А. Ю. Кудрявцев, О сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 5, 707–720

DOI: 10.4213/mzm8933

Математические заметки

Том 92 выпуск 5 ноябрь 2012

УДК 517.518+517.982

О сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам

А. Ю. Кудрявцев

В работе рассматриваются орторекурсивные разложения, являющиеся обобщением ортогональных рядов, по семействам неортогональных всплесков – двоичных сжатий и целочисленных сдвигов заданной функции φ. Устанавливается, что при некоторых не слишком жестких ограничениях на функцию φ для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ разложение сходится к f в $L^2(\mathbb{R})$. Способ разложения является устойчивым к ошибкам в вычислении коэффициентов. Результаты допускают обобщение на n-мерный случай.

Библиография: 15 названий.

Введение. Орторекурсивные разложения, являющиеся обобщением ортогональных рядов, были предложены Лукашенко (см. [1], [2]). Их идея восходит еще к заметке Б. С. и С. Б. Стечкиных 1961 г. [3]. Приведем определение и некоторые свойства этого способа разложения.

Определение 1. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, пусть $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ – семейство ненулевых элементов $\mathcal{H}$. Для произвольного элемента $f \in \mathcal{H}$ определим коэффициенты разложения $\{\widehat{f}_j\}_{j=1}^\infty$ следующим образом:

1) положим
$$\widehat{f}_1 = \frac{(f, e_1)}{\|e_1\|^2};$$

2) если уже определены $\widehat{f}_1, \dots, \widehat{f}_n$, то положим
$$\widehat{f}_{n+1} = \frac{(r_n(f), e_{n+1})}{\|e_{n+1}\|^2},$$
где $r_n(f) = f - \sum_{j=1}^n \widehat{f}_j e_j$.

Коэффициенты $\{\widehat{f}_j\}_{j=1}^\infty$ будем называть *орторекурсивными коэффициентами Фурье* элемента f по семейству $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ (для ортогонального семейства они совпадают с обычными коэффициентами Фурье), а формальный ряд $\sum_{j=1}^\infty \widehat{f}_j e_j$ – *орторекурсивным рядом Фурье* элемента f по семейству $\{e_j\}_{j=1}^\infty$.

Графическая иллюстрация процесса разложения приведена на рис. 1.

Утверждение 1 [2]. *Для любого элемента $f \in \mathcal{H}$ и любого семейства $\{e_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{H} \setminus \{0\}$ справедливы тождество Бесселя*
$$\left\| f - \sum_{j=1}^n \widehat{f}_j e_j \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^n |\widehat{f}_j|^2 \|e_j\|^2, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

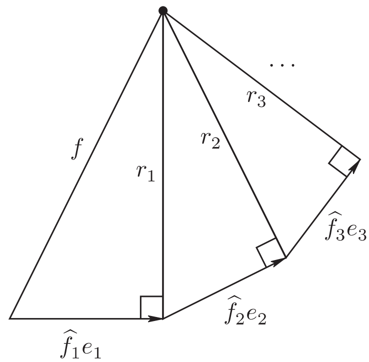

Рис. 1. Двухмерная иллюстрация процесса разложения

и неравенство Бесселя $\sum_{j=1}^{\infty}|\widehat{f}_j|^2\|e_j\|^2 \leqslant \|f\|^2$. *Орторекурсивный ряд Фурье элемента* f *по семейству* $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ *сходится к* f *тогда и только тогда, когда выполняется равенство Парсеваля* $\sum_{j=1}^{\infty}|\widehat{f}_j|^2\|e_j\|^2 = \|f\|^2$.

Доказательство. Докажем тождество Бесселя, из которого вытекают остальные утверждения.

1) Если $n=1$, то

$$\|f-\widehat{f}_1e_1\|^2 = \|f\|^2 - \widehat{f}_1(e_1,f) - \overline{\widehat{f}_1}(f,e_1) + \widehat{f}_1\overline{\widehat{f}_1}\|e_1\|^2 = \|f\|^2 - \widehat{f}_1\overline{\widehat{f}_1}\|e_1\|^2.$$

2) Предположим, что для $n=m$ равенство верно, и докажем его для $n=m+1$. Согласно (1) имеем

$$\Bigl\|f-\sum_{j=1}^{m+1}\widehat{f}_je_j\Bigr\|^2 = \Bigl\|f-\sum_{j=1}^{m}\widehat{f}_je_j\Bigr\|^2 - |\widehat{f}_{m+1}|^2\|e_{m+1}\|^2,$$

а по предположению

$$\Bigl\|f-\sum_{j=1}^{m}\widehat{f}_je_j\Bigr\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{m}|\widehat{f}_j|^2\|e_j\|^2.$$

Значит, равенство верно и для $n=m+1$. Утверждение доказано.

Таким образом, для орторекурсивных разложений справедливы аналоги свойств разложений по ортогональным семействам. К сожалению, орторекурсивное разложение даже на плоскости может расходиться[1] или сходиться к элементу, отличному от разлагаемого. Поэтому дадим

Определение 2. Семейство $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}\setminus\{0\}$ назовем *орторекурсивным семейством разложения в* $\mathcal{H}$, если для любого элемента $f\in\mathcal{H}$ орторекурсивный ряд Фурье f по семейству $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ сходится к f в $\mathcal{H}$.

[1]Примером может служить разложение по системе векторов $e_j=(\cos\ln j, \sin\ln j)$, $j=1,2,\dots$, вектора $f\neq\lambda e_1$, $\lambda\in L^2(\mathbb{R})$.

Из определения 1 вытекает, что любая полная не более чем счетная ортогональная система в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ является орторекурсивным семейством разложения в $\mathcal{H}$.

Пусть φ – действительно- или комплекснозначная функция на вещественной прямой, принадлежащая пространству Лебега $L^2(\mathbb{R})$ над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, соответственно. Функции

$$\varphi_{k,l}(x) = 2^{k/2}\varphi(2^k x - l), \qquad x \in L^2(\mathbb{R}), \quad k, l \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

будем называть *всплесками*, *порожденными функцией* φ. При этом мы, как и в книге [4], вообще говоря, не требуем от функций (2) ортогональности.

