Е. А. Родионов, Ю. А. Фарков, Оценки гладкости диадических ортогональных всплесков типа Добеши, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 3, 429–444

DOI: 10.4213/mzm8502

Математические заметки

Том 86 выпуск 3 сентябрь 2009

УДК 517.518.3+517.965

Оценки гладкости диадических ортогональных всплесков типа Добеши

Е. А. Родионов, Ю. А. Фарков

Пусть $\omega(\varphi, \cdot\,)$ – диадический модуль непрерывности финитной функции φ в $L^2(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющей масштабирующему уравнению с 2^n коэффициентами. Обозначим через α_φ точную верхнюю грань тех значений $\alpha > 0$, для которых неравенство $\omega(\varphi, 2^{-j}) \leqslant C2^{-\alpha j}$ выполнено при всех $j \in \mathbb{N}$. Для случаев $n = 3$ и $n = 4$ изучаются масштабирующие функции φ, генерирующие кратномасштабные анализы в $L^2(\mathbb{R}_+)$, и для этих функций вычислены точные значения величины α_φ. Отмечается, что гладкость диадического ортогонального всплеска в $L^2(\mathbb{R}_+)$, соответствующего масштабирующей функции φ, совпадает с α_φ.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. Хорошо известно, что масштабирующая функция Добеши порядка N является решением функционального уравнения

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \varphi(2x - k), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

и обладает следующими свойствами:

1) $\operatorname{supp} \varphi = [0, 2N - 1]$;
2) система $\{\varphi(\,\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R})$;
3) φ генерирует кратномасштабный анализ в $L^2(\mathbb{R})$.

При $N = 1$ конструкция Добеши приводит к функции Хаара: $\varphi = \chi_{[0,1)}$ (в этом случае $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$). Коэффициенты уравнения (1) для $2 \leqslant N \leqslant 10$ приведены в книге Добеши (см. [1; раздел 6.4]). При $N = 2$ решение уравнения (1) непрерывно на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет условию Липшица

$$|\varphi(t) - \varphi(x)| \leqslant C|t - x|^\alpha, \qquad t, x \in \mathbb{R},$$

с показателем $\alpha \approx 0.5500$. Точное значение показателя α (и соответствующих величин для $N = 3$ и $N = 4$) было найдено матричным методом (см. [1; § 7.2], [2; § 7.3]). Для масштабирующих функций Добеши порядков $N \geqslant 5$ точные значения показателей гладкости авторам не известны.

Формула, выражающая гладкость масштабирующей функции φ через совместный спектральный радиус некоторых матриц, генерируемых коэффициентами уравнения (1), впервые появилась в статьях Добеши и Лагариса [3] (см. также [4]); ниже мы будем пользоваться “диадическим” аналогом этой формулы. Напомним, что совместный спектральный радиус двух комплексных матриц A_0 и A_1 размера $N \times N$ определяется по формуле

$$\widehat{\rho}(A_0, A_1) := \lim_{k\to\infty} \max\{\|A_{d_1}A_{d_2}\cdots A_{d_k}\|^{1/k} : d_j \in \{0,1\},\, 1 \leqslant j \leqslant k\},$$

где $\|\cdot\|$ – произвольная норма в $\mathbb{C}^{N\times N}$. Очевидно, если $A_0 = A_1$, то величина $\widehat{\rho}(A_0, A_1)$ совпадает со спектральным радиусом $\rho(A_0)$.

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ – положительная полупрямая, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}\cap\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Для каждого $x \in \mathbb{R}_+$ и любого $j \in \mathbb{N}$ мы определим $x_{-j}, x_j \in \{0,1\}$ из двоичного разложения

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_{-j}2^{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} x_j 2^{-j}$$

(в случае двоично-рационального x выбирается разложение с конечным числом ненулевых слагаемых). Двоичное сложение на $\mathbb{R}_+$ определяется по формуле

$$x \oplus y = \sum_{j=1}^{\infty} |x_{-j} - y_{-j}|2^{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|2^{-j}, \qquad x, y \in \mathbb{R}_+,$$

и играет ключевую роль в теории рядов и преобразований Уолша (см. [5]–[7]). Так, например, если сумма $x \oplus y$ двоично-иррациональна, то для классических функций Уолша $\{w_k\}$ выполняется равенство $w_k(x \oplus y) = w_k(x)w_k(y)$.

