А. Ф. Васильев, Конечные группы с сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальными силовскими подгруппами, *ПФМТ*, 2018, выпуск 4, 66–71

Проблемы физики, математики и техники, № 4 (37), 2018

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С СИЛЬНО K-$\mathfrak{F}$-СУБНОРМАЛЬНЫМИ СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ

А.Ф. Васильев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

FINITE GROUPS WITH STRONGLY K-$\mathfrak{F}$-SUBNORMAL SYLOW SUBGROUPS

A.F. Vasil'ev

F. Scorina Gomel State University

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация групп. Подгруппу *H* группы *G* назовем сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в *G*, если $N_G(H)$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в *G*. В работе исследуется вопрос принадлежности конечной группы, у которой все силовские подгруппы сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальны, насыщенной формации $\mathfrak{F}$.

Ключевые слова: *конечная группа*, *силовская подгруппа*, *формация*, K-$\mathfrak{F}$*-субнормальная подгруппа.*

Let $\mathfrak{F}$ be a nonempty formation of groups. We call a subgroup *H* of the group *G* strongly K-$\mathfrak{F}$-subnormal in *G*, if $N_G(H)$ is a $\mathfrak{F}$-subnormal subgroup in *G*. In this paper we study the question of belonging a finite group in which all Sylow subgroups of strongly K-$\mathfrak{F}$ subnormal, to saturated formation $\mathfrak{F}$.

Keywords: *finite group*, *Sylow subgroup*, *formation*, K-$\mathfrak{F}$*-subnormal subgroup.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Понятие силовской подгруппы занимает центральное место в теории конечных групп. Знание свойств строения и вложения силовских подгрупп позволяет во многих случаях получить описание самой группы. К настоящему времени значительное развитие получила теория классов групп, см., например, монографии [1]–[4]. В рамках этой теории возникает следующая естественная проблема.

Проблема. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация (класс Фиттинга, класс Шунка) групп. Найти условия, которым должны удовлетворять силовские подгруппы группы *G*, чтобы *G* принадлежала $\mathfrak{F}$.

Например, хорошо известно, что группа *G* тогда и только тогда нильпотентна, когда ее силовские подгруппы нормальны (субнормальны) в *G*.

Естественным обобщением субнормальности являются понятия $\mathfrak{F}$-субнормальной и K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы [4].

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппа *H* группы *G* называется: 1) $\mathfrak{F}$*-субнормальной* в *G*, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \le H_{i-1}$ для $i = 1,\ldots,n$; 2) K-$\mathfrak{F}$-*субнормальной* в *G*, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $H_i^{\mathfrak{F}} \le H_{i-1}$ для $i = 1,\ldots,n$.

В работе [5] для случая наследственной насыщенной формации были начаты исследования строения групп, у которых силовские подгруппы являются $\mathfrak{F}$-субнормальными. В дальнейшем это направление получило развитие в работах различных авторов. Например, в работах [6]–[8] для насыщенной формации $\mathfrak{F}$ были изучены свойства класса групп, у которых силовские подгруппы являются $\mathfrak{F}$-субнормальными (K-$\mathfrak{F}$-субнормальными), в работах [9]–[18] были найдены приложения полученных классов для конкретных формаций $\mathfrak{F}$.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация групп. Подгруппу H группы G назовем сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в *G*, если $N_G(H)$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G.

Так как подгруппа нормальна в своем нормализаторе, то всякая сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа будет K-$\mathfrak{F}$-субнормальной. Обратное утверждение неверно. Пусть S – симметрическая группа степени 3. Известно, что существует точный неприводимый S-модуль U над полем F_7 из 7 элементов. Рассмотрим полупрямое произведение $G = [U]S$. Так как подгруппа S неабелева, то группа G не является сверхразрешимой. Из сверхразрешимости G/U следует, что $H = UG_3$ является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппой группы *G*, где G_3 – силовская 3-подгруппа группы *G*, лежащая в *S*. Заметим, что *H* – сверхразрешимая подгруппа группы *G*.

