М. Н. Коновалова, И. Л. Сохор, Конечные группы с некоторыми формационно субнормальными подгруппами, *ПФМТ*, 2019, выпуск 4, 51–54

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С НЕКОТОРЫМИ ФОРМАЦИОННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

М.Н. Коновалова[1], **И.Л. Сохор**[2]

[1]*Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ*
[2]*Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина*

FINITE GROUPS WITH FORMATIONAL SUBNORMAL SUBGROUPS

M.N. Konovalova[1], **I.L. Sokhor**[2]

[1]*Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration*
[2]*A.S. Pushkin Brest State University*

Описано строение группы, содержащей максимальную подгруппу M такую, что все максимальные в M подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны в группе, для случая, когда $\mathfrak{F}$ – формация всех нильпотентных подгрупп или наследственная решеточная насыщенная формация.

Ключевые слова: *конечные группы*, *субнормальные подгруппы*, $\mathfrak{F}$ *-субнормальные подгруппы*, *нильпотентные группы*, *решеточная формация.*

The structure of a group G containing a maximal subgroup M such that all maximal subgroups of M are $\mathfrak{F}$-subnormal in G in case $\mathfrak{F}$ is the formation of all nilpotent groups or a subgroup-closed saturated lattice formation is described.

Keywords: *finite groups*, *subnormal subgroups*, $\mathfrak{F}$ *-subnormal subgroups*, *nilpotent groups*, *lattice formation.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология и обозначения стандартны и соответствует [1], [2].

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, G – группа, H – подгруппа группы G. Подгруппа H называется $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой группы G, если либо $H = G$, либо существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \lessdot H_1 \lessdot \ldots \lessdot H_n = G \qquad (0.1)$$

такая, что $H_i / (H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$ для всех i.

Это равносильно тому, что $H_i^{\mathfrak{F}} \le (H_{i-1})_{H_i}$.

Здесь $Y_X = \bigcap_{x \in X} Y^x$ – ядро подгруппы Y в группе X, а запись $H_{i-1} \lessdot H_i$ означает, что H_{i-1} – максимальная подгруппа группы H_i. Для формации $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$-субнормальность подгруппы разрешимой группы равносильна [1, с. 93] субнормальности. Для формации $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп $\mathfrak{U}$-субнормальность подгруппы H в разрешимой группе G равносильна [3, лемма 1.12] существованию цепочки подгрупп (0.1) такой, что $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$, $\forall i$, где $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел.

Для наследственной формации $\mathfrak{F}$ известно [4, лемма 7], что если в группе G каждая максимальная подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна, то $G / \Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Если же в группе G каждая 2-максимальная подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна, то все собственные подгруппы в G имеют нильпотентные $\mathfrak{F}$-корадикалы [4, теорема 1]. Группы, у которых все 2-максимальные подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны, исследованы в [5], [6].

Строение группы, в которой все 2-максимальные подгруппы субнормальны, получено в [7]. В [8, теорема 2.3] установлено, что в группе G, содержащей ненормальную максимальную подгруппу M такую, что все максимальные в M подгруппы субнормальны в G, все собственные подгруппы нильпотентны.

В этой статье мы продолжаем исследования в данном направлении. В группе G фиксируется максимальная подгруппа M и предполагается, что все максимальные в M подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны в G. При $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ доказывается, что либо M нормальна в G, либо в группе G все собственные подгруппы абелевы, тем самым уточняется отмеченный выше результат [8, теорема 2.3]. В случае, когда $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная решеточная формация, доказано, что либо M $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, либо G – ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой абелевы.

1 Вспомогательные результаты

Запись $A \le B$ означает, что A – подгруппа группы B; если A – собственная подгруппа группы B, то будем писать $A < B$. Подгруппа Фраттини группы G обозначается через $\Phi(G)$;

наибольшая нормальная p-подгруппа группы G обозначается через $O_p(G)$. Запись $A \rtimes B$ означает полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B.

