные подгруппы абелевы. Этот результат остается верным, если субнормальными являются строго 2-максимальные подгруппы [10]. Группы с формационно субнормальными подгруппами исследовались в [11]–[14]. В разделе 5 мы рассматриваем группы с формационно субнормальными строго 2-максимальными подгруппами в случае, когда формация решеточная. В этой ситуации требование $\mathfrak{F}$-субнормальности всех строго 2-максимальных подгрупп совпадает с требованием субнормальности всех 2-максимальных подгрупп, см. теорему 5.1.

1 Вспомогательные результаты

***Лемма* 1.1** [15, теорема 1.39]. *Пусть* $H \leq K \leq G$ *и G – группа. Если T – правая трансверсаль H в K, а S – правая трансверсаль K в G, то TS – правая трансверсаль H в G. В частности,* $|G:H| = |G:K||K:H|$.

***Лемма* 1.2** [16, лемма 4.1], [17, II.3.10]. *Пусть A – неприводимая абелева группа автоморфизмов группы B,* $|B| = p^m > 1$. *Тогда A – циклическая группа и m – наименьшее натуральное число такое, что* $|\mathrm{A}|$ *делит* $p^m - 1$.

***Лемма* 1.3** [17, IV.2.6]. *Пусть p – силовская p-подгруппа группы G такая, что* $P \leq Z(N_G(P))$ *(т. е.* $C_G(P) = N_G(P)$ *и поэтому P абелева). Тогда существует нормальная подгруппа N группы G такая, что* $G/N \cong P$.

***Лемма* 1.4** [17, IV.2.8]. *Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G. Если группа G имеет циклическую силовскую p-подгруппу P, то существует нормальная подгруппа N группы G такая, что* $G/N \cong P$.

***Лемма* 1.5** [17, II.8.17]. *Пусть G – группа порядка* 12 *или* 24. *Если G содержит элементарную абелеву нормальную подгруппу порядка* 4 *и* $C_G(N) = N$, *то либо* $G \cong A_4$, *либо* $G \cong S_4$.

***Лемма* 1.6** [17, IV.7.4]. *Пусть H – максимальная подгруппа группы G. Если H нильпотентна и* $Z(P) \leq P'$, *где p – силовская 2-подгруппа из H, то группа G разрешима.*

***Лемма* 1.7**. *Если в группе M существует максимальная подгруппа K порядка* 2, *то* $|M| = 2p$, *p – простое,* $p \geq 2$.

Доказательство. Если K нормальна в M, то $|M| = 2p$, p – простое, $p \geq 2$. Пусть K не нормальна в M. Тогда K – силовская 2-подгруппа группы M, $M = N \rtimes K$ и по лемме 1.4 $N \lessdot M$. Поскольку K действует неприводимо на N, то $|N| = p$ по лемме 1.2. □

***Лемма* 1.8.** *Если G – несверхразрешимая группа порядка $4p$, p – простое, то $G \cong A_4$.*

Доказательство. Пусть p и q – силовские p- и 2-подгруппы группы G. Если $Q = N_G(Q)$, то p нормальна в G по лемме 1.3 и G сверхразрешима [17, VI.9], противоречие с условием. Поэтому Q нормальна в G. Если в G существует нормальная подгруппа Q_1 порядка 2, то $|G/Q_1| = 2p$ и G сверхразрешима [17, VI.9], противоречие с условием. Поэтому Q – минимальная нормальная в G подгруппа, $Q = C_G(Q)$ и P действует неприводимо на Q. По лемме 1.2 $p = 3$ и $G \cong A_4$ по лемме 1.5. □