Следовательно, G_3 K-$\mathfrak{U}$-субнормальна в G. С другой стороны, нормализатор G_3 в G равен подгруппе S, которая не является $\mathfrak{U}$-субнормальной в G. Следовательно, G_3 не является сильно K-$\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппой в G.

***Теорема* A.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная насыщенная формация, состоящая из дисперсивных групп. Тогда и только тогда группа G принадлежит* $\mathfrak{F}$, *когда* $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ *и каждая силовская подгруппа из* G *сильно* K-$\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G.

***Следствие* 1.** [16] *Пусть* $\mathfrak{U}$ *– формация всех сверхразрешимых групп. Если каждая силовская подгруппа группы G сильно* K-$\mathfrak{U}$*-субнормальна в G*, *то G сверхразрешима.*

***Теорема* B.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная формация, состоящая из метанильпотентных групп. Тогда и только тогда группа G принадлежит* $\mathfrak{F}$, *когда* $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ *и каждая силовская подгруппа из* G *сильно* K-$\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G.

***Следствие* 2.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация всех групп, имеющих нильпотентный коммутант. Если каждая силовская подгруппа группы* G *сильно* K-$\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G, *то* G *имеет нильпотентный коммутант.*

***Следствие* 3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация всех метанильпотентных групп. Если каждая силовская подгруппа группы* G *сильно* K-$\mathfrak{F}$*-субнормальна в G*, *то G метанильпотентна.*

1 Предварительные сведения

В работе используются стандартные обозначения и определения. Необходимые сведения из теории групп и теории формаций можно найти в монографиях [1], [2] и [4].

Через $\mathbb{P}$ обозначается множество всех простых чисел, π – подмножество из $\mathbb{P}$, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Пусть G – группа, $p \in \mathbb{P}$. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка G, $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа G, $O_\pi(G)$ – наибольшая нормальная π-подгруппа G, $\mathrm{Syl}_p(G)$ – множество всех силовских p-подгрупп G, $F(G)$ – подгруппа Фиттинга или нильпотентный радикал G, т. е. наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа G, Z_p – циклическая группа порядка p, 1 – единичная подгруппа.

В следующей лемме собраны известные свойства силовских подгрупп.

***Лемма* 1.1** [2, гл. A, теорема 6.4]. *Пусть G – группа и* $p \in \mathbb{P}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *пусть* $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ *и* $N \trianglelefteq G$. *Тогда* $P \cap N \in \mathrm{Syl}_p(N)$ *и* $PN/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$;

2) *если* $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1,2$ *и* $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, *то* $N_1P \cap N_2P = (N_1 \cap N_2)P$;

3) *пусть* $\{p_1, \ldots, p_r\}$ *– множество всех простых делителей* $|G|$ *и* $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ *для* $i = 1, \ldots, r$. *Тогда* $G = \langle P_1, \ldots, P_r \rangle$.

***Лемма* 1.2.** [1, лемма 3.9]. *Если* H/K *– главный фактор группы* G *и* $p \in \pi(H/K)$, *то* $G/C_G(H/K)$ *не содержит неединичных нормальных p-подгрупп, причем* $F_p(G) \le C_G(H/K)$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Через $\pi(\mathfrak{X})$ обозначается множество всех простых делителей порядков групп, принадлежащих $\mathfrak{X}$; $\mathfrak{X}_\pi$ – класс всех π-групп, принадлежащих $\mathfrak{X}$; $\mathfrak{X}_p = \mathfrak{X}_\pi$ для $\pi = \{p\}$.

Будем использовать следующие обозначения: $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп; $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп; $\mathfrak{N}^2$ – класс всех метанильпотентных групп.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если 1) $\mathfrak{F}$ – гомоморф, т. е. из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$ всегда следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$ и 2) из $N_i \trianglelefteq G$ и $G/N_i \in \mathfrak{F}$ $(i = 1,2)$ всегда следует, что $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *наследственной*, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит все ее подгруппы. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$*-корадикал* группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа из G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Нам потребуются известные свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. В дальнейшем в работе $\mathfrak{F}$ обозначает непустую формацию, H $\mathfrak{F}$-sn G означает, что в группе G подгруппа H является $\mathfrak{F}$-субнормальной.