Пусть K – целое число и $L = \{L_k\}_{k=K}^{+\infty}$ – последовательность целых неотрицательных чисел. В работе рассматривается семейство функций

$$\Phi_{K,L} = \{\varphi_{k,l} : k \geqslant K,\, |l| \leqslant L_k\}. \tag{3}$$

Набор функций $\Pi_k = \{\varphi_{k,l} : |l| \leqslant L_k\}$ называется *k-й пачкой*.

Занумеруем семейство (3) одним натуральным индексом $j = j(k,l)$ так, чтобы при $j < j'$ выполнялось неравенство $k \leqslant k'$. Таким образом совокупность $\Phi_{K,L}$ нумеруется в порядке возрастания номеров пачек k, а каждая пачка нумеруется произвольно. При $j = j(k,l)$ положим $\varphi_j(x) = \varphi_{k,l}(x)$. К семейству $\Phi_{K,L} = \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ можно применять определение 1.

Филиппов и Освальд в статье [5] доказали, в частности, что если $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, $|\varphi(x)| = O(|x|^{-1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, при $|x| \to \infty$ и $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx \neq 0$, то семейство всплесков (2), порожденных функцией φ, обладает свойством представления в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, т.е. для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ найдется ряд вида $\sum_{k,l\in\mathbb{Z}} c_{k,l}(f)\varphi_{k,l}(x)$, сходящийся к f в $L^2(\mathbb{R})$.

Определение 3. Совокупность $\Phi_{K,L}$ будем называть *безусловным относительно перестановок пачек* орторекурсивным семейством разложения в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, если при любой перестановке пачек и любых перестановках функций внутри пачек она является орторекурсивным семейством разложения в $L^2(\mathbb{R})$.

В настоящей работе мы найдем условия, при которых совокупность $\Phi_{K,L}$ является орторекурсивным семейством разложения в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, и притом безусловным относительно перестановок пачек. Эти условия формулируются в разделе 1. Аналогичные результаты для случая, когда $\operatorname{supp}\varphi \subset [0,1]$, были получены ранее в работах автора [6], [7].

В разделе 2 дается обобщение орторекурсивных разложений, удобное для дальнейшего изложения. Раздел 3 посвящен доказательству основных результатов.

То, что на каждом шаге орторекурсивных разложений ищется приближение остатка, полученного на предыдущем шаге, роднит их с так называемыми “жадными” алгоритмами (Greedy Algorithms). В последних после получения остатка $r_n(f)$ выбирается элемент $e_{n+1} = e_{n+1}(f)$ из некоторого заранее заданного множества $D \subset \mathcal{H}$, который наилучшим образом приближает $r_n(f)$ (подробнее см. [8]). При таком подходе имеется возможность оптимизации (в различных смыслах) процесса разложения, но нет линейности разложения. Орторекурсивные разложения привлекательны линейностью и отсутствием усложняющего разложение алгоритма выбора следующего элемента. Это позволяет осуществлять разложение при бо́льших ограничениях по производительности.

Важным свойством орторекурсивных разложений является устойчивость к ошибкам в вычислении коэффициентов. Об этом подробнее говорится в п. 4. Отметим, что “жадные” алгоритмы также устойчивы к ошибкам в вычислении коэффициентов (см. [9]).

В конце работы приводится ряд замечаний, в частности, о разложениях в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Алгоритмы, подобные изложенному в работе, находят применение в цифровой обработке сигналов, сжатии изображений, распознавании образов и других областях.

1. О сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам. Преобразование Фурье в $L^1(\mathbb{R})$ и $L^2(\mathbb{R})$ будем определять выражением

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \omega x}\, dx, \tag{4}$$

где в случае, когда $f \in L^2(\mathbb{R})$, интеграл понимается как предел в метрике $L^2(\mathbb{R})$ интегралов того же выражения по отрезкам $[-A, A]$ при $A \to +\infty$ (о существовании этого предела см. [10; гл. 8, § 5, п. 1]). Выражение (4) удобно тем, что в равенстве Парсеваля–Планшереля отсутствует постоянный множитель, содержащий 2π: $(f, g) = (\widehat{f}, \widehat{g})$ для любых функций $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

Будем писать, что измеримая на действительной оси функция $\varphi \in \mathcal{L}^2_1(\mathbb{R})$, если

$$\int_0^1 \biggl(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\varphi(x+m)|\biggr)^2 dx < \infty. \tag{5}$$

Очевидно, $\mathcal{L}^2_1(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Следующая теорема дает ответ на вопрос, при каких условиях совокупность $\Phi_{K,L}$ (см. (3)) является орторекурсивным семейством разложения в $L^2(\mathbb{R})$.

Теорема 1. *Пусть функция φ удовлетворяет следующим условиям:*

(A0) $\varphi \in \mathcal{L}^2_1(\mathbb{R})$;

(A1) $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx \neq 0$;

(A2) *существует функция $a(\omega)$, невозрастающая на промежутке $[0, +\infty)$, такая, что $|\widehat{\varphi}(\omega)| \leqslant a(|\omega|)$ при всех $\omega \in \mathbb{R}$ и*

$$\int_0^{+\infty} a^2(\omega) \ln(1+\omega)\, d\omega < \infty. \tag{6}$$

Тогда для любого целого числа K найдется последовательность целых неотрицательных чисел $L = \{L_k\}_{k=K}^{+\infty}$ такая, что совокупность $\Phi_{K,L} = \{\varphi_{k,l} : k \geqslant K, |l| \leqslant L_k\}$, а также любая ее подсовокупность, содержащая бесконечное число пачек, является безусловным относительно перестановок пачек орторекурсивным семейством разложения в пространстве $L^2(\mathbb{R})$.

Доказательство теоремы 1 приведено в разделе 3.

Следствие 1. *Пусть функция φ удовлетворяет следующим условиям:*

(A0′) *$\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ и найдется функция $b(x)$, невозрастающая на промежутке $[x_0, +\infty)$ для некоторого $x_0 \geqslant 0$, такая, что $|\varphi(x)| \leqslant b(|x|)$ при $|x| \geqslant x_0$ и $\int_{x_0}^{+\infty} b(x)\, dx < \infty$;*

(A1) $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx \neq 0$;

(A2) *существует функция* $a(\omega)$, *невозрастающая на промежутке* $[0,+\infty)$, *такая, что* $|\widehat{\varphi}(\omega)| \leqslant a(|\omega|)$ *при всех* $\omega \in \mathbb{R}$ *и*

$$\int_0^{+\infty} a^2(\omega)\ln(1+\omega)\,d\omega < \infty. \tag{7}$$

Тогда выполняются все утверждения теоремы 1.

