А. Ф. Васильев, А. Г. Мельченко, Конечные группы с абсолютно формационно субнормальными силовскими подгруппами, *ПФМТ*, 2019, выпуск 4, 44–50

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С АБСОЛЮТНО ФОРМАЦИОННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ

А.Ф. Васильев, А.Г. Мельченко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

FINITE GROUPS WITH ABSOLUTELY FORMATIONALLY SUBNORMAL SYLOW SUBGROUPS

A.F. Vasil'ev, A.G. Melchenko

F. Scorina Gomel State University

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация групп. Подгруппу H группы G назовем абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальной (абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальной) в G, если любая подгруппа, содержащая H, является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной (соответственно, $\mathfrak{F}$-субнормальной) подгруппой в G. В работе исследуется вопрос принадлежности конечной группы насыщенной формации $\mathfrak{F}$, у которой все силовские подгруппы абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальны.

Ключевые слова: *конечная группа*, *силовская подгруппа*, *наследственная насыщенная формация*, K-$\mathfrak{F}$ *-субнормальная подгруппа*, *абсолютно* K-$\mathfrak{F}$ *-субнормальная подгруппа*.

Let $\mathfrak{F}$ be a nonempty formation groups. A subgroup H of a group G we call absolutely K-$\mathfrak{F}$-subnormal (absolutely $\mathfrak{F}$-subnormal) in G if any subgroup containing H is K-$\mathfrak{F}$-subnormal (respectively $\mathfrak{F}$-subnormal) subgroup of G. In this paper, the question of whether a finite group belongs to a saturated formation $\mathfrak{F}$ in which all Sylow subgroups are absolutely K-$\mathfrak{F}$-subnormal is investigated.

Keywords: *finite group*, *Sylow subgroup*, *hereditary saturated formation*, K-$\mathfrak{F}$ *-subnormal subgroup*, *absolutely* K-$\mathfrak{F}$ *-subnormal subgroup*.

Введение

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. В нильпотентной группе каждая подгруппа является субнормальной и этим свойством подгрупп определяется каждая нильпотентная группа. С другой стороны для проверки группы на нильпотентность необязательно устанавливать, что ее все подгруппы являются субнормальными в ней. Например, хорошо известно, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда каждая ее силовская подгруппа является субнормальной в ней.

Класс всех нильпотентных групп является примером наследственной насыщенной формации, т. е. класса групп, замкнутого относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов, подпрямых произведений и фраттиниевых расширений. Пустой класс групп по определению является формацией. В дальнейшем все рассматриваемые нами формации считаются непустыми.

Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольная наследственная насыщенная формация. Естественным обобщением субнормальности в классе разрешимых групп является понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной, в классе всех групп – K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы [1], [2].

Хорошо известен следующий результат. Группа принадлежит наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая ее подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна в ней.

С другой стороны, имеются примеры наследственных насыщенных формаций $\mathfrak{F}$ (например, формация всех сверхразрешимых групп) и групп, им не принадлежащих, у которых любая силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна. Поэтому естественной является следующая

Проблема. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация. Найти условия, которым должны удовлетворять силовские подгруппы группы G, чтобы группа G принадлежала $\mathfrak{F}$.*

Исследования по данной проблеме были начаты в работе [3] для случая наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ и групп, у которых силовские подгруппы являются $\mathfrak{F}$-субнормальными. В дальнейшем это направление получило развитие в работах различных авторов. Например, в [4]–[7] для насыщенной формации $\mathfrak{F}$ были изучены свойства класса групп, в которых силовские подгруппы являются $\mathfrak{F}$-субнормальными (K-$\mathfrak{F}$-субнормальными), в работах [8]–[14] были найдены приложения полученных классов для решения различных конкретных задач теории групп и их формаций. В настоящей работе продолжаются исследования в отмеченном выше направлении.

1 Предварительные сведения

В работе используются стандартные обозначения и определения. Необходимые сведения из теории групп и теории формаций можно найти в монографиях [1], [2] и [15].

Через $\mathbb{P}$ обозначается множество всех простых чисел, π – подмножество из $\mathbb{P}$, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Пусть G – группа, $p \in \mathbb{P}$. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка G, $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа G, $O_\pi(G)$ – наибольшая нормальная π-подгруппа G, $\mathrm{Syl}_p(G)$ – множество всех силовских p-подгрупп G, $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G, Z_p – циклическая группа порядка p, 1 – единичная подгруппа.