***Лемма* 1.3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация*, H *и* K *– подгруппы группы* G *и* $N \trianglelefteq G$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* H $\mathfrak{F}$-sn G, *то* HN/N $\mathfrak{F}$-sn G/N;

2) *если* $N \le H$ *и* H/N $\mathfrak{F}$-sn G/N, *то* H $\mathfrak{F}$-sn G;

3) *если* H $\mathfrak{F}$-sn G, *то* HN $\mathfrak{F}$-sn G;

4) *если* H $\mathfrak{F}$-sn K *и* K $\mathfrak{F}$-sn G, *то* H $\mathfrak{F}$-sn G;

5) *если все композиционные факторы G принадлежат* $\mathfrak{F}$, *то всякая субнормальная подгруппа G является* $\mathfrak{F}$*-субнормальной;*

6) *пусть p – простое число и G – p-группа. Если* $Z_p \in \mathfrak{F}$, *то в* G *все подгруппы являются* $\mathfrak{F}$*-субнормальными.*

Аналогичные свойства справедливы для K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп.

***Лемма* 1.4.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная формация,* $H \le G$ *и* $M \le G$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* H $\mathfrak{F}$-sn G, *то* $H \cap M$ $\mathfrak{F}$-sn M;

2) *если* H $\mathfrak{F}$-sn G *и* M $\mathfrak{F}$-sn G, *то* $H \cap M$ $\mathfrak{F}$-sn G;

3) *если* $G^{\mathfrak{F}} \le H$, *то* H $\mathfrak{F}$-sn G;

4) *если* H $\mathfrak{F}$-sn G, *то* H^x $\mathfrak{F}$-sn G *для любого* $x \in G$.

2 Доказательство Теоремы А

Напомним, что группа называется дисперсивной, если найдётся линейный порядок φ на $\pi(G)$ такой, что если $\pi(G) = \{p_1, ..., p_n\}$, причем $p_i \le_{\varphi} p_j$ для $i < j$, то G имеет нормальные холловы $\{p_1, ..., p_i\}$-подгруппы для всех $i \le n$.

Доказательство. Необходимость. Пусть группа $G \in \mathfrak{F}$. По условию $\mathfrak{F}$ – наследственная формация. Тогда любая подгруппа из G является $\mathfrak{F}$-субнормальной в ней, в частности, $N_G(G_p)$ для любой $G_p \in Syl_p(G)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть группа G – контрпример минимального порядка и N – минимальная нормальная подгруппа G.

Если $G = N$, то G – простая группа в силу минимальности N. Если $G \simeq Z_p$, то из $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Предположим, что G – простая неабелева группа и $p \in \pi(G)$. Пусть $G_p \in Syl_p(G)$. Так как G – простая группа, то $N_G(G_p) \ne G$. Из $G \notin \mathfrak{F}$ следует, что $G^{\mathfrak{F}} = G$. По условию $N_G(\mathfrak{F})$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной в G. Тогда найдется максимальная в G подгруппа M такая, что $N_G(P) \subseteq M$ и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$. Получили противоречие.

Пусть $N \ne G$. Так как $N_{G/N}(G_pN/N) = N_G(G_p)N/N$ и $N_G(G_p)$ $\mathfrak{F}$-sn G, то $N_G(G_pN/N)$ $\mathfrak{F}$-sn G/N. Следовательно, для G/N все условия выполняются. Ввиду выбора G получаем, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Если K – минимальная нормальная подгруппа G и $K \ne N$, то $G/K \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – формация, то $G/N \bigcap K \simeq G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором G. Следовательно, G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N. Если $\Phi(G) \ne 1$, то из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ и насыщенности $\mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Снова получили противоречие с выбором G. Поэтому $\Phi(G) = 1$. В этом случае $N = G^{\mathfrak{F}}$ и существует максимальная подгруппа M в G такая, что $G = NM$. Рассмотрим следующие случаи.