Пусть H – подгруппа группы G. Если существует максимальная в G подгруппа M такая, что $H \leq M$ и H является максимальной подгруппой в M, то H называется 2-максимальной подгруппой группы G.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп, G – группа. Группа G называется минимальной не $\mathfrak{F}$ группой, если $G \notin \mathfrak{F}$, а каждая собственная подгруппа в G принадлежит $\mathfrak{F}$. Минимальная ненильпотентная группа также называется группой Шмидта, а минимальная неабелева группа – группой Миллера – Морено. Свойства этих групп хорошо известны [1], [10], [11].

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, G – группа. Пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G.

Формация $\mathfrak{F}$ называется решеточной, если в любой группе множество всех ее $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп. Решеточные формации описаны в работе [12]. В частности, доказано [12, лемма 4], что решеточные формации сверхрадикальны. Нормально наследственная формация $\mathfrak{F}$ называется сверхрадикальной, если любая группа $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

***Лемма* 1.1** [13, Лемма 3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная сверхрадикальная формация. Тогда разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа G является группой одного из следующих типов*:

(1) *G – группа порядка p, где простое* $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;

(2) *G – группа Шмидта*.

Нам потребуются следующие свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп.

***Лемма* 1.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, H и K – подгруппы группы G, $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *если K $\mathfrak{F}$-субнормальна в H, а H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G* [9, 6.1.6 (1)];

(2) *если K/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N, то K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G* [9, 6.1.6 (2)];

(3) *если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то HN/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N* [9, 6.1.6 (3)];

(4) *если $\mathfrak{F}$ – наследственная формация и $G^{\mathfrak{F}} \leq K$, то K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G* [9, 6.1.7 (1)];

(5) *если $\mathfrak{F}$ – наследственная формация и H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G*, то *$H \cap K$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в K* [9, 6.1.7 (2)].

2 Случай формации всех нильпотентных групп

***Теорема* 2.1.** *Пусть в группе G существует ненормальная максимальная подгруппа M. Каждая максимальная в M подгруппа субнормальна в G тогда и только тогда, когда G – ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы абелевы.*

Доказательство. Необходимость. В нильпотентной группе все максимальные подгруппы нормальны [2, 3.13]. По условию в G существует ненормальная максимальная подгруппа M, поэтому G ненильпотентна.

Предположим, что в M существуют различные максимальные подгруппы M_1 и M_2, по условию они субнормальны в G. Согласно [2, 2.41] подгруппы M_1 и M_2 субнормальны в M, поэтому они нормальны в M и $M = M_1M_2$. Так как произведение субнормальных подгрупп является субнормальной подгруппой [2, 2.43], то M – нормальная подгруппа группы G, что противоречит условию теоремы. Поэтому предположение неверно, и в M только одна максимальная подгруппа, обозначим ее через H. Если $x \in M \setminus H$, то подгруппа $\langle x \rangle$ не содержится в H, поэтому $\langle x \rangle = M$ и группа G разрешима [14, IV.7.4]. Если существуют $p, q \in \pi(M)$, $p \neq q$, то $\langle x^p \rangle$ и $\langle x^q \rangle$ – подгруппы в M индексов p и q соответственно, что противоречит единственности максимальной подгруппы H в M. Значит, $\pi(M) = \{p\}$ и M – силовская p-подгруппа группы G.

Поскольку $M = N_G(M)$, то согласно [14, IV.2.6] существует нормальная в G подгруппа Q такая, что $G = Q \rtimes M$. Так как группа G разрешима и M – максимальная в G подгруппа, то Q – силовская q-подгруппа группы G, Q – минимальная нормальная в G подгруппа. По условию подгруппа $\langle x^p \rangle$ субнормальна в G. Согласно [2, 5.31]

$$\langle x^p \rangle \leq O_p(G) \leq M, \; \langle x^p \rangle = O_p(G).$$

Поэтому $Q\langle x^p \rangle = Q \times O_p(G)$. Пусть K – максимальная в G подгруппа, не сопряженная с M. Тогда $Q \leq K$ и $K = Q \times O_p(G)$ абелева. Поэтому G – ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы абелевы.