В следующей лемме собраны известные свойства силовских подгрупп.

***Лемма* 1.1** [15, гл. A, теорема 6.4]. *Пусть G – группа и $p \in \mathbb{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *Пусть $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $N \trianglelefteq G$. Тогда*
$$P \cap N \in \mathrm{Syl}_p(N) \text{ и } PN/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N).$$

(2) *если $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$ и $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, то*
$$N_1P \cap N_2P = (N_1 \cap N_2)P.$$

(3) *пусть $\{p_1, \ldots, p_r\}$ – множество всех простых делителей $|G|$ и $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ для $i = 1, \ldots, r$. Тогда $G = \langle P_1, \ldots, P_r \rangle$.*

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Через $\pi(\mathfrak{X})$ обозначается множество всех простых делителей порядков групп, принадлежащих $\mathfrak{X}$; $\mathfrak{X}_\pi$ – класс всех π-групп, принадлежащих $\mathfrak{X}$; $\mathfrak{X}_p = \mathfrak{X}_\pi$ для $\pi = \{p\}$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если

1) $\mathfrak{F}$ – гомоморф, т. е. из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$ всегда следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$;

2) из $N_i \trianglelefteq G$ и $G/N_i \in \mathfrak{F}$ $(i = 1, 2)$ всегда следует, что $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *наследственной*, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит все ее подгруппы. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-*корадикал* группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа из G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Приведем понятия $\mathfrak{F}$-субнормальной и K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы [1].

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппа H группы G называется:

1) $\mathfrak{F}$-*субнормальной* в G, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп
$$H = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$$
такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \le H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$;

2) K-$\mathfrak{F}$-*субнормальной* в G, если существует цепь подгрупп
$$H = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_n = G$$
такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $H_i^{\mathfrak{F}} \le H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$.

Нам потребуются известные свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, которые можно найти, например, в монографии [1].

***Лемма* 1.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, H и K – подгруппы группы G и $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *Если H $\mathfrak{F}$-субнормальна* (K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна*) *в G, то HN/N $\mathfrak{F}$-субнормальна* (*соответственно*, K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна*) *в G/N.*

(2) *Если $N \le H$ и H/N $\mathfrak{F}$-субнормальна* (K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна*) *в G/N, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна* (*соответственно*, K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна*) *в G.*

(3) *Если H $\mathfrak{F}$-субнормальна* (K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна*) *в G, то HN $\mathfrak{F}$-субнормальна* (*соответственно*, K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна*) *в G.*

(4) *Если H $\mathfrak{F}$-субнормальна* (K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна*) *в K и K $\mathfrak{F}$-субнормальна* (K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна*) *в G, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна* (*соответственно*, K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна*) *в G.*

(5) *Если все композиционные факторы G принадлежат $\mathfrak{F}$, то всякая субнормальная подгруппа G является $\mathfrak{F}$-субнормальной.*

(6) *Пусть p – простое число и G – p-группа. Если $Z_p \in \mathfrak{F}$, то в G все подгруппы являются $\mathfrak{F}$-субнормальными.*

***Лемма* 1.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, $H \le G$ и $M \le G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *Если H $\mathfrak{F}$-субнормальна* (K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна*) *в G, то $H \cap M$ $\mathfrak{F}$-субнормальна* (*соответственно*, K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна*) *в M.*

(2) *Если H $\mathfrak{F}$-субнормальна* (K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна*) *в G и M $\mathfrak{F}$-субнормальна* (K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна*) *в G, то $H \cap M$ $\mathfrak{F}$-субнормальна* (*соответственно*, K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна*) *в G.*

(3) *Если $G^{\mathfrak{F}} \le H$, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна* (K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна*) *в G.*

(4) *Если H $\mathfrak{F}$-субнормальна* (K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна*) *в G, то H^x $\mathfrak{F}$-субнормальна* (*соответственно*, K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна*) *в G для любого $x \in G$.*

2 Абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальные и $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы

Для обоснования вводимых нами далее понятий абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальной и абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальной подгрупп рассмотрим следующий пример. Пусть $\mathfrak{F}=\mathfrak{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп. Отметим, что для этой формации понятия K-$\mathfrak{U}$-субнормальной и $\mathfrak{U}$-субнормальной подгрупп эквивалентны. Рассмотрим $G=S_4$ – симметрическую группу степени 4. Заметим, что $G^{\mathfrak{U}}$ совпадает с четверной подгруппой Клейна V, состоящей из перестановок $(\,), (12)(34), (13)(24), (14)(23)$. Нетрудно проверить, что подгруппа $H=<(1,2)>$ является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в *G*, так как *H* K-$\mathfrak{U}$-субнормальна в силовской 2-подгруппе $P=VH$, а подгруппа *P* K-$\mathfrak{U}$-субнормальна в *G*. Отметим, что *H* содержится в максимальной подгруппе *M* группы *G*, изоморфной симметрической группе S_3 и не являющейся K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в *G*. С другой стороны, ввиду (3) леммы 1.3 следует, что $V=G^{\mathfrak{U}}$ также K-$\mathfrak{U}$-субнормальна в *G* и таким свойством обладает любая подгруппа ее содержащая. Рассмотрим еще одну подгруппу *G*. Пусть $R=<(1,2,3,4)>$ – циклическая подгруппа порядка 4 группы *G*. Несложно проверить, что *R* и любая подгруппа, содержащая *R* являются K-$\mathfrak{U}$-субнормальными в *G*.

***Определение* 2.1**. $\mathfrak{F}$ – формация. Подгруппу *H* группы *G* назовем абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальной (абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальной) в *G*, если любая содержащая ее подгруппа *R* является *K*-$\mathfrak{F}$-субнормальной (соответственно, $\mathfrak{F}$-субнормальной) в *G*.

Нетрудно видеть, что всякая абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа является абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальной, обратное утверждение неверно.

Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация и группа $G\notin\mathfrak{F}$. Тогда подгруппы *G*, содержащие $\mathfrak{F}$-корадикал, являются абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальными (K-$\mathfrak{F}$-субнормальными) в *G*, однако, как было показано в примере выше, они не исчерпывают все примеры подгрупп с таким свойством.

Нам потребуются следующие свойства абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальных и $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп.

***Лемма* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация. Тогда справедливы следуюие утверждения.*

(1) *Если H – подгруппа G и $G^{\mathfrak{F}}\subseteq H$, то H является абсолютно* K-$\mathfrak{F}$-*субнормальной подгруппой группы G*.

(2) *Если H абсолютно* K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна* (*абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна*) *в G и $K\lhd G$, то HK/K абсолютно* K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна* (*абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна*) *в G/K*.

(3) *Если $K\lhd G$ и H/K абсолютно* K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна* (*абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна*) *в G/K, то H абсолютно* K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна* (*абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна*) *в G*.

(4) *Если H абсолютно* K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна* (*абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна*) *в G, то H абсолютно* K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна* (*абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна*) *в любой содержащей ее подгруппе*.

(5) *Если подгруппы H и K абсолютно* K-$\mathfrak{F}$-*субнормальны* (*абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальны*) *в G, то подгруппа $<H,K>$ также абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальна* (*абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна*) *в G*.

(6) *Если подгруппа H абсолютно* K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна* (*абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна*) *в G, то ее всякая промежуточная подгруппа также абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальна* (*абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна*) *в G*.

Доказательство. Установим справедливость (1). Если $G^{\mathfrak{F}}\subseteq H\le G$, то

$$H/G^{\mathfrak{F}}\le G/G^{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{F}.$$

Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то любая подгруппа из $G/G^{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной в $G/G^{\mathfrak{F}}$. Отсюда следует, что $H/G^{\mathfrak{F}}$ абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна в $G/G^{\mathfrak{F}}$, а значит, и абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в $G/G^{\mathfrak{F}}$. Теперь нетрудно заметить, что *H* абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в *G*. Утверждение 1) доказано.

Докажем (2). Пусть *H* абсолютно *K*-$\mathfrak{F}$-субнормальна в *G* и $HK/K\le G/K$. Рассмотрим $HK/K\le R/K\le G/K$. Тогда $HK\le R\le G$, а значит, *R* – K-$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в *G*. По (1) леммы 1.2 R/K является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G/K. Следовательно, HK/K абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в G/R. Утверждение (2) доказано.