1. N – неабелева группа. Пусть $p \in \pi(N)$ и $G_p \in Syl_p(G)$. Тогда $N_G(G_p) \ne G$. В противном случае $G_p \trianglelefteq G$ и $N \subseteq G_p$, так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Но тогда N – абелева группа. Противоречие с предположением.

Рассмотрим $N_G(G_p)N$. Если $N_G(G_p)N = G$, то из $\mathfrak{F}$-субнормальности $N_G(G_p)$ в G получаем, что найдется максимальная подгруппа W в G такая, что $N_G(G_p) \subseteq W$ и $N = G^{\mathfrak{F}} \subseteq W$. Откуда следует, что $G = N_G(G_p)N \subseteq W \ne G$. Противоречие.

Пусть теперь $N_G(G_p)N \ne G$. Заметим, что $G_p \cap N = N_p \in Syl_p(N)$ и $N_p = G_p \cap N \trianglelefteq N_G(G_p) \cap N$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация и $N_G(G_p)$ $\mathfrak{F}$-sn G, то $N_G(G_p) \cap N$ $\mathfrak{F}$-sn N. Из $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $N_p \trianglelefteq N_G(G_p) \cap N$ следует, что N_p $\mathfrak{F}$-sn $(N_G(G_p) \cap N)$ $\mathfrak{F}$-sn N. Откуда по 4) леммы 1.3 получаем, что N_p $\mathfrak{F}$-sn N для любого $p \in \pi(N)$. Так как $\mathfrak{F}$ состоит из разрешимых групп, то N разрешима. Получаем противоречие с нашим предположением.

2. N – абелева p-группа, p – некоторое простое число. Из $G/N \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ и $N \in \mathfrak{S}$ следует, что G разрешима. Из единственности N и $\Phi(G) = 1$ следует, что $G = N \rtimes M$, где $G^{\mathfrak{F}} = N = C_G(N) = F(G)$ и M – максимальная подгруппа G, причем M дисперсивна. Отсюда следует, что в M имеется нормальная силовская q-подгруппа M_q для некоторого простого делителя q порядка M. Так как по лемме 1.2 $O_p(M) = 1$, то $q \ne p$. Поэтому $M_q = G_q$ является силовской q-подгруппой группы G. Тогда в силу единственности N следует, что $N_G(G_q) \ne G$. Так как M – максимальная подгруппа G и $M \subseteq N_G(G_q)$, то $M = N_G(G_q)$. Но это противоречит тому, что $N_G(G_q)$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G. Получили заключительное противоречие. □

3 Доказательство Теоремы B

Напомним, что группа G метанильпотентна, если $G/F(G)$ нильпотентна.

Доказательство. Необходимость. По условию $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^2$. Из насыщенности $\mathfrak{F}$ по теореме 3.18 из [2; IV] следует, что $\mathfrak{F}$ – наследственная формация. Пусть группа $G \in \mathfrak{F}$. Тогда любая подгруппа G является $\mathfrak{F}$-субнормальной в ней, в частности, $N_G(G_p)$ для любой $G_p \in Syl_p(G)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть G – контрпример минимального порядка и N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Рассуждая аналогично, как в теореме A, получаем, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $\Phi(G)=1$. В этом случае $N=G^{\mathfrak{F}}$ и существует максимальная подгруппа M в G такая, что $G=NM$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть N – неабелева группа. Рассуждая аналогично, как в случае 1 теоремы A получаем противоречие с выбором группы B.