2 О группах, в которых $\mathrm{Max}_2(G) = \mathrm{Max}_2^{\star}(G)$

***Лемма* 2.1.** *Если G – неединичная группа не простого порядка, то $\mathrm{Max}_2^{\star}(G) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Пусть G – неединичная группа не простого порядка и H – ее 2-максимальная подгруппа наименьшего индекса среди всех 2-максимальных подгрупп группы G. Предположим, что H не является строго 2-максимальной подгруппой. Тогда существует подгруппа $M \in \mathrm{Max}(G, H)$ такая, что H не является максимальной подгруппой в M. Значит, в M существует подгруппа K такая, что $H < K \lessdot M$. По лемме 1.1

$$|G:H| = |G:K||K:H|,$$
$$|K:H| \neq 1, |G:K| < |G:H|.$$

Таким образом, K – 2-максимальная подгруппа группы G и $|G:K| < |G:H|$, что противоречит выбору H. Отсюда заключаем, что H является строго 2-максимальной подгруппой в G. □

***Лемма* 2.2.** *Пусть H – 2-максимальная подгруппа группы G, $H \lessdot M \lessdot G$. Если индексы $|G:M|$ и $|M:H|$ – простые числа, то H – строго 2-максимальная подгруппа группы G. В частности, если G – сверхразрешимая группа, то*

$$\mathrm{Max}_2(G) = \mathrm{Max}_2^{\star}(G).$$

Доказательство. Предположим, что H – 2-максимальная подгруппа группы G, $H \lessdot M \lessdot G$ и индексы $|G:M|$ и $|M:H|$ – простые числа. Допустим, что H не является строго 2-максимальной подгруппой группы G. Тогда в G есть подгруппа K такая, что $H < K < G$ и H 2-максимальна в K. Следовательно, существует подгруппа L такая, что $H \lessdot L \lessdot K < G$. По лемме 1.1

$$|G:H| = |G:K||K:L||L:H|,$$
$$|G:K| \neq 1, |K:L| \neq 1, |L:H| \neq 1,$$

значит, $|G:H|$ делится на три простых числа, противоречие. Таким образом, H – строго 2-максимальная подгруппа группы G.

Пусть $H \lessdot M \lessdot G$ и пусть G – сверхразрешимая группа. По теореме Хупперта [17, VI.9.5], $|G:H|$ делится в точности на два простых числа, не обязательно различных. Если $H < X \lessdot G$, то $|X:H|$ – простое число и H – максимальная подгруппа группы X. Поскольку X – произвольная максимальная подгруппа в G, содержащая H, то H – строго 2-максимальная подгруппа группы G. □

Приведем примеры несверхразрешимых групп, в которых $\mathrm{Max}_2(G) = \mathrm{Max}_2^{\star}(G)$.

***Пример* 2.1.** Для группы $C_3^2 \rtimes C_8$ из [1, IdGroup(72,39)], [20] следует:

$$\mathrm{Max}(C_3^2 \rtimes C_8) = \{C_8, C_3^2 \rtimes C_4\},$$
$$\mathrm{Max}_2(C_3^2 \rtimes C_8) = \{C_4, C_3 \rtimes S_3\} = \mathrm{Max}_2^{\star}(C_3^2 \rtimes C_8).$$

***Пример* 2.2.** Для группы $U_3(2)$ из [1, IdGroup(72,41)], [20] следует:

$$\mathrm{Max}(U_3(2)) = \{Q_8, C_3^2 \rtimes C_4\},$$
$$\mathrm{Max}_2(U_3(2)) = \{C_4, C_3 \rtimes S_3\} = \mathrm{Max}_2^{\star}(U_3(2)).$$

***Пример* 2.3.** Для группы $L_2(17)$ из [1], [19, p. 9], [18] следует:

$$\mathrm{Max}(L_2(17)) = \{C_{17} \rtimes C_8, S_4, D_{18}, D_{16}\},$$
$$\mathrm{Max}_2(L_2(17)) = \{C_{17} \rtimes C_4, C_8, A_4, D_8, S_3, C_9\} =$$
$$= \mathrm{Max}_2^{\star}(L_2(17)).$$

***Пример* 2.4.** Для группы $U_3(3)$ из [1], [18], [19, p. 9] следует:

$$\mathrm{Max}(U_3(3)) =$$
$$= \{(C_3^2 \rtimes C_3) \rtimes C_8, (C_4^2 \rtimes C_3) \rtimes C_2, SL_2(3) \rtimes C_4, L_3(2)\},$$
$$\mathrm{Max}_2(U_3(3)) =$$
$$= \{(C_3^2 \rtimes C_3) \rtimes C_4, ((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_3,$$
$$C_4^2 \rtimes C_2, C_4^2 \rtimes C_3, C_7 \rtimes C_3, C_3 \rtimes C_8, S_4\} =$$
$$= \mathrm{Max}_2^{\star}(U_3(3)).$$