Установим справедливость (3). Пусть $R\le G$ такая, что $H\le R\le G$.

Из $HK/K\le R/K\le G/K$ в силу абсолютной K-$\mathfrak{F}$-субнормальности подгруппы H/K в G/K следует, что R/K K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в G/K. Теперь из (2) леммы 1.2 вытекает, что *R* – K-$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в *G*. Следовательно, *H* абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в *G*.

Свойства (4), (5), (6) доказываются аналогично. □

3 Основные результаты

В данном разделе для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ исследуются группы, у которых силовские подгруппы являются абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальными. В начале рассмотрим частный случай, когда $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ для рассматриваемой группы G и насыщенной наследственной формации $\mathfrak{F}$.

***Теорема* 3.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и каждая силовская подгруппа группы G является абсолютно* K-$\mathfrak{F}$*-субнормальной подгруппой в G.*

Доказательство. Пусть группа $G \in \mathfrak{F}$. Тогда из наследственности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и любая подгруппа группы G является абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G. Отсюда легко видеть, что любая силовская подгруппа абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

Обратно. Пусть в группе G любая силовская подгруппа является абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальной G и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, но сама группа G не принадлежит $\mathfrak{F}$. Выберем среди них группу G наименьшего порядка.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Предположим, что $N = G$. Тогда ввиду выбора N и G, группа G является простой и $G^{\mathfrak{F}} = G$. Если N – абелева группа, то G – группа простого порядка. Из $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и наследственности формации $\mathfrak{F}$ следует, что G принадлежит $\mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Будем считать, что $N = G$ – неабелева простая группа. Пусть P – силовская подгруппа G и M – максимальная подгруппа G, такая, что $P \subseteq M$. Тогда M является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G. Так как $G^{\mathfrak{F}} = G$, то возможен только случай $M \lhd G$. Противоречие с тем, что G – простая неабелева группа. Значит, этот случай невозможен.

Пусть $N \neq G$ тогда по (2) леммы 2.1 следует, что любая силовская подгруппа фактор-группы G/N также является абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G/N. Так как $|G/N| < |G|$, то ввиду выбора группы G получаем, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Если в G имеется еще одна минимальная нормальная подгруппа $K \neq N$, то из $G/K \in \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G/K \cap N \simeq G \in \mathfrak{F}$. Противоречие с выбором группы G. Следовательно, в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N. Если $\Phi(G) \neq 1$, то из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ и насыщенности $\mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором G. Следовательно, $\Phi(G) = 1$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть N – абелева группа. Тогда $|N| = p^{\alpha}$, где p – некоторое простое число. В этом случае $G = [N]M$, где $N = C_G(N) = G^{\mathfrak{F}}$ и M – некоторая максимальная подгруппа группы G. Если M – p-группа, то G – p-группа и из $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и насыщенности $\mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, найдется простое число $q \neq p$ такое, что $q \in \pi(M)$. Пусть M_q – силовская q-подгруппа из M. Тогда M_q является силовской q-подгруппой в G. Так как M_q абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в G и $M_q \subseteq M$, то M является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G. Если $M \lhd G$, то $M \subseteq C_G(N) = N$, что невозможно. Поэтому будем считать, что M является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G. Так как $M \in \mathfrak{F}$ и $N = G^{\mathfrak{F}}$, то по теореме 15.10 из [2] следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

2. Пусть N – неабелева группа. Тогда $N = A_1 \times \cdots \times A_n$ – прямое произведение попарно изоморфных простых неабелевых групп A_i. Пусть P – силовская p-подгруппа группы G, где p – некоторое простое число, делящее порядок N. Тогда $S = P \cap N$ – силовская p-подгруппа N. По лемме Фраттини $N_G(S)N = G$. Заметим, что $P \subseteq N_G(S)$. Пусть $N_G(S) \neq G$. Так как P является силовской p-подгруппой группы G, то P абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Следовательно, по (6) леммы 2.1 $N_G(S)$ – абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в G. Так как $N_G(S)$ – абнормальная подгруппа в G, то $N_G(S)$ является абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G. Заметим, что $N = G^{\mathfrak{F}}$ и $N_G(S)N = G$. Получили противоречие.