Легко видеть, что условие (A1) теоремы 1, равносильное условию $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$, нельзя отбросить. Так, всплески, порожденные в соответствии с выражениями (2) функцией

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, & 0 \leqslant x < \dfrac{1}{4}, \\ -\sqrt{2}, & \dfrac{1}{4} \leqslant x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

(сжатая в 2 раза функция Хаара), не полны в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Но, как показала Добеши, если $|\widehat{\varphi}(\omega)| \leqslant C|\omega|^\alpha(1+|\omega|)^{-\gamma}$, где $\alpha > 0$, $\gamma > \alpha+1$, и $\varphi \neq 0$, то существуют такие числа $a > 1$ и $b > 0$, что семейство функций $\{a^{k/2}\varphi(a^k x - bl) : k, l \in \mathbb{Z}\}$, образует "фрейм" в пространстве $L^2\mathbb{R}$ (см. [11; гл. 3, § 3.3.2, предложение 3.3.2]). Известно также, что если функция $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2\mathbb{R}$ порождает полное ортонормированное семейство всплесков, то $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 0$ (см., например, [12; гл. 7, § 5, следствие 10]).

Можно ли отбросить или хотя бы отказаться от логарифма в условии (A2)? Автором получены предварительные результаты, говорящие о том, что этого сделать нельзя. Однако они составляют предмет отдельной публикации. Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функция* φ *удовлетворяет условиям* (A0) *и* (A1). *Тогда для любого целого числа* K *и любой последовательности целых неотрицательных чисел* $L = \{L_k\}_{k=K}^{+\infty}$ *таких, что* $L_k/2^{3k/2} \to \infty$, *найдется подпоследовательность, а также перестановка пачек совокупности* $\Phi_{K,L}$, *являющиеся орторекурсивными семействами разложения в пространстве* $L^2(\mathbb{R})$.

Доказательство этой теоремы также приведено в разделе 3.

Следствие 2. *Пусть функция* φ *удовлетворяет условиям* (A0$'$) *и* (A1). *Тогда выполняется утверждение теоремы* 2.

2. Обобщенные орторекурсивные разложения. Полезно и естественно обобщить определение 1 следующим образом.

Определение 4. Пусть $\mathcal{L}$ – линейное пространство, $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ – совокупность линейных операторов в $\mathcal{L}$. Для произвольного элемента $f \in \mathcal{L}$ определим последовательность элементов $\{\widehat{f}_k\}_{k=1}^\infty$ следующим образом:

1) положим $\widehat{f}_1 = P_1(f)$;
2) если уже определены элементы $\widehat{f}_1, \dots, \widehat{f}_n$, то положим

$$\widehat{f}_{n+1} = P_{n+1}R_n(f),$$

где $R_n(f) = f - \sum_{k=1}^n \widehat{f}_k$.

Формальный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k$ будем называть *рекурсивным рядом* элемента f по семейству операторов $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Определение 5. Пусть $\mathcal{N}$ – нормированное пространство. Совокупность линейных операторов $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathcal{N}$ назовем *рекурсивным семейством разложения в пространстве* $\mathcal{N}$, если для любого элемента $f \in \mathcal{N}$ рекурсивный ряд f по семейству операторов $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к f в $\mathcal{N}$.

Всюду далее для произвольного оператора P будем использовать обозначение $P' = I - P$, где I – тождественный оператор. Легко видеть, что

$$R_n(f) = P_n' P_{n-1}' \cdots P_1'(f), \qquad \widehat{f}_n = P_n P_{n-1}' \cdots P_1'(f). \tag{8}$$

Основная лемма. *Пусть $\mathcal{N}$ – нормированное пространство, $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность непрерывных линейных операторов в $\mathcal{N}$, удовлетворяющих условию $\|P_k'\| \leqslant 1$ при $k \in \mathbb{N}$, такая, что найдется бесконечное подмножество N натуральных чисел и последовательность $\{V_n\}_{n \in N}$ непрерывных линейных операторов в $\mathcal{N}$ с условиями*:

1) *для любого элемента $f \in \mathcal{N}$ $V_n(f) \to f$ при $N \ni n \to \infty$*;
2) *существует постоянная $\sigma < 1$ такая, что $\|P_n' V_n\| \leqslant \sigma$ при всех $n \in N$*;
3) *существуют числа $\tau_{n,k} \geqslant 0$, $n \in N$, $k = 1, \dots, n-1$ такие, что*
   a) *для любого элемента $g \in \mathcal{N}$ $\|V_n' P_k(g)\| \leqslant \tau_{n,k}\{\|g\|^2 - \|P_k'(g)\|^2\}^{1/2}$*;
   b) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n-1} \tau_{n,k}^2 = C^2 < \infty$.

Тогда совокупность операторов $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ является рекурсивным семейством разложения в пространстве $\mathcal{N}$.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $f \in \mathcal{N}$. Обозначим предел невозрастающей числовой последовательности $\|R_n(f)\|$ через R.

При любых целых $n \in N$, $n > 1$ и $1 \leqslant m < n$ имеем

$$\begin{aligned}
\|R_n(f)\| &= \|P_n' R_{n-1}(f)\| = \|P_n'(V_n + V_n')R_{n-1}(f)\| \\
&\leqslant \sigma\|R_{n-1}(f)\| + \left\| V_n' \left(R_m(f) - \sum_{k=m+1}^{n-1} \widehat{f}_k \right) \right\| \\
&\leqslant \sigma\|R_{n-1}(f)\| + \|V_n' R_m(f)\| + \sum_{k=m+1}^{n-1} \|V_n' P_k R_{k-1}(f)\| \\
&\leqslant \sigma\|R_{n-1}(f)\| + \|V_n' R_m(f)\| + \sum_{k=m+1}^{n-1} \tau_{n,k}\{\|R_{k-1}(f)\|^2 - \|R_k(f)\|^2\}^{1/2} \\
&\leqslant \sigma\|R_{n-1}(f)\| + \|V_n' R_m(f)\| + C\{\|R_m(f)\|^2 - R^2\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу сначала по $n \in N$, а затем по m, с учетом условия 1) получаем, что $R \leqslant \sigma R$, т.е. $R = 0$.