В недавней работе [8] найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых диадическое масштабирующее уравнение

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k\varphi(2x \oplus k), \qquad x \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

имеет решение $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ со следующими свойствами:

1) $\operatorname{supp}\varphi = [0, 2^{n-1}]$;
2) система $\{\varphi(\,\cdot\, \oplus k) : k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$;
3) φ генерирует кратномасштабный анализ в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

В частности, если $n = 1$ и $c_0 = c_1 = 1$, то решением уравнения (2) является функция Хаара (см. также примеры в [9], [10]). В настоящей статье вычисляются точные значения показателей гладкости решений уравнения (2) в случаях $n = 3$ и $n = 4$. В доказательствах оценок снизу существенно используются разложения диадических масштабирующих функций в ряды Уолша (и в этом состоит главное отличие нашего метода от применяемых ранее методов оценки гладкости всплесков). Отметим, что алгоритм разложения масштабирующих функций в лакунарные ряды Уолша был найден вторым автором в [11], а из результатов статьи [8] следует применимость этого алгоритма к любой финитной диадической масштабирующей функции пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$. Коэффициенты уравнения (2) будем предполагать вещественными, хотя все приведенные ниже значения совместного спектрального радиуса матриц, генерируемых этими коэффициентами, сохраняются и для комплексного случая.

Полином Уолша

$$m(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2^n-1}c_kw_k(\omega),\qquad \omega\in\mathbb{R}_+,$$

будем называть *маской* масштабирующего уравнения (2). Известно, что маска $m(\omega)$ постоянна на двоичных интервалах ранга n. Более того, если $b_l=m(\omega)$ для $\omega\in[l2^{-n},(l+1)2^{-n})$, $0\leqslant l\leqslant 2^n-1$, то

$$c_k=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{l=0}^{2^n-1}b_lw_l(k2^{-n}),\qquad 0\leqslant k\leqslant 2^n-1. \tag{3}$$

Диадический модуль непрерывности масштабирующей функции φ, удовлетворяющей уравнению (2), определяется равенством

$$\omega(\varphi,\delta):=\sup\{|\varphi(x\oplus y)-\varphi(x)|:x,y\in[0,2^{n-1}),\ 0\leqslant y<\delta\},\qquad \delta>0.$$

Если функция φ такова, что $\omega(\varphi,2^{-j})\leqslant C2^{-\alpha j}$, $j\in\mathbb{N}$ для некоторого $\alpha>0$, то существует [6; § 5.1] константа $C(\varphi,\alpha)$ такая, что

$$\omega(\varphi,\delta)\leqslant C(\varphi,\alpha)\delta^{\alpha}. \tag{4}$$

Обозначим через α_φ точную верхнюю грань множества всех значений $\alpha>0$, для которых выполнено неравенство (4).

Определение кратномасштабного анализа (КМА) в $L^2(\mathbb{R}_+)$ приведено в работе [8] и полностью аналогично соответствующему определению для пространства $L^2(\mathbb{R})$ (см., например, [1], [2]). Будем говорить, что решение φ уравнения (2) *генерирует* КМА *в* $L^2(\mathbb{R}_+)$, если, во-первых, система $\{\varphi(\cdot\oplus k):k\in\mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и, во-вторых, семейство замкнутых подпространств

$$V_j=\operatorname{clos}_{L^2(\mathbb{R}_+)}\operatorname{span}\{\varphi(2^j\cdot\oplus k):k\in\mathbb{Z}_+\},\qquad j\in\mathbb{Z},$$

является КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

В [8] показано, что равенства

$$b_0=1,\qquad |b_l|^2+|b_{l+2^{n-1}}|^2=1,\quad 0\leqslant l\leqslant 2^{n-1}-1,$$

необходимы для ортонормированности системы $\{\varphi(\cdot\oplus k):k\in\mathbb{Z}_+\}$ в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Для $n=2$ можно принять $b_0=1$, $b_1=\sqrt{1-|b|^2}$, $b_2=0$, $b_3=b$, где $0<|b|<1$, и тогда $\alpha_\varphi=\log_2(1/|b|)$ (см. [8; замечание 3], [11; пример 4.3]).

В общем случае положим $N=2^{n-1}$ и зададим $(N\times N)$-матрицы T_0, T_1 формулами

$$(T_0)_{ij}=c_{2(i-1)\oplus(j-1)},\qquad (T_1)_{ij}=c_{(2i-1)\oplus(j-1)},\quad 1\leqslant i,j\leqslant N, \tag{5}$$

где c_k – коэффициенты уравнения (2).

Предложение 1. *Пусть финитное решение φ уравнения (2) генерирует* КМА *в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и пусть $\widehat{\rho}=\widehat{\rho}(L_0,L_1)$ – совместный спектральный радиус линейных операторов L_0, L_1, заданных на $\mathbb{R}^N$ матрицами T_0, T_1 и ограниченных на подпространство*

$$E_1:=\{u=(u_1,\dots,u_N)^t:u_1+\dots+u_N=0\}.$$

Тогда $\alpha_\varphi=-\log_2\widehat{\rho}$.