Предположим, что $N_G(S) = G$. Тогда $S \lhd G$. Получили противоречие с тем, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа и N – неабелева группа. □

***Следствие* 3.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда каждая силовская подгруппа группы G является абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G.*

Для формулировки следующего результата нам потребуется известная конструкция прямого произведения формаций [1], которая описывается в следующей лемме.

***Лемма* 3.3.** *Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – формации, $\pi(\mathfrak{F}_1) = \pi_1$, $\pi(\mathfrak{F}_2) = \pi_2$ и $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$. Тогда*

$$\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{G} \mid G = O_{\pi_1}(G) \times O_{\pi_2}(G),$$

где $O_{\pi_1}(G)\in\mathfrak{F}_1$ *и* $O_{\pi_2}(G)\in\mathfrak{F}_2$) *– формация. Более того, если* $\mathfrak{F}_1$ *и* $\mathfrak{F}_2$ *– наследственные насыщенные формации, то* $\mathfrak{F}_1\times\mathfrak{F}_2$ *– также наследственная насыщенная формация.*

***Теорема* 3.4.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная насыщенная формация и* $\pi=\pi(\mathfrak{F})$. *Тогда и только тогда группа G принадлежит формации* $\mathfrak{N}_{\pi'}\times\mathfrak{F}_{\pi}$, *когда каждая силовская подгруппа G является абсолютно* K-$\mathfrak{F}$*-субнормальной в G.*

Доказательство. Пусть группа G принадлежит формации $\mathfrak{N}_{\pi'}\times\mathfrak{F}$. Тогда $G=A\times B$, где $A\in\mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})}$ и $B\in\mathfrak{F}$. Так как формации $\mathfrak{N}_{\pi'}$ и $\mathfrak{F}$ являются наследственными насыщенными, то по лемме 3.3 $\mathfrak{N}_{\pi'}\times\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация.

Рассмотрим произвольную силовскую p-подгруппу $P\subseteq G$. Пусть $P\le A$. Тогда из нильпотентности A следует, что $P\trianglelefteq A$. Так как $A\trianglelefteq G$ и P характеристична в A, то $P\trianglelefteq G$, а значит, подгруппа P K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

Пусть теперь $P\le B$. Из $B\in\mathfrak{F}$ и наследственности формации $\mathfrak{F}$ следует, что P $\mathfrak{F}$-субнормальна в B. Отсюда и из $B\trianglelefteq G$, заключаем, что K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

Таким образом, произвольная силовская подгруппа P группы G является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в ней.

Покажем, что P является абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G. Предположим, что утверждение неверно и группа G – контрпример наименьшего порядка. Тогда в G найдется промежуточная подгруппа M для подгруппы P, которая не является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G. Ввиду выбора G, не теряя общности рассуждений, можно считать, что M – максимальная подгруппа в G. Из $G=A\times B$, где $A\in\mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})}$ и $B\in\mathfrak{F}$ следует, что возможны два случая.

1. Пусть $A\subseteq M$. Тогда из $G/A\in\mathfrak{F}$ и из наследственности формации $\mathfrak{F}$ следует, что M/A является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G/A. Следовательно, M $\mathfrak{F}$-субнормальна и тем более K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Получили противоречие. Значит, случай 1 невозможен.

2. Предположим, что $B\subseteq M$. Тогда из $G/B\in\mathfrak{N}_{\pi'}$ следует, что M/B является нормальной подгруппой в G/B. Откуда следует, что M нормальна в G, а значит K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в ней. Снова получили противоречие. Таким образом, каждая силовская подгруппа из G является абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G.

Докажем обратное утверждение. Пусть каждая силовская подгруппа из G является абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G. Покажем, что G принадлежит формации $\mathfrak{N}_{\pi'}\times\mathfrak{F}_{\pi}$.

Рассмотрим произвольную силовскую p-подгруппу P группы G, где $p\in\pi'$. Тогда по лемме 2.3 из [11] подгруппа $P=O_p(P)\le O_p(G)$. Поэтому $P=O_p(G)\trianglelefteq G$. Если

$$\pi'\cap\pi(G)=\{p_1,\dots,p_n\}$$

и $P_i\in\mathrm{Syl}_{p_i}(G)$, $i=1,\dots,n$, то произведение $A=P_1P_2\dots P_n$ является нормальной нильпотентной подгруппой группы G. Ясно, что $|A|$ и $|G:A|$ взаимно просты, поэтому A – холлова подгруппа группы G и $A\in\mathfrak{N}_{\pi'}$.