Определение 6. Пусть $\mathcal{N}$ – нормированное пространство. Совокупность линейных операторов $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathcal{N}$ назовем *безусловным рекурсивным семейством разложения в пространстве* $\mathcal{N}$, если любая перестановка последовательности $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ является рекурсивным семейством разложения в $\mathcal{N}$.

Следствие 3. *Если условия основной леммы выполняются с множеством* $N = \mathbb{N}$, *то последовательность операторов* $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$, *а также любая ее подпоследовательность, являются безусловным рекурсивным семейством разложения в* $\mathcal{N}$.

Доказательство. Следует заметить, что если условия основной леммы выполняются с множеством $N = \mathbb{N}$, то

а) любая подпоследовательность $\{P_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет всем условиям основной леммы с множеством $N = \mathbb{N}$;

б) любая перестановка $\{P_{\sigma(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет всем условиям основной леммы (для доказательства этого надо положить $N = \{n \in \mathbb{N} : \sigma(n) > \sigma(j),\ j = 1,\dots,n-1\}$).

Утверждение 2. *Пусть* $\mathcal{N}$ – *это сепарабельное нормированное пространство, а* $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *последовательность непрерывных линейных операторов в* $\mathcal{N}$, *причем* $\|P'_k\| \leqslant 1$ *при* $k \in \mathbb{N}$ *и существует постоянная* $\sigma < 1$ *такая, что для любого элемента* $f \in \mathcal{N}$

$$\limsup_{k\to\infty} \|P'_k(f)\| \leqslant \sigma\|f\|. \tag{9}$$

Тогда существует подпоследовательность $\{P_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ *и перестановка* $\{P_{\sigma(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, *являющиеся рекурсивными семействами разложения в пространстве* $\mathcal{N}$.

Доказательство. Докажем существование указанной подпоследовательности. Пусть $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ – не более чем счетное всюду плотное семейство в пространстве $\mathcal{N}$. По условию (9) найдется такое $k_1 \in \mathbb{N}$, что $\|P'_{k_1}(g_1)\| \leqslant \sigma\|g_1\|$. Существует такое $k_2 > k_1$, что выполняются условия: $\|P'_{k_2}P'_{k_1}(g_1)\| \leqslant \sigma\|P'_{k_1}(g_1)\|$ и $\|P'_{k_2}P'_{k_1}(g_2)\| \leqslant \sigma\|P'_{k_1}(g_2)\|$. Предположим, что уже определены натуральные числа $k_1 < k_2 < \dots < k_n$. Тогда выберем k_{n+1} столь большим, чтобы при $j = 1,2,\dots,n+1$ выполнялись неравенства

$$\|P'_{k_{n+1}} \cdots P'_{k_1}(g_j)\| \leqslant \sigma\|P'_{k_n} \cdots P'_{k_1}(g_j)\|.$$

Очевидно, что для любого $j \in \mathbb{N}$ $P'_{k_n} \cdots P'_{k_1}(g_j) \to 0$ при $n \to \infty$. Из всюду плотности совокупности $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ и условия $\|P'_k\| \leqslant 1$, $k \in \mathbb{N}$, следует, что для любого элемента $f \in \mathcal{N}$ $P'_{k_n} \cdots P'_{k_1}(f) \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, $\{P_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ – искомая подпоследовательность. Доказательство существования перестановки проводится аналогично.

3. Доказательства теорем о сходимости.

Доказательство теоремы 1. Будем считать, что $\|\varphi\| = 1$. Рассмотрим в $L^2(\mathbb{R})$ оператор сжатия (растяжения) в 2^K раз, определяемый равенством $D^K g(x) = 2^{K/2} \times g(2^K x)$, где $g \in L^2(\mathbb{R})$, сохраняющий скалярное произведение. Так как утверждение теоремы инвариантно относительно таких преобразований семейства $\Phi_{K,L}$ и $D^K\Phi_{0,L} = \Phi_{K,L}$, то, доказав утверждение для $K = 0$, получим его для любого целого K. Для краткости обозначим через Φ семейство $\Phi_{0,L}$.

Зафиксируем произвольные целые неотрицательные числа L_k, $k \geqslant 0$, которые будут выбраны позднее. Рассмотрим операторы P_k орторекурсивного разложения по k-й пачке семейства Φ: для любой функции $g \in L^2(\mathbb{R})$ положим

$$P_k(g) = \sum_{|l|\leqslant L_k} \widehat{g}_{k,l}\varphi_{k,l}(x), \tag{10}$$

где $\widehat{g}_{k,l}$ – орторекурсивные коэффициенты функции g, вычисляемые в соответствии с определением 1 по k-й пачке Π_k в порядке ее нумерации. Для произвольной функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ частичные суммы (обобщенного) рекурсивного ряда f по семейству операторов $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ образуют подпоследовательность частичных сумм орторекурсивного ряда Фурье f по семейству функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ (о нумерации семейства Φ одним индексом см. во введении), норма остатка которого не возрастает. Поэтому достаточно доказать, что последовательность операторов $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$, а также любая ее подпоследовательность, является безусловным рекурсивным семейством разложения в $L^2(\mathbb{R})$. (Правда, переставлять можно не только пачки, но и функции внутри пачек, но из доказательства будет видно, что это несущественно.)

В силу следствия 3 достаточно показать, что последовательность операторов $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям основной леммы из раздела 2 с множеством $N = \mathbb{N}$. Неравенство $\|P'_k\| \leqslant 1$ при $k \geqslant 0$ следует из тождества Бесселя (1). Проверим условия 3.1–3.3 основной леммы.

3.1. В силу условия (A1) и непрерывности преобразования Фурье функции $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ найдется целое неотрицательное число d такое, что $|\widehat{\varphi}(\omega) - \widehat{\varphi}(0)| < |\widehat{\varphi}(0)|/2$ при $|\omega| \leqslant 2^{-d-1}$. Будем обозначать через $\chi_{[a,b]}(\omega)$ характеристическую функцию отрезка $[a, b]$. Рассмотрим при $n \geqslant d$ подпространства

$$\mathcal{V}_n = \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}) : \widehat{v}(\omega) = \sum_{|j| \leqslant 2^{-d} L_n} c_j e^{2\pi i j \omega / 2^{n-d}} \cdot \chi_{[-2^{n-d-1}, 2^{n-d-1}]}(\omega),\ c_j \in \mathbb{C} \right\}. \tag{11}$$

Пусть V_n – оператор ортогонального проектирования на подпространство $\mathcal{V}_n$ в $L^2(\mathbb{R})$. Проверим условие 3.1 основной леммы.