Отметим, что при $n = 3$ базис пространства E_1 образуют векторы

$$e_1 = (1, -1, 1, -1)^t, \qquad e_2 = (1, -1, -1, 1)^t, \qquad e_3 = (1, 1, -1, -1)^t \tag{6}$$

и матрицы (5) имеют вид

$$T_0 = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ c_6 & c_7 & c_4 & c_5 \end{pmatrix}, \qquad T_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 & c_3 & c_2 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ c_5 & c_4 & c_7 & c_6 \\ c_7 & c_6 & c_5 & c_4 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Предложение 2. *Для любых $(d \times d)$-матриц A_0, A_1 и для любого $q \geqslant 0$ следующие условия равносильны*:

1) *существуют константы $C > 0$, $p \geqslant 0$ такие, что для всех $m \in \mathbb{N}$ имеем*

$$\max\{\|A_{d_1} \cdots A_{d_m}\| : d_j \in \{0, 1\},\, 1 \leqslant j \leqslant m\} \leqslant C m^p q^m;$$

2) $\widehat{\rho}(A_0, A_1) \leqslant q$.

Более того, если выполнено любое из этих свойств, то всегда можно взять $p \leqslant d - 1$, а если матрицы неприводимы (не имеют нетривиальных действительных общих собственных подпространств), то $p = 0$.

Доказательство предложения 1 полностью аналогично доказательствам соответствующих утверждений в [2] и [12] (см. также [8; замечание 3]), а предложение 2 доказано в [12].

Для произвольной $(N \times N)$-матрицы T положим

$$\|T|_{E_1}\| := \sup\biggl\{\frac{\|Tu\|}{\|u\|} : u \in E_1,\, u \neq 0\biggr\},$$

где $\|u\|$ – евклидова норма вектора u, E_1 – подпространство из предложения 1. Из предложений 1 и 2 следует, что если финитное решение φ уравнения (2) генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и для всех $m \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\max\{\|T_{d_1} T_{d_2} \cdots T_{d_m}|_{E_1}\| : d_j \in \{0, 1\},\, 1 \leqslant j \leqslant m\} \leqslant C m^p q^m,$$

где $0 \leqslant q < 1$, $p \geqslant 0$, то $\widehat{\rho}(L_0, L_1) \leqslant q$.

В ходе компьютерных экспериментов, результаты которых приведены ниже, совместный спектральный радиус матриц вычислялся в системе Matlab 7.0 непосредственно по определению; кроме того, применялся метод оценок величины $\widehat{\rho}$ с помощью произведений Кронекера (см. [2; с. 309], [13]). Отметим также, что гладкость диадического ортогонального всплеска ψ в $L^2(\mathbb{R}_+)$, соответствующего масштабирующей функции φ, совпадает с α_φ (подробнее об этом см. в [8; § 4]).

Основные результаты настоящей работы анонсированы в тезисах нашего доклада [14] на V Международном симпозиуме “Ряды Фурье и их приложения”.

2. Оценки α_φ для $n = 3$. Определим коэффициенты масштабирующего уравнения (2) с помощью формулы (3) по параметрам

$$b_0 = 1, \quad b_1 = a, \quad b_2 = b, \quad b_3 = c, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \alpha, \quad b_6 = \beta, \quad b_7 = \gamma,$$

где $|a|^2+|\alpha|^2=|b|^2+|\beta|^2=|c|^2+|\gamma|^2=1$ (см. [8; пример 4]). В этом случае матрицы линейных операторов L_0 и L_1, заданных на $\mathbb{R}^4$ матрицами (7) и ограниченных на подпространство E_1, имеют в базисе (6) вид

$$A_0=\begin{pmatrix}0&\beta&b\\0&\gamma&c\\\alpha&0&0\end{pmatrix},\qquad A_1=\begin{pmatrix}0&-\beta&b\\0&-\gamma&c\\-\alpha&0&0\end{pmatrix}\tag{8}$$

и при этом $\widehat{\rho}(L_0,L_1)=\widehat{\rho}(A_0,A_1)$. Компьютерными методами получены следующие результаты.

A. Равенство $\widehat{\rho}(A_0,A_1)=\rho(A_0)$ имеет место в случаях:

$$\begin{array}{lrrrr}
1) & 0\leqslant b\leqslant 1, & 0<c\leqslant 1, & 0\leqslant\alpha<1, & 0\leqslant\beta\gamma<1;\\
2) & -1\leqslant b\leqslant 0, & -1\leqslant c<0, & -1<\alpha\leqslant 0, & 0\leqslant\beta\gamma<1;\\
3) & 0\leqslant b\leqslant 1, & -1\leqslant c<0, & 0\leqslant\alpha<1, & -1<\beta\gamma\leqslant 0;\\
4) & -1\leqslant b\leqslant 0, & 0<c\leqslant 1, & -1<\alpha\leqslant 0, & -1<\beta\gamma\leqslant 0.
\end{array}$$