По теореме Шура – Цассенхауза подгруппа A имеет дополнение в G. Поэтому существует подгруппа B порядка $|G:A|$ такая, что $G=AB$ и $A\cap B=1$. Пусть S – силовская подгруппа из B. Рассмотрим подгруппу SA. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то S является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в SA.

По лемме 2.4 из [11] подгруппа $S\trianglelefteq SA$. Это означает, что $A\le N_G(S)$. Пусть $\{q_1,\dots,q_m\}$ – полное множество различных простых делителей $|B|$ и $S_i\in\mathrm{Syl}_{q_i}(B)$, $i=1,\dots,m$. Тогда

$$B=\langle S_1,\dots,S_m\rangle.$$

Из $A\le N_G(S_i)$ для $i=1,\dots,m$ заключаем, что $A\le N_G(B)$. Отсюда

$$G=AB\le N_G(B).$$

Поэтому $B\trianglelefteq G$. Так как $\mathfrak{N}_{\pi'}\times\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то любая силовская подгруппа из B является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в ней. Отсюда и условия $\pi(B)\subseteq\pi(\mathfrak{F})$ по теореме 3.1 следует $B\in\mathfrak{F}$. Итак, доказано, что G принадлежит формации $\mathfrak{N}_{\pi'}\times\mathfrak{F}$. □

***Следствие* 3.4.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если каждая циклическая примарная подгруппа группы G является абсолютно* K-$\mathfrak{F}$*-субнормальной в G, то G принадлежит* $\mathfrak{F}$.

***Следствие* 3.4.2.** *Пусть* $\mathfrak{U}$ *– формация всех сверхразрешимых групп. Если каждая силовская подгруппа группы G является абсолютно* K-$\mathfrak{U}$*-субнормальной в G, то G сверхразрешима.*

***Следствие* 3.4.3.** *Пусть* $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ *– формация всех групп с нильпотентным коммутантом. Если каждая силовская подгруппа группы G является абсолютно* K-$\mathfrak{N}\mathfrak{A}$*-субнормальной в G, то G имеет нильпотентный коммутант.*

***Следствие* 3.4.4.** *Пусть* $\mathfrak{N}^2$ *– формация всех метанильпотентных групп. Если каждая силовская подгруппа группы G является абсолютно* K-$\mathfrak{N}^2$*-субнормальной в G, то G метанильпотентна.*

4 Заключительные замечания. Открытые проблемы

Отметим некоторые дальнейшие направления исследования групп с заданными системами абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальных (абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальных) подгрупп.

Наряду с силовскими подгруппами на строение конечной группы также существенно влияют свойства вложения нормализаторов силовских подгрупп (кратко, силовских нормализаторов) в группу. Отметим следующие мотивирующие результаты. Согласно известной теореме Глаубермана [16], если все силовские подгруппы группы самонормализуемы, то группа является p-группой для некоторого простого числа p.

Пусть H – подгруппа группы G. Рассмотрим цепь подгрупп

$$H = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_{n-1} \le H_n = G. \quad (4.1)$$

Согласно [17] подгруппа H называется $\mathbb{P}$*-субнормальной* в G, если либо $H = G$, либо существует цепь (4.1) такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1,\ldots,n$.

В работе [18] В.С. Монахов и В.Н. Княгина установили, что группа тогда и только тогда сверхразрешима, когда ее силовские нормализаторы $\mathbb{P}$-субнормальны в G. Заметим, если формация $\mathfrak{F}$ совпадает с классом $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп, то в любой разрешимой группе множества всех $\mathfrak{U}$-субнормальных, K-$\mathfrak{U}$-субнормальных и $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп совпадают. В произвольной группе всякая $\mathfrak{U}$-субнормальная (K-$\mathfrak{U}$-субнормальная) подгруппа является $\mathbb{P}$-субнормальной, (K-$\mathbb{P}$-субнормальной соответственно), обратное утверждение в общем случае неверно.