Достаточность. Пусть G – ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы абелевы. Тогда она является группой Шмидта и ее силовские подгруппы абелевы. Согласно [7, лемма 5] в G все 2-максимальные подгруппы субнормальны. □

***Замечание* 2.1.** Строение ненильпотентной группы, у которой все собственные подгруппы абелевы, хорошо известно [1], [10], [11], она является ненильпотентной группой Миллера – Морено. В частности, такая группа бипримарна, т. е. ее порядок делится в точности на два различных простых числа, одна из силовских подгрупп является минимальной нормальной подгруппой группы, другая – циклическая.

***Следствие* 2.1.1** [7, лемма 5]. В том и только в том случае каждая 2-максимальная подгруппа группы G является субнормальной, когда либо G нильпотентна, либо G – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.

***Следствие* 2.1.2** [8, теорема 2.3]. Если в группе G существует ненормальная максимальная подгруппа, у которой все максимальные подгруппы субнормальны в G, то G – группа Шмидта.

3 Случай решеточной формации

***Лемма* 3.1** [4, лемма 7]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация. Если в группе G все максимальные подгруппы $\mathfrak{F}$-нормальны, то фактор-группа $G/\Phi(G)\in\mathfrak{F}$ и $G\in\mathfrak{N}\mathfrak{F}$.*

***Теорема* 3.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная решеточная формация, содержащая все нильпотентные группы. Предположим, что в группе G существует максимальная подгруппа M, которая обладает следующими свойствами*:

(1) *M не $\mathfrak{F}$-субнормальна в G*;

(2) *каждая максимальная подгруппа из M $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Тогда G – ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой абелевы.

Доказательство. Если $G\in\mathfrak{F}$, то $G/M_G\in\mathfrak{F}$ и M $\mathfrak{F}$-нормальна в G, противоречие. Поэтому группа G не принадлежит $\mathfrak{F}$.

Поскольку каждая максимальная подгруппа из M $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то в силу леммы (1.2) (5) каждая максимальная подгруппа из M $\mathfrak{F}$-субнормальна в M. Поэтому $M\in\mathfrak{F}$ по лемме 3.1.

Предположим, что в M существуют различные максимальные подгруппы M_1 и M_2. По условию M_1 и M_2 $\mathfrak{F}$-субнормальны в G. Так как формация $\mathfrak{F}$ решеточная, то $M=\langle M_1,M_2\rangle$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, противоречие. Поэтому предположение неверно, и в группе M существует единственная максимальная подгруппа. Следовательно, $M=\langle x\rangle$ – циклическая q-подгруппа группы G для некоторого $q\in\pi(G)$ и группа G разрешима [14, IV.7.4].

Предположим, что M нормальна в G. Поскольку для формации $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп субнормальность подгруппы разрешимой группы равносильна [1, с. 93] $\mathfrak{N}$-субнормальности и $\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{F}$, то подгруппа M $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, противоречие. Поэтому подгруппа M не нормальна в G. Значит, $M=N_G(M)$ и согласно [14, IV.2.6] существует нормальная в G подгруппа P такая, что $G=P\rtimes M$. Поскольку группа G разрешима и M – максимальная в G подгруппа, то P – силовская p-подгруппа группы G, P – минимальная нормальная в G подгруппа. Следовательно, G – бипримарная $\{p,q\}$-группа.

Так как $G\notin\mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}}\neq 1$. Пусть $\mathfrak{A}$ – формация всех абелевых групп. Поскольку

$$G/P\simeq\langle x\rangle\in\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{F},$$

то $G^{\mathfrak{F}}\le P$ и $G^{\mathfrak{F}}=P$. Поэтому $\Phi(G^{\mathfrak{F}})=1$.