B. Равенство $\widehat{\rho}(A_0,A_1)=\rho(A_1)$ справедливо в случаях:

$$\begin{array}{lrrrr}
1) & 0\leqslant b\leqslant 1, & 0<c\leqslant 1, & -1<\alpha\leqslant 0, & 0\leqslant\beta\gamma<1;\\
2) & -1\leqslant b\leqslant 0, & -1\leqslant c<0, & 0\leqslant\alpha<1, & 0\leqslant\beta\gamma<1;\\
3) & 0\leqslant b\leqslant 1, & -1\leqslant c<0, & -1<\alpha\leqslant 0, & -1<\beta\gamma\leqslant 0;\\
4) & -1\leqslant b\leqslant 0, & 0<c\leqslant 1, & 0\leqslant\alpha<1, & -1<\beta\gamma\leqslant 0.
\end{array}$$

При специальном выборе параметров спектральные радиусы матриц (8) вычисляются особенно просто. Так, например, если $\beta c=\gamma b$, то

$$\rho(A_0)=\max\{|\lambda|:\lambda^2-\gamma\lambda-\alpha b=0\},\qquad \rho(A_1)=\max\{|\lambda|:\lambda^2+\gamma\lambda+\alpha b=0\}.$$

Более того, имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть $\widehat{\rho}$ – совместный спектральный радиус матриц* (8). *Тогда*

$$\widehat{\rho}=\begin{cases}\sqrt[3]{|\alpha|}, & \text{если } b=0,\ |c|=1,\ 0\leqslant|\alpha|<1,\\ \max\{\sqrt{|\alpha|},|\gamma|\}, & \text{если } |b|=1,\ 0\leqslant|\alpha|<1,\ 0\leqslant|\gamma|<1,\\ |\gamma|, & \text{если } |a|=1,\ 0\leqslant|\gamma|<1\end{cases}$$

и при этом $\alpha_\varphi=-\log_2\widehat{\rho}$.

Доказательство. Согласно теореме 3 в [8] данная функция φ генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$, а по предложению 1 имеем $\alpha_\varphi=-\log_2\widehat{\rho}$. Предположим, что $\beta=c=1$. Тогда

$$T_0e_1=-T_1e_1=\alpha e_3,\qquad T_0e_2=-T_1e_2=e_1,\qquad T_0e_3=T_1e_3=e_2.$$

Обозначим через $\operatorname{mod}(m,3)$ остаток при делении m на 3. По индукции проверяется, что

$$T_0^m e_1=\alpha^{[(m+2)/3]}e_{3-\operatorname{mod}(m+2,3)},\qquad m\in\mathbb{N},$$

где $[x]$ – целая часть числа x. Аналогично,

$$T_0^m e_2 = \alpha^{[(m+1)/3]} e_{3-\mathrm{mod}(m+4,3)}, \qquad T_0^m e_3 = \alpha^{[m/3]} e_{3-\mathrm{mod}(m+3,3)}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Отсюда получаем, что

$$\|T_0^m e_j\| \leqslant C|\alpha|^{m/3}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Более того, поскольку $T_0 e_j = \pm T_1 e_j$, аналогичные оценки имеют место для векторов $T_{d_1} T_{d_2} \cdots T_{d_m} e_j$. Поэтому для всех $m \in \mathbb{N}$

$$\|T_{d_1} T_{d_2} \cdots T_{d_m}|_{E_1}\| \leqslant C|\alpha|^{m/3}, \qquad d_1, d_2, \dots, d_m \in \{0, 1\},$$

и справедлива оценка $\widehat{\rho} \leqslant \sqrt[3]{|\alpha|}$ (см. предложение 2).

Докажем обратное неравенство. Известно [8; с. 151], что φ может быть разложена в лакунарный ряд Уолша:

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \frac{1}{4}\chi_{[0,1)}(y)\bigl(1 + a\{&w_1(y) + w_3(y) + w_6(y) + \alpha w_{13}(y) + \alpha w_{27}(y) \\ &+ \alpha w_{54}(y) + \alpha^2 w_{109}(y) + \alpha^2 w_{219}(y) \\ &+ \alpha^2 w_{438}(y) + \alpha^3 w_{877}(y) + \cdots\}\bigr),\end{aligned}$$

где $y = x/4$. Поэтому

$$\varphi(0) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3a}{1-\alpha}\right).$$

Кроме того, если $s = 3k$, то

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) &= \frac{1}{4}(1 + a\{3 + 3\alpha + \cdots + 3\alpha^{(s-3)/3} - \alpha^{s/3} - \alpha^{(s+3)/3} + \cdots\}) \\ &= \frac{1}{4}(1 + a(3 - 4\alpha^{s/3})(1-\alpha)^{-1}).\end{aligned}$$

Далее, если $s = 3k + 1$, то

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) &= \frac{1}{4}(1 + a\{3 + 3\alpha + \cdots + 3\alpha^{(s-4)/3} + \alpha^{(s-1)/3} - \alpha^{(s+2)/3} - \alpha^{(s+5)/3} + \cdots\}) \\ &= \frac{1}{4}(1 + a\{(3(1 - \alpha^{(s-1)/3}) - \alpha^{(s+2)/3})(1-\alpha)^{-1} + \alpha^{(s-1)/3}\})\end{aligned}$$