3 Группы с 2-максимальной подгруппой порядка 2

Для неединичной группы G рассмотрим цепочку подгрупп

$$1 = G_t \lessdot G_{t-1} \lessdot \ldots \lessdot G_1 \lessdot G_0 = G,$$

в которой каждая G_i является максимальной подгруппой G_{i-1}. Число подгрупп в такой цепочке называется ее длиной. Длина группы G, обозначаемая через $l(G)$, есть максимальная длина таких цепочек. Глубина группы G, обозначаемая через $\lambda(G)$, есть минимальная длина таких цепочек. Если $1 \leq \lambda(G) \leq 2$, то G – группа простого порядка или группа с максимальной подгруппой простого порядка.

Предположим, что в группе G есть 2-максимальная подгруппа K простого порядка. Тогда $1 \lessdot K \lessdot M \lessdot G$ и $\lambda(G) = 3$.

***Лемма* 3.1** [21, теорема 1]. *Группа G имеет глубину 3 тогда и только тогда, когда либо G – разрешима и ее главный ряд имеет длину 3, либо G – одна из простых групп таблицы 3.1.*

Таблица 3.1. – Простые группы G

G	Условия
A_p	p и $(p-1)/2$ простые и $p \notin \{7,11,23\}$
$L_2(q)$	$(q+1)/(2,q-1)$ или $(q-1)/(2,q-1)$ простые, $q \neq 9$, или q простое и $q \equiv \pm 3, \pm 13 \pmod{40}$, или $q = 3^k$ с простым $k \geq 3$;
$L_n^{\epsilon}(q)$	n и $\dfrac{q^n-\epsilon}{(q-\epsilon)(n,q-\epsilon)}$ простые, $n \geq 3$ и $(n,q,\epsilon) \neq (3,4,+)$, $(3,3,-)$, $(3,5,-)$, $(5,2,-)$
${}^2B_2(q)$	$q-1$ простое
M_{23}, $\mathbb{B}$	

Из леммы 3.1 вытекает следующая лемма.

***Лемма* 3.2.** *Группа G имеет 2-максимальную подгруппу K порядка 2, $K \lessdot M \lessdot G$, тогда и только тогда, когда либо G разрешима и ее главный ряд имеет длину 3, либо G – простая группа и справедливо одно из следующих утверждений*:

(1) $G \cong L_2(2^k)$, $M \cong D_{2(2^k \pm 1)}$, $2^k \pm 1$ – простое;

(2) $G \cong L_2(q)$, $M \cong D_{q\pm 1}$, $(q \pm 1)/2$ – простое, $q \neq 9$;

(3) $G \cong {}^2B_2(q)$, $M \cong D_{2(q-1)}$, $q-1$ – простое.

***Пример* 3.1.** В знакопеременной группе A_5 степени 5 [1, IdGroup(60,5)] подгруппы порядка 3 и 5 являются строго 2-максимальными подгруппами. Подгруппа порядка 2 является слабо 2-максимальной подгруппой.

***Пример* 3.2.** В знакопеременной группе $A_4 = C_2^2 \rtimes C_3$ степени 4 [1, IdGroup(12,3)] подгруппа порядка 2 является строго 2-максимальной подгруппой.

***Теорема* 3.1.** *Если в группе G существует строго 2-максимальная подгруппа порядка 2, то G является сверхразрешимой группой порядка $2pq$, где p и q – простые числа, не обязательно различные, либо G изоморфна знакопеременной группе степени 4.*

Доказательство. Зафиксируем в группе G строго 2-максимальную подгруппу K порядка 2. Если G – 2-группа, то $|G| = 8$. Пусть G – не 2-группа. Если K – силовская 2-подгруппа группы G, то G 2-нильпотентна по лемме 1.4. Если $K < G_2$, где G_2 – силовская 2-подгруппа группы G, то G_2 – максимальная подгруппа группы G и $|G_2| = 4$. По лемме 1.6 группа G разрешима.