2. N – абелева p-группа, p – некоторое простое число. Из $G/N\in\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{S}$ и $N\in\mathfrak{S}$ следует, что G разрешима. Из единственности N и $\Phi(G)=1$ получаем, что $G=N\rtimes M$, где $G^{\mathfrak{F}}=N=C_G(N)=$ $=F(G)$ и M – максимальная подгруппа G, причем $M\in\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}^2$. Предположим, что M нильпотентна. Так как по лемме 1.2 $O_p(M)=1$, то $p\cap\pi(M)=\varnothing$. Тогда группа G является дисперсивной. Теперь применяя рассуждения аналогичные, как при доказательстве теоремы A, получим, что $G\in\mathfrak{F}$. Противоречие. Будем считать, что M ненильпотентна. Рассмотрим следующие случаи.

i) Пусть $|\pi(M)|=2$.

Предположим, что $p\in\pi(M)$. По лемме 1.2 $O_p(M)=1$. Так как $M\in\mathfrak{N}^2$, то $M/F(M)$ нильпотентна. Заметим, что $F(M)$ – q-группа, $q\neq p$. Тогда $M_q\in Syl_q(M)$ является нормальной подгруппой в M. Заметим, что $M_q\in Syl_q(G)$ и $N_G(M_q)=M$. По условию $N_G(M_q)=M$ $\mathfrak{F}$-sn G. С другой стороны $N=G^{\mathfrak{F}}$ и $NM=G$. Получили противоречие.

Пусть p не принадлежит $\pi(M)$ и $\pi(M)=$ $=\{r,q\mid r\neq p\neq q\}$. Тогда $N\in Syl_p(G)$ и M – $\{r,q\}$-группа. Пусть $M_q\in Syl_q(M)$. Тогда $M_q\in Syl_q(G)$. Заметим, что $N_G(M_q)\neq G$ в силу $N=C_G(N)$ и N – p-группа, $p\neq q$.

Из того, что $N=G^{\mathfrak{F}}$ и $N_G(M_q)$ $\mathfrak{F}$-sn G следует, что $T=NN_G(M_q)=G^{\mathfrak{F}}N_G(M_q)\neq G$. Изучим подробнее строение $N_G(M_q)$. Заметим, что $N_G(M_q)=M_q\rtimes S$, где S – холлова q'-подгруппа в $N_G(M_q)$.

Покажем, что $N_G(M_q)\in\mathfrak{F}$.

Вначале предположим, что $N_G(M_q)\cap N=1$. Тогда из $G/N\in\mathfrak{F}$ и наследственности $\mathfrak{F}$ следует, что

$$N_G(M_q)N/N\simeq$$
$$\simeq N_G(M_q)/N_G(M_q)\cap N\simeq N_G(M_q)\in\mathfrak{F}.$$

Пусть $N_G(M_q)\cap N=D\neq 1$. Тогда $D\trianglelefteq N_G(M_q)$ и $M_q\trianglelefteq N_G(M_q)$. Откуда $M_q\times D\trianglelefteq N_G(M_q)$ и $N_G(M_q)=(M_q\times D)\rtimes R$, где R – r-группа.

Далее $N_G(M_q)/M_q\simeq DR\in\mathfrak{N}^2$. Откуда по теореме 1 из [5] $N_G(M_q)/M_q\in\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то $M_qR\subseteq M^x\in\mathfrak{F}$ и $N_G(M_q)/D\simeq M_qR\in\mathfrak{F}$. Тогда получаем $N_G(M_q)/M_q\cap D\simeq N_G(M_q)\in\mathfrak{F}$. Покажем, что $N_M(M_q)$ является нильпотентной группой.

Так как $N_G(M_q)$ $\mathfrak{F}$-sn G и $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то $N_G(M_q)$ $\mathfrak{F}$-*sn* T. По теореме 15.10 [1] $T\in\mathfrak{F}$. Так как $N=C_G(N)=F(G)$, то $F(T)=N$. Из $T\in\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}^2$ следует, что $T/N\in\mathfrak{N}$, откуда $N_G(M_q)N/N\simeq N_G(M_q)/N_G(M_q)\cap$ $\cap N\in\mathfrak{N}$. Тогда $(N_G(M_q)\cap M)N/N\simeq N_G(M_q)\cap$ $\cap M/N_G(M_q)\cap N\cap M\simeq N_G(M_q)\cap M\in\mathfrak{N}$. Заметим, что $N_G(M_q)\cap M=N_M(M_q)$. Следовательно, $N_M(M_q)\in\mathfrak{N}$.