и если $s = 3k + 2$, то

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) &= \frac{1}{4}(1 + a\{3 + 3\alpha + \cdots + 3\alpha^{(s-2)/3} - \alpha^{(s+1)/3} - \alpha^{(s+4)/3} + \cdots\}) \\ &= \frac{1}{4}(1 + a(3 - 4\alpha^{(s+1)/3})(1-\alpha)^{-1}).\end{aligned}$$

Из приведенных разложений получаем

$$\left|\varphi(0) - \varphi\left(\frac{1}{2^s}\right)\right| \leqslant C|\alpha|^{s/3}, \qquad s \in \mathbb{N},$$

и, следовательно, $\widehat{\rho} \geqslant \sqrt[3]{|\alpha|}$. Случаи $\beta = -1$, $c = 1$, а также $\beta = 1$, $c = -1$ и $\beta = c = -1$ рассматриваются аналогично. Поэтому, если $b = 0$, $|c| = 1$, $0 \leqslant |\alpha| < 1$, то $\widehat{\rho} = \sqrt[3]{|\alpha|}$.

Пусть теперь $b = 1$. Тогда

$$T_0 e_1 = -T_1 e_1 = \alpha e_3, \qquad T_0 e_2 = -T_1 e_2 = \gamma e_2, \qquad T_0 e_3 = T_1 e_3 = e_1 + c e_2.$$

Следовательно, для четного m

$$\begin{gathered}
T_0^m e_1 = \alpha^{m/2}(e_1 + c e_2) + (\gamma^2 \alpha^{m/2-1} + \gamma^4 \alpha^{m/2-2} + \dots + \gamma^{m-2}\alpha) c e_2, \\
T_0^m e_2 = \gamma^m e_2, \qquad T_0^m e_3 = \alpha^{m/2} e_3 + (\gamma \alpha^{m/2-1} + \gamma^3 \alpha^{m/2-2} + \dots + \gamma^{m-1}\alpha) c e_2, \\
\begin{aligned}
\|T_0^m e_1\| &\leqslant C(|\alpha|^{m/2} + |\gamma|^2 |\alpha|^{m/2-1} + |\gamma|^4 |\alpha|^{m/2-2} + \dots + |\gamma|^{m-2}|\alpha|) \\
&\leqslant \begin{cases} Cm|\gamma|^m, & |\alpha| \leqslant |\gamma|^2, \\ Cm|\alpha|^{m/2}, & |\alpha| \geqslant |\gamma|^2, \end{cases}
\end{aligned} \\
\|T_0^m e_2\| \leqslant C|\gamma|^m, \qquad \|T_0^m e_3\| \leqslant \begin{cases} Cm|\gamma|^m, & |\alpha| \leqslant |\gamma|^2, \\ Cm|\alpha|^{m/2}, & |\alpha| \geqslant |\gamma|^2. \end{cases}
\end{gathered}$$

Далее, для нечетного m имеем

$$\begin{gathered}
T_0^m e_1 = \alpha^{(m+1)/2} e_3 + (\gamma \alpha^{(m-1)/2} + \gamma^3 \alpha^{(m-3)/2} + \dots + \gamma^{m-2}\alpha) c e_2, \qquad T_0^m e_2 = \gamma^m e_2, \\
T_0^m e_3 = \alpha^{(m-1)/2}(e_1 + c e_2) + (\gamma^2 \alpha^{(m-3)/2} + \gamma^4 \alpha^{(m-5)/2} + \dots + \gamma^{m-1}\alpha) c e_2
\end{gathered}$$

и, как выше,

$$\begin{gathered}
\begin{aligned}
\|T_0^m e_1\| &\leqslant C(|\alpha|^{(m+1)/2} + |\gamma|\,|\alpha|^{(m-1)/2} + |\gamma|^3 |\alpha|^{(m-3)/2} + \dots + |\gamma|^{m-2}|\alpha|) \\
&\leqslant \begin{cases} Cm|\gamma|^m, & |\alpha| \leqslant |\gamma|^2, \\ Cm|\alpha|^{m/2}, & |\alpha| \geqslant |\gamma|^2, \end{cases}
\end{aligned} \\
\|T_0^m e_2\| \leqslant C|\gamma|^m, \qquad \|T_0^m e_3\| \leqslant \begin{cases} Cm|\gamma|^m, & |\alpha| \leqslant |\gamma|^2, \\ Cm|\alpha|^{m/2}, & |\alpha| \geqslant |\gamma|^2. \end{cases}
\end{gathered}$$

Аналогичные оценки имеют место и для векторов $T_{d_1} T_{d_2} \dots T_{d_m} e_j$. Поэтому верно неравенство

$$\|T_{d_1} T_{d_2} \cdots T_{d_m}|_{E_1}\|^{1/m} \leqslant C m^{1/m} \max\{\sqrt{|\alpha|}, |\gamma|\}, \qquad m \in \mathbb{N},$$

и, следовательно, $\widehat{\rho} \leqslant \max\{\sqrt{|\alpha|}, |\gamma|\}$.