Пусть функция h определена и непрерывна на отрезке $[-1/2, 1/2]$, не обязательно периодическая, $U_N(\omega)$ – тригонометрический многочлен наилучшего равномерного приближения функции h на отрезке $[-1/2, 1/2]$ степени не выше $N - 1$. Положим

$$E_N(h) = \max_{|\omega| \leqslant 1/2} |h(\omega) - U_N(\omega)|. \tag{12}$$

Через $\omega_I(h, \delta)$ будем обозначать модуль непрерывности функции h на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, т.е.

$$\omega_I(h, \delta) = \sup_{x,y \in I,\, |x-y| \leqslant \delta} |h(x) - h(y)|. \tag{13}$$

Из неравенства Джексона для периодических функций[2] легко вывести, что если $h(-1/2) = h(1/2) = 0$, то

$$E_N(h) \leqslant 2\omega_{[-1/2,1/2]}\left(h, \frac{1}{2N}\right). \tag{14}$$

Покажем, что условие 3.1 основной леммы будет выполнено, если $L_n/2^{3n/2} \to \infty$ при $n \to \infty$. Для всякой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ и любого $\varepsilon > 0$ найдем целое число $N_1 \geqslant d$ и кусочно-линейную функцию $z \in L^2(\mathbb{R})$, обращающуюся в нуль вне отрезка

[2] Точная постоянная в неравенстве Джексона найдена Корнейчуком [13].

$[-2^{N_1-d-1}, 2^{N_1-d-1}]$ такую, что $\|\widehat{f}-z\|<\varepsilon/2$. Пусть $n\geqslant N_1$ и $T(\omega)$ – тригонометрический многочлен степени не выше $2^{-d}L_n$. Тогда по неравенству (14) имеем

$$\begin{aligned}\biggl\|z(\omega)-T\biggl(\frac{\omega}{2^{n-d}}\biggr)\biggr\|_{L^2[-2^{n-d-1},2^{n-d-1}]}&=2^{(n-d)/2}\|z(2^{n-d}t)-T(t)\|_{L^2[-1/2,1/2]}\\ &\leqslant 2^{(n-d)/2+1}\omega_{[-1/2,1/2]}\biggl(z(2^{n-d}\cdot),\frac{1}{2^{-d}L_n}\biggr)\\ &=2^{(n-d)/2+1}\omega_{[-2^{n-d-1},2^{n-d-1}]}\biggl(z,\frac{2^{n-d}}{2^{-d}L_n}\biggr)\leqslant C(z)2^{(n-d)/2+1}\frac{2^n}{L_n}=C_1(z)\frac{2^{3n/2}}{L_n}.\end{aligned}$$

Выберем теперь такое $N\geqslant N_1$, что при $n>N$ $C_1(z)2^{3n/2}/L_n<\varepsilon/2$. Тогда при $n>N$ с учетом полученных неравенств имеем

$$\|f-V_n(f)\|\leqslant\|\widehat{f}-z\|+\biggl\|z(\omega)-T\biggl(\frac{\omega}{2^{n-d}}\biggr)\biggr\|_{L^2[-2^{n-d-1},2^{n-d-1}]}<\varepsilon.$$

3.2. Проверим второе условие основной леммы. Пусть функция $v\in\mathcal{V}_n$ и

$$\widehat{v}(\omega)=2^{-(n-d)/2}T\biggl(\frac{\omega}{2^{n-d}}\biggr)\chi_{[-1/2,1/2]}\biggl(\frac{\omega}{2^{n-d}}\biggr),$$

где $T(\omega)=\sum_{|j|\leqslant 2^{-d}L_n}c_je^{2\pi ij\omega}$ – произвольный тригонометрический многочлен степени не выше $2^{-d}L_n$. Очевидно, что $\|v\|_{L^2(\mathbb{R})}=\|T\|_{L^2[-1/2,1/2]}$. Так как $\widehat{\varphi}_{n,l}(\omega)=2^{-n/2}e^{-2\pi il\omega/2^n}\widehat{\varphi}(\omega/2^n)$, в силу равенства Парсеваля–Планшереля

$$(v,\varphi_{n,l})=2^{-d/2}\int_{-1/2}^{1/2}T(\omega)\overline{\widehat{\varphi}\biggl(\frac{\omega}{2^d}\biggr)}e^{2\pi il\omega/2^d}\,d\omega.$$

Обозначим $y(\omega)=2^{-d/2}T(\omega)\overline{\widehat{\varphi}(\omega/2^d)}$. При $l=2^dm$, $m\in\mathbb{Z}$, имеем

$$(v,\varphi_{n,2^dm})=\int_{-1/2}^{1/2}y(\omega)e^{2\pi im\omega}\,d\omega=c_{-m}(y)$$

– коэффициент Фурье функции y по тригонометрической системе на отрезке $[-1/2,1/2]$. Используя равенство Парсеваля для этой системы, можно оценить

$$\begin{aligned}\sum_{|l|\leqslant L_n}|(v,\varphi_{n,l})|^2\geqslant\sum_{|m|\leqslant 2^{-d}L_n}|(v,\varphi_{n,2^dm})|^2&=\sum_{|m|\leqslant 2^{-d}L_n}|c_{-m}(y)|^2\\ &=\int_{-1/2}^{1/2}|y(\omega)|^2\,d\omega-\sum_{|m|>2^{-d}L_n}|c_m(y)|^2.\end{aligned}\tag{15}$$

Из определения числа d следует, что $|\widehat{\varphi}(\omega/2^d)|>|\widehat{\varphi}(0)|/2$ при $|\omega|\leqslant 1/2$, значит

$$\int_{-1/2}^{1/2}|y(\omega)|^2\,d\omega=2^{-d}\int_{-1/2}^{1/2}\biggl|T(\omega)\overline{\widehat{\varphi}\biggl(\frac{\omega}{2^d}\biggr)}\biggr|^2\,d\omega\geqslant 2^{-d-2}|\widehat{\varphi}(0)|^2\|T\|^2.\tag{16}$$