Подгруппа $\langle x\rangle=M\simeq G/P\in\mathfrak{F}$. Пусть H – максимальная в G подгруппа, не сопряженная с M. Тогда $P\le H$ и $H=P\langle x^q\rangle$ нормальна в G. Пусть K – максимальная в H подгруппа. Если $P\le K$, то K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G по лемме 1.2 (4). Если $P\not\le K$, то без ущерба для доказательства можно считать, что $\langle x^q\rangle\le K$. Поэтому $K=P_1\langle x^q\rangle$ и подгруппа $P_1=P\cap K$ субнормальна в G. В силу [1, с. 93] подгруппа P_1 $\mathfrak{N}$-субнормальна в G, а поскольку $\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{F}$, то P_1 $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Подгруппа $\langle x^q\rangle$ также $\mathfrak{F}$-субнормальна в G по условию. Поскольку $\mathfrak{F}$ – решеточная формация, $K=P_1\langle x^q\rangle$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Но K – произвольная максимальная в H подгруппа, значит, все максимальные в H подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны в G. Из леммы 1.2 (4) получаем, что все максимальные в H подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны в H. По лемме 3.1 фактор-группа $H/\Phi(H)\in\mathfrak{F}$. По условию $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, значит, $H\in\mathfrak{F}$. Таким образом, все максимальные подгруппы в G принадлежат $\mathfrak{F}$. Поскольку решеточные формации сверхрадикальны [12, лемма 4], то в силу леммы 1.1 группа G является группой Шмидта. Так как P абелева, то в силу свойств групп Шмидта [11, теорема 1.1, теорема 1.2], каждая собственная подгруппа группы G абелева. □

***Следствие* 3.2.1.** Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная решеточная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если в группе G каждая 2-максимальная подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна, то либо $G\in\mathfrak{F}$, либо G – ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы абелевы.

Доказательство. Если в группе G все максимальные подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны, то $G\in\mathfrak{F}$ по лемме 3.1. Если $G\notin\mathfrak{F}$ и некоторая ее максимальная подгруппа M не $\mathfrak{F}$-субнормальна, то G – ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой абелевы, по теореме 3.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 271 с.

2. *Монахов, В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

3. *Монахов, В.С.* Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами / В.С. Монахов // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 447–462.

4. *Монахов*, В.С. О группах с формационно субнормальными 2-максимальными подгруппами / В.С. Монахов // Матем. заметки. – 2019. – Т. 105. – С. 269–277.

5. *Monakhov, V.S.* Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche Mat. – 2013. – Vol. 62. – P. 307–322.

6. *Kovaleva, V.A.* Finite soluble groups with all *n*-maximal subgroups $\mathfrak{F}$-subnormal / V.A. Kovaleva, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2014. – Vol. 17, № 2. – P. 273–290.

7. *Луценко, Ю.В.* Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91. – С. 730–740.

8. *Семенчук, В.Н.* О конечных группах с обобщенно субнормальными подгруппами / В.Н. Семенчук, М.В. Селькин, В.М. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 66–68.

9. *Ballester-Bolinches, A.* Classes of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006. – 381 p.

10. *Miller, G.A.* Non-abelian groups in which every subgroups is abelian / G.A. Miller, H.C. Moreno // Trans. Amer. Math. Soc. – 1903. – Vol. 4, № 4. – P. 398–404.

11. *Монахов, В.С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Укр. матем. конгресс: сб. тр. – Киев: Ин-т матем. НАН Украины, 2002. – С. 81–90.

12. *Васильев, А.Ф.* О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры: сб. науч. ст. – Киев: Ин-т матем. АН Украины, 1993. – С. 27–54.

13. *Семенчук, В.Н.* Разрешимые $\mathfrak{F}$-радикальные формации / В.Н. Семенчук // Мат. заметки. – 1996. – Т. 59, № 2. – С. 261–266.

14. *Huppert, B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1967. – 793 p.

Поступила в редакцию 05.07.19.