Для доказательства обратного неравенства воспользуемся формулой (5.7) из [8]:

$$\begin{aligned}
4\varphi(x) = 1 + a\bigl(&w_1(y) + w_2(y) + c w_3(y) + \alpha w_5(y) + \gamma c w_7(y) + \alpha w_{10}(y) + \alpha c w_{11}(y) \\
&+ \gamma^2 c w_{15}(y) + \alpha^2 w_{21}(y) + \alpha\gamma c w_{23}(y) + \gamma^3 c w_{31}(y) + \alpha^2 w_{42}(y) \\
&+ \alpha^2 c w_{43}(y) + \alpha\gamma^2 c w_{47}(y) + \gamma^4 c w_{63}(y) + \alpha^3 w_{85}(y) + \alpha^2\gamma c w_{87}(y) \\
&+ \alpha\gamma^3 c w_{95}(y) + \gamma^5 c w_{127}(y) + \alpha^3 w_{170}(y) + \alpha^3 c w_{171}(y) \\
&+ \alpha^2\gamma^2 c w_{175}(y) + \alpha\gamma^4 c w_{191}(y) + \gamma^6 c w_{255}(y) + \alpha^4 w_{341}(y) + \cdots\bigr),
\end{aligned} \tag{9}$$

где $0 \leqslant x < 4$ и $y = x/4$. Подставляя в (9) значение $x = 0$, находим

$$\varphi(0) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{a}{1-\alpha}\left(2 + \frac{c}{1-\gamma}\right)\right).$$

Далее, из формулы (9) следует, что если s четное, то

$$\varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2a}{1-\alpha}\left\{1 - \alpha^{s/2} - c(\alpha^{s/2} + \gamma^2\alpha^{(s-2)/2} + \dots + \alpha\gamma^{s-2}) - \frac{c(\gamma^s - 1/2)}{1-\gamma}\right\}\right),$$

а если s нечетное, то

$$\varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2a}{1-\alpha}\left\{1 - \alpha^{(s+1)/2} - c\gamma(\alpha^{(s-1)/2} + \gamma^2\alpha^{(s-3)/2} + \dots + \alpha\gamma^{s-3}) - \frac{c(\gamma^s - 1/2)}{1-\gamma}\right\}\right).$$

Поэтому

$$\left|\varphi(0) - \varphi\left(\frac{1}{2^s}\right)\right| \leqslant Cs(\max\{\sqrt{|\alpha|}, |\gamma|\})^s, \qquad s \in \mathbb{N},$$

и, значит, $\widehat{\rho} \geqslant \max\{\sqrt{|\alpha|}, |\gamma|\}$. Таким образом, $\widehat{\rho} = \max\{\sqrt{|\alpha|}, |\gamma|\}$. Случай $b = -1$ рассматривается аналогично. Вывод необходимых оценок для случая $|a| = 1$, $0 \leqslant |\gamma| < 1$ содержится в примере 4.4 из [11]. Теорема доказана.

Напомним, что функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ называется *двоично-целой порядка* n, если она постоянна на двоичных интервалах ранга n. Всякая финитная масштабирующая функция в $L^2(\mathbb{R}_+)$ либо является двоично-целой, либо ее гладкость конечна и может быть эффективно оценена сверху (см. [8; § 7]). Отсюда и из теоремы 1 следует, что в случае $\alpha = \gamma = 0$ решение уравнения (2) является двоично-целой функцией (см. также пример 3 в [8]).

3. Оценки α_φ для $n = 4$. Предположим, что коэффициенты масштабирующего уравнения (2) определены с помощью формулы (3) для

$$b_0 = 1, \qquad b_l = d_l, \qquad b_8 = 0, \qquad b_{l+8} = \gamma_l, \quad 1 \leqslant l \leqslant 7, \tag{10}$$

где $|d_l|^2 + |\gamma_l|^2 = 1$. Тогда финитное L^2-решение φ уравнения (2) может быть разложено в лакунарный ряд Уолша

$$\varphi(x) = \frac{1}{8}\chi_{[0,1)}\left(\frac{x}{8}\right)\left(1 + \sum_{l \in \mathbb{N}(4)} a_l w_l\left(\frac{x}{8}\right)\right), \qquad x \in \mathbb{R}_+, \tag{11}$$