Воспользуемся тем, что при $|m|>2^{-d}L_n$ верно равенство

$$c_m\biggl(T(\omega)\overline{\widehat{\varphi}\biggl(\frac{\omega}{2^d}\biggr)}\biggr)=c_m\biggl(T(\omega)\biggl[\overline{\widehat{\varphi}\biggl(\frac{\omega}{2^d}\biggr)-\widehat{\varphi}(0)}\biggr]\biggr).$$

Положим $\mu = \max_{|\omega|\leqslant 1/2} |\widehat{\varphi}(\omega/2^d) - \widehat{\varphi}(0)| < |\widehat{\varphi}(0)|/2$. По неравенству Бесселя для тригонометрической системы

$$\sum_{|m|>2^{-d}L_n} |c_m(y)|^2 \leqslant 2^{-d} \int_{-1/2}^{1/2} |T(\omega)|^2 \left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^d}\right) - \widehat{\varphi}(0)\right|^2 d\omega \leqslant 2^{-d}\mu^2 \|T\|^2. \tag{17}$$

Подставляя неравенства (16) и (17) в (15), получаем

$$\sum_{|l|\leqslant L_n} |(v, \varphi_{n,l})|^2 \geqslant 2^{-d}\left(\frac{|\widehat{\varphi}(0)|^2}{4} - \mu^2\right)\|T\|^2 = c^2(\varphi)\|v\|^2, \tag{18}$$

где $c(\varphi) > 0$ – постоянная, зависящая только от φ.

Пусть теперь $\widehat{v}_{n,l}$, $|l| \leqslant L_n$, – орторекурсивные коэффициенты Фурье функции v по n-й пачке Π_n, вычисляемые в порядке ее нумерации. Пусть $\Lambda_l \subset \{-L_n, \dots, L_n\}$ – множество индексов, предшествующих индексу l при вычислении орторекурсивных коэффициентов $\widehat{v}_{n,l}$, включая l (т.е. $l \in \Lambda_l$). Тогда по определению 1 имеем

$$\begin{aligned}\sum_{|l|\leqslant L_n} |(v, \varphi_{n,l})|^2 &= \sum_{|l|\leqslant L_n} \sum_{l'\in\Lambda_l} \widehat{v}_{n,l'}(\varphi_{n,l'}, \varphi_{n,l})\overline{(v, \varphi_{n,l})} \\ &\leqslant \sum_{m\in\mathbb{Z}} |(\varphi, \varphi_{0,m})| \left(\sum_{|l|\leqslant L_n} |\widehat{v}_{n,l}|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{|l|\leqslant L_n} |(v, \varphi_{n,l})|^2\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{19}$$

Постоянная

$$A(\varphi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |(\varphi, \varphi_{0,m})| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\varphi(x-m)|\, dx = \int_0^1 \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\varphi(x-m)|\right)^2 dx$$

конечна, так как функция $\varphi \in \mathcal{L}^2_1(\mathbb{R})$ (см. (A0)). Разделив неравенство (19) на $\left(\sum_{|l|\leqslant L_n} |(v, \varphi_{n,l})|^2\right)^{1/2}$ и возведя в квадрат, имеем

$$\sum_{|l|\leqslant L_n} |(v, \varphi_{n,l})|^2 \leqslant A^2(\varphi) \sum_{|l|\leqslant L_n} |\widehat{v}_{n,l}|^2. \tag{20}$$

Согласно тождеству Бесселя (1) из неравенств (18) и (20) окончательно получаем

$$\|P'_n(v)\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{|l|\leqslant L_n} |\widehat{v}_{n,l}|^2 \leqslant \left(1 - \frac{c^2(\varphi)}{A^2(\varphi)}\right)\|v\|^2 = \sigma^2\|v\|^2, \tag{21}$$

т.е. $\|P'_n V_n\| \leqslant \sigma = \sigma(\varphi) < 1$, что и требовалось.

3.3. Для произвольной функции $g \in L^2(\mathbb{R})$ выражение $P_k(g)$ определено равенством (10). Подставим тождество Бесселя $\|g\|^2 - \|P'_k(g)\|^2 = \sum_{|l|\leqslant L_k} |\widehat{g}_{k,l}|^2$ в условие 3а основной леммы. Очевидно, достаточно проверить, что для всякой функции $p(x) = \sum_{|l|\leqslant L_k} \gamma_l\, \varphi_{k,l}(x)$, где γ_l – любые числа, при $0 \leqslant k < n$ выполняется неравенство

$$\|V'_n(p)\| \leqslant \tau_{n,k}\left(\sum_{|l|\leqslant L_k} |\gamma_l|^2\right)^{1/2} \tag{22}$$

с числами $\tau_{n,k}$, удовлетворяющими условию 3 b) основной леммы.

Пусть $0 \leqslant k < n-d$. Преобразование Фурье функции p имеет вид

$$\widehat{p}(\omega) = 2^{-k/2} \sum_{|l|\leqslant L_k} \gamma_l e^{-2\pi i l\omega/2^k} \widehat{\varphi}\Big(\frac{\omega}{2^k}\Big) = 2^{-k/2} Q\Big(\frac{\omega}{2^k}\Big)\widehat{\varphi}\Big(\frac{\omega}{2^k}\Big).$$

Пусть $v \in \mathcal{V}_n$ и $\widehat{v}(\omega) = 2^{-(n-d)/2} T(\omega/2^{n-d})\chi_{[-2^{n-d-1},2^{n-d-1}]}(\omega)$, где $T(\omega)$ – тригонометрический многочлен степени не выше $2^{-d}L_n$. Полагая $r = n-d-k$, имеем

$$\begin{aligned}\|p-v\|^2 &= \int_{-2^{n-d-1}}^{2^{n-d-1}} \Big|2^{-k/2} Q\Big(\frac{\omega}{2^k}\Big)\widehat{\varphi}\Big(\frac{\omega}{2^k}\Big) - 2^{-(n-d)/2} T\Big(\frac{\omega}{2^{n-d}}\Big)\Big|^2 \, d\omega \\ &\qquad + \int_{|\omega|>2^{n-d-1}} \Big|2^{-k/2} Q\Big(\frac{\omega}{2^k}\Big)\widehat{\varphi}\Big(\frac{\omega}{2^k}\Big)\Big|^2 \, d\omega \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \big|2^{r/2} Q(2^r\omega)\widehat{\varphi}(2^r\omega) - T(\omega)\big|^2 \, d\omega + \int_{|\omega|>2^{r-1}} |Q(\omega)\widehat{\varphi}(\omega)|^2 \, d\omega = I_1 + I_2.\end{aligned} \tag{23}$$

Из неравенства Джексона для периодических функций легко вывести, что (см. (12), (13))

$$E_N(h) \leqslant 3\omega_{[-1/2,1/2]}\Big(h, \frac{1}{2N}\Big) + \frac{|h(1/2) - h(-1/2)|}{2} \tag{24}$$

(для доказательства нужно вычесть из h линейную функцию так, чтобы разность принимала на концах отрезка $[-1/2, 1/2]$ одинаковые значения).