Отметим еще один результат в этом направлении. В [19]–[20] доказано, что если в группе G нормализатор любой силовской подгруппы субмодулярен, то G является сверхразрешимой группой, у которой все силовские подгруппы субмодулярны. При этом под субмодулярной подгруппой [21] понимается подгруппа H, для которой существует цепь (4.1) такая, что H_{i-1} – модулярная подгруппа в H_i для $i = 1,\ldots,n$. Здесь модулярная в G подгруппа – это модулярный элемент в решетке всех подгрупп группы G.

В связи с перечисленными выше результатами в работе [22] были начаты исследования групп, у которых нормализаторы силовских подгрупп являются $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами, где $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация.

Поэтому представляет интерес следующая

***Проблема* 4.1.** Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация. Описать строение групп, у которых силовские нормализаторы являются абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами.

Частичное решение данной проблемы дает следующая теорема.

***Теорема* 4.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая наследственная насыщенная формация и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда следующие утверждения попарно эквивалентны:*

(1) *Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$.*

(2) $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ *и каждый силовский нормализатор группы G является абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G.*

(3) $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ *и любая максимальная подгруппа, содержащая некоторый силовский нормализатор группы G является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G.*

***Проблема* 4.3**. Можно ли в теореме 4.2 отбросить требование разрешимости формации $\mathfrak{F}$?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ballester-Bolinches*, *A*. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer, 2006. – 385 p.

2. *Шеметков*, *Л.А*. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

3. *Васильев*, *А.Ф.* О влиянии примарных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп на строение группы / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.

4. *Васильева*, *Т.И.* Конечные группы с формационно субнормальными подгруппами / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 25–30.

5. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 86–91.

6. *Вегера*, *А.С.* О конечных группах с заданными K-$\mathfrak{F}$-субнормальными силовскими подгруппами / А.С. Вегера // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 53–57.

7. *Васильев*, *А.Ф.* Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.С. Вегера // Сиб. матем. журнал. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 259–275.

8. *Семенчук*, *В.Н.* Характеризация классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп / В.Н. Семенчук, С.Н. Шевчук // Мат. заметки. – 2011. – Т. 89, № 1. – С. 104–108.

9. *Монахов*, *В.С.* Конечные группы с формационно субнормальными примарными подгруппами / В.С. Монахов, И.Л. Сохор // Сиб. матем. журнал. – 2017. – Т. 58, № 4. – С. 851–863.

10. *Васильев*, *А.Ф.* О K-$\mathbb{P}$-субнормальных подгруппах конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Мат. заметки. – 2014. – Т. 95, № 4. – С. 517–528.

11. *Мурашко*, *В.И.* Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами / В.И. Мурашко // Сиб. мат. журнал. – 2014. – Т. 55, № 6. – С. 1353–1367.

12. *Murashka*, *V.I.* On analogues of Baer's theorems for widely supersoluble hypercenter of finite groups / V.I. Murashka // Asian-European J. Math. – 2018. – Vol. 11, № 3. – P. 1850043.

13. *Ballester-Bolinches*, *A*. Some Results on Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro, A.A. Heliel, M.M. Al-Shomrani // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2017. – Vol. 40, № 3. – P.1341–1357.

14. *Ballester-Bolinches*, *A*. On Products of Generalised Supersoluble Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, W.M. Fakieh, M.C. Pedraza-Aguilera // Mediterr. J. Math. – 2019. – Vol. 16, № 2. – P. 46.

15. *Doerk*, *K*. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 898 p.

16. *Glaubermann*, *G*. Prime-power factor groups of finite groups II / G. Glaubermann // Math. Z. – 1970. – № 117. – P. 46–56.

17. *Васильев*, *А.Ф*. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

18. *Kniahina*, V.N. On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V.N. Kniahina, V.S. Monakhov // Internat. J. of Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.

19. *Васильев*, *В.А*. О влиянии субмодулярных подгрупп на строение конечных групп / В.А. Васильев // Веснік Віцебск. дзярж. ун-та. – 2016. – № 2 (91). – С. 17–21.

20. *Васильев*, *В.А*. Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами / В.А. Васильев // Сиб. мат. журнал. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1277–1288.

21. *Zimmermann*, *I*. Submodular Subgroups in Finite Groups / I. Zimmermann // Math. Z. – 1989. – Vol. 202. – P. 545–557.

22. *Васильев*, *А.Ф*. Конечные группы с сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 66–71.

Поступила в редакцию 12.09.19.