(см. [8; § 5], [11; замечание 1.2]). В этом разложении $\mathbb{N}(4) = \{1, 2, \dots, 7\} \cup \mathbb{N}_0(4)$, где $\mathbb{N}_0(4)$ – множество всех натуральных чисел $l > 7$, у которых в двоичном разложении

$$l = \sum_{j=0}^{k} \mu_j 2^j, \qquad \mu_j \in \{0, 1\}, \quad \mu_k \neq 0 \quad k = k(l) \in \mathbb{Z}_+, \tag{12}$$

среди упорядоченных наборов $(\mu_j, \mu_{j+1}, \mu_{j+2}, \mu_{j+3})$ отсутствует набор $(0, 0, 0, 1)$, а коэффициенты a_l определены следующим образом. Пусть

$$\beta(i_1, i_2, i_3, i_4) = b_s, \qquad \text{если} \quad s = i_1 2^0 + i_2 2^1 + i_2 2^2 + i_3 2^3, \quad i_j \in \{0, 1\},$$

где b_s – параметры, заданные по формулам (10). Представим каждое $l \in \mathbb{N}(4)$ в виде (12) и положим

$$
\begin{array}{ll}
a_l = \beta(\mu_0, 0, 0, 0), & \text{если} \quad k(l) = 0; \\
a_l = \beta(\mu_1, 0, 0, 0)\beta(\mu_0, \mu_1, 0, 0, 0), & \text{если} \quad k(l) = 1; \\
\multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\
a_l = \beta(\mu_k, 0, 0, 0)\beta(\mu_{k-1}, \mu_k, 0, 0, 0) \cdots \beta(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3), & \text{если} \quad k = k(l) \geqslant 3.
\end{array}
$$

Отметим, что в последнем произведении индексы каждого множителя, начиная со второго, получаются "сдвигом" индексов предыдущего множителя на одну позицию вправо и добавлением на освободившееся первое место одной новой цифры из двоичного разложения (12) числа l.

В силу нашего выбора параметров b_s маска

$$
m(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{15} c_k w_k(\omega) \tag{13}
$$

удовлетворяет условиям

$$
m(0) = 1, \qquad |m(\omega)|^2 + |m(\omega + 1/2)|^2 = 1 \quad \text{для всех} \;\; \omega \in \mathbb{R}_+. \tag{14}
$$

Предположим, что множество M является объединением некоторых из интервалов $[s/8, (s+1)/8)$, $s = 1, 2, \dots, 7$, или совпадает с одним из них. Если маска (13) обращается в нуль в каждой точке множества

$$
\left(\left\{ \frac{\omega}{2} : \omega \in M \right\} \cup \left\{ \frac{\omega + 1}{2} : \omega \in M \right\} \right) \setminus M,
$$

то множество M называется *блокирующим*. Учитывая (14) и применяя теорему 3 из [8], замечаем, что решение φ уравнения (2) генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$ тогда и только тогда, когда маска (13) не имеет блокирующих множеств. Приведем полный список наборов значений параметров, при которых маска (13) имеет блокирующие множества, и для каждого из этих наборов укажем по одному блокирующему множеству:

1) $d_1 = 0$, $M = [1/8, 1)$,
2) $d_7 = 0$, $M = [7/8, 1)$,
3) $d_2 = d_3 = 0$, $M = [1/4, 1/2) \cup [5/8, 1)$,
4) $d_2 = \gamma_5 = 0$, $M = [1/4, 3/8) \cup [5/8, 3/4)$,
5) $d_3 = d_5 = 0$, $M = [3/8, 1/2) \cup [5/8, 1)$.

Отметим также, что при $n = 4$ векторы

$$
\begin{array}{ll}
e_1 = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1)^t, & e_2 = (1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1)^t, \\
e_3 = (1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1)^t, & e_4 = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)^t, \\
e_5 = (1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1)^t, & e_6 = (1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1)^t, \\
e_7 = (1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1)^t &
\end{array} \tag{15}
$$

образуют базис пространства E_1.

Всюду в дальнейшем T_0 и T_1 – матрицы, определяемые по формулам (3) и (5) при условии (10). Введем матрицы

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & -d_7 & 0 & 0 & d_4 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_7 & 0 & 0 & d_5 & \gamma_5 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_6 - d_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2d_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -d_7 & 0 & 0 & d_4 & -\gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & -\gamma_3 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_7 & 0 & 0 & d_5 & -\gamma_5 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & -\gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_6 - d_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2d_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и обозначим через Γ матрицу размера 7×7, у которой первые шесть столбцов нулевые, а последний столбец совпадает с вектором

$$(\gamma_4 - \gamma_7, -\gamma_3, \gamma_1, \gamma_5 + \gamma_7, -\gamma_2, \gamma_6 - \gamma_7, \gamma_7)^t.$$

Тогда линейные преобразования

$$y = T_0 x, \quad y = T_1 x, \qquad x \in E_1,$$

имеют в базисе (15) матрицы

$$A_0 = B_0 + \frac{1}{2}\Gamma, \qquad A_1 = B_1 - \frac{1}{2}\Gamma$$

соответственно. При условиях предложения 1 справедлива формула $\widehat{\rho}(A_0, A_1) = 2^{-\alpha_\varphi}$. Укажем три случая, когда величина α_φ вычисляется точно.