Пусть $U(\omega)$ – тригонометрический многочлен наилучшего равномерного приближения функции $\widehat{\varphi}(2^r\omega)$ на отрезке $[-1/2, 1/2]$ степени не выше $2^{-d}L_n - 2^r L_k$ и $\varepsilon_{n,k} = \max_{|\omega|\leqslant 1/2} |\widehat{\varphi}(2^r\omega) - U(\omega)|$. Тогда многочлен $T(\omega) = 2^{r/2} Q(2^r\omega) U(\omega)$ имеет степень не выше $2^{-d}L_n$, и

$$I_1 \leqslant \varepsilon_{n,k}^2 \int_{-1/2}^{1/2} |2^{r/2} Q(2^r\omega)|^2 \, d\omega = 2^r \varepsilon_{n,k}^2 \int_{-1/2}^{1/2} |Q(\omega)|^2 \, d\omega = 2^r \varepsilon_{n,k}^2 \sum_{|l|\leqslant L_k} |\gamma_l|^2.$$

В свою очередь, согласно (24) и неравенству $\omega_{[-1/2,1/2]}(\widehat{\varphi}(2^r\omega), \delta) \leqslant \omega_{\mathbb{R}}(\widehat{\varphi}, 2^r\delta)$

$$\varepsilon_{n,k} \leqslant 3\omega_{\mathbb{R}}\Big(\widehat{\varphi}, \frac{2^r}{2^{-d}L_n - 2^r L_k}\Big) + \max_{|\omega|\geqslant 2^{r-1}} |\widehat{\varphi}(\omega)|. \tag{25}$$

Заметим, что если функция φ четная, то в последнем неравенстве постоянная перед модулем непрерывности равна 2, а второе слагаемое отсутствует.

Далее, оценим

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{|\omega|>2^{r-1}} |Q(\omega)\widehat{\varphi}(\omega)|^2 \, d\omega \\ &= \int_0^1 |Q(\omega)|^2 \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus[-2^{r-1},2^{r-1})} |\widehat{\varphi}(\omega+m)|^2 \, d\omega \leqslant \sum_{|m|\geqslant 2^{r-1}} a^2(m) \sum_{|l|\leqslant L_k} |\gamma_l|^2, \end{aligned}$$

где $a(\omega)$ – функция из условия (A2) теоремы 1.

Итак, неравенство (22) будет выполняться при $0 \leqslant k < n-d$, если положить

$$\tau_{n,k}^2 = 2^{n-d-k}\varepsilon_{n,k}^2 + \sum_{|m| \geqslant 2^{n-d-k-1}} a^2(m). \tag{26}$$

При $n-d \leqslant k < n$ положим $\tau_{n,k} = B$ – верхней границе Рисса системы функций $\{\varphi_{0,l}(x)\}_{l\in\mathbb{Z}}$ (см. [12; гл. 7, § 1, лемма 1]; очевидно, $B^2 \leqslant 2\sum_{m=0}^{\infty} a^2(m)$).

Пусть $L_k = 2^k\lambda_k$ при $k \geqslant 0$, где λ_k – натуральные числа. Тогда неравенство (25) можно переписать в виде

$$\varepsilon_{n,k} \leqslant 3\omega_{\mathbb{R}}\biggl(\widehat{\varphi}, \frac{2^{-k}}{\lambda_n - \lambda_k}\biggr) + a(2^{n-d-k-1}).$$

Подставляя это в равенство (26) и учитывая условие (A2), мы видим, что возможен такой выбор чисел L_k, $k \geqslant 0$, при котором для некоторой постоянной $C > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=0}^{n-1} \tau_{n,k}^2 \leqslant C.$$

Таким образом, условие 3б основной леммы выполняется. Теорема доказана.

Замечание 1. Если $\omega_{\mathbb{R}}(\widehat{\varphi}, \delta) = O(\delta^\alpha)$ при $0 < \alpha < 1$ (см. определение модуля непрерывности (13)), то можно положить $L_k = [2^{(1+1/(2\alpha))k}]$. При $\alpha = 1$ можно взять L_k, удовлетворяющие условию $L_k/2^{3k/2} \to \infty$ при $k \to \infty$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\varphi \in \mathcal{L}_1^2(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx \neq 0$ и $L_n/2^{3n/2} \to \infty$. При этих условиях, как было показано в ходе доказательства теоремы 1, семейство операторов $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям 1, 2 основной леммы из раздела 2. Следовательно, оно удовлетворяет условию (9) утверждения 2, откуда вытекает теорема.

4. Устойчивость к ошибкам в вычислении коэффициентов.

Определение 7. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – семейство ненулевых элементов $\mathcal{H}$, f – некоторый элемент $\mathcal{H}$, $E = \{(\varepsilon_j, \xi_j)\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность числовых пар, называемых *ошибками*. Определим коэффициенты разложения $\{\widehat{f}_j^{\mathrm{e}}\}_{j=1}^{\infty}$ с ошибками E следующим образом:

1) положим
$$\widehat{f}_1^{\mathrm{e}} = \frac{(f, e_1)}{\|e_1\|^2}(1+\varepsilon_1) + \xi_1;$$

2) если уже определены коэффициенты $\widehat{f}_1^{\mathrm{e}}, \dots, \widehat{f}_n^{\mathrm{e}}$, то положим
$$\widehat{f}_{n+1}^{\mathrm{e}} = \frac{(r_n^{\mathrm{e}}(f), e_{n+1})}{\|e_{n+1}\|^2}(1+\varepsilon_{n+1}) + \xi_{n+1},$$

где $r_n^{\mathrm{e}}(f) = f - \sum_{j=1}^{n} \widehat{f}_j^{\mathrm{e}} e_j$.