Пусть M – произвольная максимальная подгруппа группы G, содержащая K. По условию подгруппа K максимальна в M. Согласно лемме 1.7 либо $|M| = 4$, либо $|M| = 2p$, p – простое нечетное число.

Пусть $|M| = 4$. Если M нормальна в G, то $|G| = 4r$, r – простое нечетное. Если M не нормальна в G, то $M = N_G(M)$ и по лемме 1.3 существует нормальная в G подгруппа Q такая, что $G = Q \rtimes M$. Подгруппа $Q \rtimes K$ максимальна в G. По условию подгруппа K будет максимальной в $Q \rtimes K$, поэтому $|Q| = q$ по лемме 1.7 и $|G| = 4q$, q – нечетное простое.

Пусть $|M| = 2p$, p – простое нечетное число. Если M нормальна в G, то $|G| = 2p^2$ или $|G| = 2pr$, r – простое, $r \neq p$. Пусть M не нормальна в G, тогда $M = N_G(M)$ и $|G:M| = t^a > 2$, t – простое нечетное. Если $p \neq t$, то KG_t – максимальная в G подгруппа, где G_t – силовская t-подгруппа группы G. По условию подгруппа K максимальна в KG_t и $|G| = 2pt$ по лемме 1.7. Пусть $p = r$. Тогда P нормальна в G, где P – силовская p-подгруппа из M. В фактор-группе G/P подгруппа M/P максимальна и имеет порядок 2, поэтому $|G/P : M/P| = p$ по лемме 1.7 и $|G| = 2p^2$.

Группы порядков $2pq$ и $2p^2$ сверхразрешимы. Согласно лемме 2.2 в сверхразрешимой группе любая 2-максимальная подгруппа является строго 2-максимальной. Поэтому любая группа порядка $2pq$, $2p^2$ и сверхразрешимые группы порядка $4p$ удовлетворяют условию теоремы. Несверхразрешимая группа порядка $4p$ изоморфна A_4 по лемме 1.8, эта группа также удовлетворяет условию теоремы ввиду примера 3.2. □

***Пример* 3.3.** В простых группах $L_2(8)$ и $L_2(13)$ есть максимальная подгруппа, изоморфная D_{14}, поэтому подгруппа порядка 2 является 2-максимальной подгруппой в этих группах. В простой группе $L_2(23)$ есть максимальная подгруппа D_{22}, поэтому подгруппа порядка 2 в группе $L_2(23)$ является 2-максимальной подгруппой. Поэтому в теореме 3.1 слово «строго» убрать нельзя.

4 Группы с холловыми 2-максимальными подгруппами

Напомним, что подгруппа H группы G называется холловой подгруппой, если $|H|$ и $|G:H|$ взаимно просты. Зафиксируем следующие обозначения: $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G; G_p – силовская p-подгруппа группы G;

$$\sigma(G) = \{r \in \pi(G) : |G_r| = r\};$$

$$\tau(G) = \{r \in \pi(G) : |G_r| > r\}.$$

Ясно, что $\pi(G) = \sigma(G) \cup \tau(G)$ и $\sigma(G) \cap \tau(G) = \varnothing$. Через $G_{\sigma(G)}$ и $G_{\tau(G)}$ обозначаются $\sigma(G)$-холлова и $\tau(G)$-холлова подгруппы группы G.

Говорят, что группа G имеет силовскую башню, если она обладает нормальным рядом, факторы которого изоморфны силовским подгруппам.

Подгруппой Гашюца группы G называется подгруппа W, удовлетворяющая следующим двум условиям:

(1) W сверхразрешима;

(2) если $W \le A < B \le G$, то $|B:A|$ – не простое число.

В любой разрешимой группе подгруппы Гашюца существуют и сопряжены [15, теорема 5.29].

Сверхразрешимым корадикалом группы G называется наименьшая нормальная в G подгруппа, фактор-группа по которой сверхразрешима.