Аналогично проводя рассуждения для $M_r\in Syl_r(M)$, получаем, что $N_M(M_r)\in\mathfrak{N}$. Так как нормализатор любой силовской подгруппы в M нильпотентен, то из [19] следует, что M нильпотентна. Получили противоречие.

ii) Пусть $|\pi(G)|=|\pi(M)|=3$. Тогда $p\in\pi(M)$.

Так как $O_p(M)=1$, то $\pi(F(M))\subseteq\{r,q\}$. Заметим, что $G/N\simeq M\in\mathfrak{N}^2$. Тогда $M/F(M)$ нильпотентна. Пусть $A=G_pG_q$, где G_p – силовская p-подгруппа, а G_q – силовская q-подгруппа в G. Так как $|A|<|G|$, $N_G(G_p)\cap A=N_A(G_p)$ $\mathfrak{F}$-sn A и $N_G(G_q)\cap A=N_A(G_q)$ $\mathfrak{F}$-sn A, то $A\in\mathfrak{F}$ и $A\in\mathfrak{N}^2$.

Заметим, что $N\subseteq A$. Покажем, что $G_p\trianglelefteq A$. Из $N=C_G(N)$ следует, что $F(A)$ – p-группа. Из $A\in\mathfrak{N}^2$ следует, что $A/F(A)\in\mathfrak{N}$. Тогда $G_p/F(A)\trianglelefteq A/F(A)$. Откуда $G_p\trianglelefteq A$. Следовательно, $G_q\subseteq A\subseteq N_G(G_p)$.

Аналогично, $G_r\subseteq N_G(G_p)$. Откуда получаем, что $G_p\trianglelefteq G$. Следовательно, $G_p\cap M\trianglelefteq M$. Но $O_p(M)=1$. Поэтому $M_p=1$ и $p\notin\pi(M)$, то есть наше предположение неверно.

iii) Пусть $|\pi(G)|>3$. Покажем, что любая собственная холлова, в частности, любая трипримарная холлова подгруппа G принадлежит $\mathfrak{F}$.

Пусть H – π_i-холлова подгруппа G, $\pi(G)=$ $=\{p_1,\dots,p_n\}$, где $\pi_i=\pi(G)\setminus\{p_i\}$. Для любой $S\in Syl_q(H)$ имеем, что $N_G(S)\cap H=N_H(S)$

$\mathfrak{F}$-sn H, так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация. Ввиду выбора группы G получаем, что любая собственная холлова подгруппа, в частности, трипримарная холлова подгруппа G принадлежит $\mathfrak{F}$. Используя методы работы [20], нетрудно показать, что $G \in \mathfrak{N}^2$. Так как $N = F(G)$, то $G / N \simeq \simeq M \in \mathfrak{N}$. По доказанному выше следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. □

4 Заключительные замечания и открытые вопросы

Требование дисперсивности групп в теореме A и метанильпотентности групп в теореме B является существенным.

***Пример* 4.1.** Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^3$ – формация всех разрешимых групп, чья нильпотентная длина не превосходит 3. Возьмем $M = S_4$ – симметрическую группу степени 4. Известно, что существует точный неприводимый M-модуль U над полем F_3 из 3 элементов. Рассмотрим полупрямое произведение $G = [U]M$. Заметим, что нильпотентная длина G равна 4 и $\pi(G) = \{2,3\}$. Так как подгруппа M является минимальной не $\mathfrak{N}^2$ -группой, то группа G – минимальная не $\mathfrak{N}^3$-группа. Отметим также, что G не является дисперсивной и метанильпотентной группой. Нетрудно видеть, что нормализаторы ее силовских подгрупп являются $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами в G, но сама группа G не принадлежит $\mathfrak{F}$.