Формальный ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \widehat{f}_j^{\mathrm{e}} e_j$ называется *орторекурсивным рядом Фурье элемента f по семейству $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ с ошибками $E = \{(\varepsilon_j, \xi_j)\}_{j=1}^{\infty}$*.

Определение 8. Пусть $\mathcal{E}$ – некоторое множество последовательностей числовых пар. Будем говорить, что орторекурсивное разложение по семейству $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ *устойчиво к ошибкам из множества* $\mathcal{E}$, если для любого элемента $f\in\mathcal{H}$ и любой последовательности $E=\{(\varepsilon_j,\xi_j)\}_{j=1}^\infty\in\mathcal{E}$ орторекурсивное разложение элемента f по семейству $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ с ошибками E сходится к f в $\mathcal{H}$.

Следуя работе [14], обозначим через $\mathcal{E}_{1-,l^2}$ множество последовательностей числовых пар $E=\{(\varepsilon_j,\xi_j)\}_{j=1}^\infty$ таких, что $\limsup_{j\to\infty}|\varepsilon_j|<1$ и $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty\in l^2$.

Теорема [14]. *Для того, чтобы орторекурсивное разложение по семейству* $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ *было устойчиво к ошибкам из множества* $\mathcal{E}_{1-,l^2}$, *необходимо и достаточно, чтобы совокупность* $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ *оставалась орторекурсивным семейством разложения при удалении из нее любого конечного числа элементов.*

Семейство $\Phi_{K,L}=\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$, согласно теореме 1, удовлетворяет этому условию. Получаем

Следствие 4. *При выполнении условий теоремы* 1 *орторекурсивное разложение по семейству* $\Phi_{K,L}=\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ *устойчиво к ошибкам из множества* $\mathcal{E}_{1-,l^2}$.

Этот результат можно несколько усилить, заменив условие $\limsup_{j\to\infty}|\varepsilon_j|<1$ на условия: существует $\delta>0$ такое, что начиная с некоторого номера $\varepsilon_j\in[-1,1-\delta]$ и $\liminf_{k\to\infty}\max_{|l|\leqslant L_k}|\varepsilon_{k,l}|<1$. Чтобы получить данное утверждение, надо повторить доказательство теоремы 1 для разложения с ошибками.

Замечание 2 (о разложениях в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$). Пусть φ – действительно или комплекснозначная функция из пространства $L^2(\mathbb{R}^n)$. В n-мерном случае всплески определяются равенством

$$\varphi_{k,\mathbf{l}}(\mathbf{x})=2^{k/2}\varphi(2^k\mathbf{x}-\mathbf{l}),\qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\quad k\in\mathbb{Z},\quad \mathbf{l}\in\mathbb{Z}^n. \tag{27}$$

Пусть K – целое число и $L=\{L_k\}_{k=K}^{+\infty}$ – последовательность неотрицательных чисел. Мы будем рассматривать семейство функций

$$\Phi^n_{K,L}=\{\varphi_{k,\mathbf{l}}: k\geqslant K,\ |\mathbf{l}|\leqslant L_k\}. \tag{28}$$

Набор функций $\Pi_k=\{\varphi_{k,\mathbf{l}}:|\mathbf{l}|\leqslant L_k\}$ называется *k-й пачкой.* Семейство (28) нумеруется одним индексом, также как и в одномерном случае, в порядке возрастания номеров пачек, а в каждой пачке произвольным образом.

Отметим, что результаты раздела 1 обобщаются на n-мерный случай. Для этого необходимо провести доказательство, аналогичное доказательству теоремы 1, для разложений в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Мы, однако, не приводим его здесь, так как оно составляет предмет отдельной публикации.

Замечание 3. Если сдвиги функции φ ортогональны, то рассматриваемое разложение является рекурсивным разложением по цепочке систем $\Pi_k=\{\varphi_{k,\mathbf{l}}:|l|\leqslant L_k\}$, $k=K,K+1,\dots$, введенном в работе [15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Т. П. Лукашенко, “Рекурсивные разложения, подобные ортогональным”, *Математика, экономика, экология, образование*, VII Международная конференция “Ряды Фурье и их приложения” (26 мая–1 июня 1999 г.), Тезисы докладов, Ростов-на-Дону, 1999, 331.

[2] Т. П. Лукашенко, “О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2001, № 1, 6–10.

[3] Б. С. Стечкин, С. Б. Стечкин, “Среднее квадратическое и среднее арифметическое”, *ДАН СССР*, **137**:2 (1961), 287–290.

[4] Ч. Чуи, *Введение в вэйвлеты*, Мир, М., 2001.

[5] V. I. Filippov, P. Oswald, “Representation in L_p by series of translates and dilates of one function”, *J. Approx. Theory*, **82**:1 (1995), 15–29.

[6] А. Ю. Кудрявцев, “Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов”, *Международная школа-семинар по геометрии и анализу, посвященная 90-летию Н. В. Ефимова* (Абрау-Дюрсо, 5–11 сентября 2000 г.), Тезисы докладов, Ростовский гос. ун-т, Ростов-на-Дону, 2000, 127–129.

[7] А. Ю. Кудрявцев, “Орторекурсивные разложения по системам неортогональных всплесков”, *Современные методы теории функций и смежные проблемы*, Материалы конференции, Воронежский гос. ун-т, Воронеж, 2003, 137–138.

[8] R. A. DeVore, V. N. Temlyakov, “Some remarks on greedy algorithms”, *Adv. Comput. Math.*, **5**:2-3 (1996), 173–187.

[9] В. В. Галатенко, Е. Д. Ливщиц, “Обобщенные приближенные слабые жадные алгоритмы”, *Матем. заметки*, **78**:2 (2005), 186–201.

[10] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1972.

[11] И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевск, 2001.

[12] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.

[13] Н. П. Корнейчук, “Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций”, *Докл. АН СССР*, **145**:3 (1962), 514–515.

[14] В. В. Галатенко, “Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:1 (2005), 3–16.

[15] Т. П. Лукашенко, В. А. Садовничий, “О рекурсивных разложениях по цепочке систем”, *ДАН*, **425**:6 (2009), 741–746.

А. Ю. Кудрявцев
Московский государственный институт
международных отношений (Университет) МИД РФ
E-mail: kudral@inbox.ru

Поступило
14.09.2011