***Теорема* 4.1.** *Пусть G – непримарная группа, в которой каждая 2-максимальная подгруппа является холловой подгруппой. Если G – сверхразрешимая группа, то ее порядок свободен от квадратов, т. е. $\pi(G) = \sigma(G)$. Пусть G – несверхразрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *группа G имеет силовскую башню и каждая максимальная в G подгруппа является холловой подгруппой*;

(2) $|\sigma(G)| \ge 2$ *и* $G_{\sigma(G)} \le W$, *где W – подгруппа Гашюца группы G*;

(3) $|\tau(G)| \ge 1$ *и* $G_{\tau(G)}$ *является сверхразрешимым корадикалом группы G*.

Доказательство теоремы 4.1 осуществляется по следующей схеме. Вначале опираясь на результаты Н.В. Масловой и Д.О. Ревина [7], мы получаем разрешимость группы, затем доказываем утверждение (1) теоремы и применяем описание групп из [8].

Из теоремы 4.1 вытекает, что бипримарные группы с холловыми 2-максимальными подгруппами имеют порядок pq. Трипримарные группы могут быть несверхразрешимыми.

***Пример* 4.1.** В полной линейной группе $GL_2(29)$ есть циклическая подгруппа C_{15} порядка 15, которая действует неприводимо на элементарной абелевой группе C_{29}^2 порядка 29^2. В полупрямом произведении $C_{29}^2 \rtimes C_{15}$ все максимальные подгруппы и все 2-максимальные подгруппы холловы.

5 Группы с формационными ограничениями на 2-максимальные подгруппы

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, G – группа. Пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G.

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если $H = G$ или существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \lessdot H_1 \lessdot \ldots \lessdot H_{n-1} \lessdot H_n = G$$

такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \le H_{i-1}$ для всех i [16, II.8].

В случае, когда $H \lessdot G$ и H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, говорят, что H $\mathfrak{F}$-нормальна в G. В любой группе $\mathfrak{N}$-субнормальная подгруппа субнормальна, а в разрешимых группах верно и обратное утверждение: субнормальная подгруппа разрешимой группы $\mathfrak{N}$-субнормальна, см. [16], [22, лемма 1.11].

Формация $\mathfrak{F}$ называется решеточной, если в любой группе множество всех ее $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп. Решеточные формации описаны в работе [23].

***Теорема* 5.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная решеточная формация, содержащая все нильпотентные группы, и группа $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *группа G содержит максимальную ненормальную подгруппу M и каждая максимальная в M подгруппа субнормальна в G*;

(2) *каждая 2-максимальная подгруппа группы G субнормальна в G*;

(3) *каждая строго 2-максимальная подгруппа группы G субнормальна в G*;

(4) *группа G содержит максимальную не $\mathfrak{F}$-нормальную подгруппу M и каждая максимальная в M подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна в G*;

(5) *каждая 2-максимальная подгруппа группы G $\mathfrak{F}$-субнормальна в G*;

(6) *каждая строго 2-максимальная подгруппа группы G $\mathfrak{F}$-субнормальна в G*;

(7) *все собственные подгруппы в группе G абелевы.*

Доказательство теоремы 5.1 осуществляется по следующей схеме. Используя результаты работ [9], [10], [25] вначале проверяем, что утверждения (1), (2), (3) и (7) эквивалентны. Затем доказываем, что для решеточной формации утверждения (4), (5), (6) и (7) эквивалентны.

Отметим, что частными случаями доказанной теоремы являются результаты работ [9], [10], [24] и [25].

ЛИТЕРАТУРА

1. *GAP – Groups, Algorithms, Programming: a System for Computational Discrete Algebra* [Electronic resource]. – Ver. 4.11.1 released on 02 March 2021. – Mode of access: http://www.gap-system.org. – Date of access: 20.04.2021.

2. *Monakhov, V.S.* Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche Mat. – 2013. – Vol. 62. – P. 307–322.

3. *Meng, H.* Weak second maximal subgroups in solvable groups / H. Meng, X. Guo // J. Algebra. – 2019. – Vol. 517. – P. 112–118.