***Определение* 4.2.** Для некоторого множества простых чисел π и непустой формации $\mathfrak{F}$ обозначим через $\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$ – класс всех групп G, у которых $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и для любого $q \in \pi \cap \pi(G)$ всякая силовская q-подгруппа является сильно $\mathfrak{F}$-субнормальной в G.

В случае, когда $\pi = \mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, будем обозначать $\mathrm{w}_{\mathbb{P}}^{*}\mathfrak{F} = \mathrm{w}^{*}\mathfrak{F}$.

***Предложения* 4.3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная формация и* $\pi \subseteq \mathbb{P}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* π_1 *– множество простых чисел и* $\pi \subseteq \pi_1$, *то* $\mathrm{w}_{\pi_1}^{*}\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$;

2) $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}^{*}\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$;

3) $\mathfrak{N}_{\pi\cap\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$;

4) $\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F} = \mathrm{w}_{\pi\cap\pi(\mathfrak{F})}^{*}\mathfrak{F}$;

5) $\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$ *– формация;*

6) $\mathrm{w}_{\pi}^{*}(\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}) = \mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$.

Доказательство предложения осуществляется проверкой определений.

***Проблема* 4.4.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная формация и* π *– некоторое множество простых чисел. Найти условия, при которых:*

1) $\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$ *также является насыщенной формацией*;

2) $\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

2. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

3. *Guo*, *W.* The Theory of Classes of Groups / W. Guo. – Beijing: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000. – 359 p.

4. *Ballester-Bolinches*, *A.* Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p.

5. *Васильев*, *А.Ф.* О влиянии примарных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп на строение группы / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.

6. *Васильева*, *Т.И.* Конечные группы с $\mathfrak{F}$-достижимыми проекторами / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2006. – № 38. – С. 14–18.

7. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 86–91.

8. *Васильев*, *А.Ф.* Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.С. Вегера // Сиб. мат. журн. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 259–275.

9. *Семенчук*, *В.Н.* Характеризация классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп / В.Н. Семенчук, С.Н. Шевчук // Мат. заметки. – 2011. – Т. 89, № 1. – С. 104–108.

10. *Семенчук*, *В.Н.* Конечные группы, у которых примарные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны / В.Н. Семенчук, С.Н. Шевчук // Известия вузов. Математика. – 2011. – № 8. – С. 46–55.

11. *Semenchuk*, *V.N.* On one generalization of finite $\mathfrak{U}$-critical groups / V.N. Semenchuk, A.N. Skiba // J. of Algebra and its Applications. – 2016. – Vol. 15, № 4. – P. 1650063-1–1650063-11.

12. *Васильев*, *В.А.* Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами / В.А. Васильев // Сиб. мат. журн. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1277–1288.

13. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

14. *Васильев*, *А.Ф.* О K-$\mathbb{P}$-субнормальных подгруппах конечных групп / А.Ф. Васильев,

Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Мат. заметки. – 2014. – Т. 95, № 4. – С. 517–528.

15. *Monakhov*, *V.S.* Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche di Matematica. – 2013. – Vol. 62, № 2. – P. 307–322.

16. *Kniahina*, *V.* On supersolubility of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V. Kniahina, V. Monakhov // International Journal of Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.

17. *Мурашко*, *В.И.* Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами / В.И. Мурашко // Сиб. мат. журн. – 2014. – Т. 55, № 6. – С. 1353–1367.

18. *Мурашко*, *В.И.* О классе групп с экстремальными $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами / В.И. Мурашко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2017. – № 105. – С. 111–115.

19. *Bianchi*, *M.* On finite groups with nilpotent Sylow-normalizers / M. Bianchi, A. Gillio Mauri, P. Huck // Arch. Math (Basel). – 1986 – Vol. 47. – P. 193–197.

20. *Васильева*, *Т.И.* О влиянии *k*-примарных холловых подгрупп на строение конечных разрешимых групп / Т.И. Васильева, С.В. Балычев // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 1 (34). – С. 55–60.

Поступила в редакцию 28.09.18.