4. *Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп* / 19-е изд. доп. – Новосибирск:

Институт математики Сибирского отделения РАН, 2018. – 248 с.

5. *Meng*, *H*. Overgroups of weak second maximal subgroups / H. Meng, X. Guo // Bull. Aust. Math. Soc. – 2019. – Vol. 99. – P. 83–88.

6. *Чжан*, *Ц*. О вторых максимальных подгруппах конечных групп / Ц. Чжан, Ч. Гао, Л. Мяо // Сибирский математический журнал. – 2021. – Vol. 62. – С. 221–225.

7. *Маслова*, *Н.В*. Конечные группы, все максимальные подгруппы которых холловы / Н.В. Маслова, Д.О. Ревин // Математические труды. – 2012. – Т. 22, № 2. – С. 105–126.

8. *Монахов*, *В.С*. Конечные π-разрешимые группы с холловыми максимальными подгруппами / В.С. Монахов // Математические заметки. – 2008. – Т. 84, № 3. – С. 390–394.

9. *Луценко*, *Ю.В*. Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Математические заметки. – 2012. – Т. 91, № 5. – С. 730–740.

10. *Горбатова*, *Ю.В*. Конечные группы с субнормальными строго 2- или 3-максимальными подгруппами / Ю.В. Горбатова, М.Н. Коновалова // Вестник Омского университета. – 2019. – Т. 24, № 3. – С. 4–12.

11. *Kovaleva*, *V.A*. Finite soluble groups with all n-maximal subgroups $\mathfrak{F}$-subnormal / V.A. Kovaleva, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2014. – Vol. 17, № 2. – P. 273–290.

12. *Монахов*, *В.С*. О группах с формационно субнормальными 2-максимальными подгруппами / В.С. Монахов // Математические заметки. – 2019. – Т. 105, № 2. – С. 269–277.

13. *Коновалова*, *М.Н*. Конечные группы с $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами / М.Н. Коновалова // Математические заметки. – 2020. – Vol. 108, № 2. – С. 215–223.

14. *Monakhov*, *V.S*. On groups with formational subnormal strictly 2-maximal subgroups / V.S. Monakhov, M.N. Konovalova // Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal. – Jan. 2021. – Vol. 73, № 1. – P. 107–116.

15. *Монахов*, *В.С*. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

16. *Шеметков*, *Л.А*. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 271 с.

17. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1967. – 793 p.

18. *Connor*, *T*. An atlas of subgroup lattices of finite almost simple groups / T. Connor, D. Leemans // Ars Math. Contemp. – 2015. – Vol. 8. – P. 259–266.

19. *Atlas of Finite Groups: Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups* / J.H. Conway [et al.] – Oxford: Clarendon Press. – 1985. – 286 p.

20. *Dokchitser*, *T*. GroupNames [Electronic resource] / T. Dokchitser. – Mode of access: http://groupnames.org. – Date of access: 30.04.2021.

21. *Burness*, *T.C*. On the length and depth of finite groups / T.C. Burness, M.W. Liebeck, A. Shalev // Proc. London Math. Soc. – 2019. – № 119 (3). – P. 1464–1492.

22. *Монахов*, *В.С*. Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами / В.С. Монахов // Сибирский математический журнал. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 447–462.

23. *Васильев*, *А.Ф*. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры: сб. науч. ст. – Киев: Ин-т матем. АН Украины, 1993. – С. 27–54.

24. *Коновалова*, *М.Н*. Конечные группы с некоторыми формационно субнормальными подгруппами / М.Н. Коновалова, И.Л. Сохор // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4 (41). – С. 51–54.

25. *Коновалова*, *М.Н*. Конечные группы с некоторыми субнормальными 2-максимальными подгруппами / М.Н. Коновалова, В.С. Монахов // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 2 (43). – С. 75–79.

Поступила в редакцию 28.06.2021.

Информация об авторах

Коновалова Марина Николаевна – аспирантка
Монахов Виктор Степанович – д.ф.-м. н., профессор
Сохор Ирина Леонидовна – к.ф.-м.н., доцент