Теорема 2. *Пусть функция φ задана разложением* (11). *Тогда*

$$1) \quad \alpha_\varphi = \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{|\gamma_2|}, \qquad \text{если} \quad \gamma_2 \neq 0 \quad \text{и} \quad \gamma_1 = \gamma_5 = \gamma_7 = 0;$$

$$2) \quad \alpha_\varphi = \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{|d_5\gamma_2|}, \qquad \text{если} \quad d_5\gamma_2 \neq 0 \quad \text{и} \quad \gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_7 = 0;$$

$$3) \quad \alpha_\varphi = \log_2 \frac{1}{|\gamma_7|}, \qquad \text{если} \quad \gamma_7 \neq 0$$

и выполнено одно из условий:

$$\text{a)} \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0, \qquad \text{b)} \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_5 = 0, \qquad \text{c)} \quad d_5 = \gamma_1 = \gamma_3 = 0.$$

Доказательство. 1^0. Пусть $d_1 = d_5 = d_7 = 1$ и $\gamma_2 \neq 0$. Тогда маска (13) не имеет блокирующих множеств и, следовательно, функция φ генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$. При этом согласно (11) имеем

$$\begin{aligned}8\varphi(x) = \chi_{[0,1)}(y)\bigl(1 &+ w_1(y) + d_2w_2(y) + d_3w_3(y) + d_2d_4w_4(y) + d_2w_5(y) + d_3d_6w_6(y)\\ &+ d_3w_7(y) + d_2\gamma_2w_{10}(y) + d_2\gamma_3w_{11}(y) + d_3d_6\gamma_4w_{12}(y)\\ &+ d_3\gamma_6w_{14}(y) + d_2d_4\gamma_2w_{20}(y) + d_2\gamma_2w_{21}(y) + d_2d_6\gamma_3w_{22}(y)\\ &+ d_2\gamma_3w_{23}(y) + d_3\gamma_4\gamma_6w_{28}(y) + d_2\gamma_2^2w_{42}(y) + d_2\gamma_2\gamma_3w_{43}(y)\\ &+ d_2d_6\gamma_3\gamma_4w_{44}(y) + d_2\gamma_3\gamma_6w_{46}(y) + d_2d_4\gamma_2^2w_{84}(y) + \cdots\bigr),\end{aligned}$$

где $y = x/8$. Положим

$$G_1 := 2+2d_2+2d_3+d_2d_4+d_3d_6+2d_2\gamma_2+2d_2\gamma_3+d_3d_6\gamma_4+d_3\gamma_6+d_2d_4\gamma_3+d_2d_6\gamma_3+d_3\gamma_4\gamma_6.$$

Тогда

$$8\varphi(0) = G_1 + \frac{d_2}{1-\gamma_2}(2\gamma_2^2 + 2\gamma_2\gamma_3 + d_6\gamma_3\gamma_4 + \gamma_3\gamma_6 + d_4\gamma_2^2 + d_6\gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_4\gamma_6).$$

Кроме того, для любого нечетного $s \geqslant 5$

$$\begin{aligned}8\varphi\biggl(\frac{1}{2^s}\biggr) = G_1 + \frac{d_2}{1-\gamma_2}\bigl((\gamma_2^2 + \gamma_2\gamma_3 + d_6\gamma_3\gamma_4 + \gamma_3\gamma_6)(1 - 2\gamma_2^{(s-3)/2})&\\ + (\gamma_2^2 + d_4\gamma_2^2 + d_6\gamma_2\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_4\gamma_6)\bigr)&,\end{aligned}$$

а для любого четного $s \geqslant 6$

$$\begin{aligned}8\varphi\biggl(\frac{1}{2^s}\biggr) = G_1 + \frac{d_2}{1-\gamma_2}\bigl(\gamma_2^2 + \gamma_2\gamma_3 + d_6\gamma_3\gamma_4 + \gamma_3\gamma_6&\\ + (\gamma_2^2 + d_4\gamma_2^2 + d_6\gamma_2\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_4\gamma_6)(1 - 2\gamma_2^{(s-4)/2})\bigr)&.\end{aligned}$$

Поэтому $|\varphi(0) - \varphi(1/2^s)| \leqslant C|\gamma_2|^{s/2}$, и, значит, $\alpha_\varphi \leqslant (1/2)\log_2(1/|\gamma_2|)$. Для доказательства обратного неравенства заметим, что для векторов (15) и для любых i, j, k, $l \in \{0,1\}$

$$T_ie_1 = T_iT_jT_kT_le_2 = 0, \qquad T_ie_4 = \pm(\gamma_3e_2 + \gamma_2e_5), \qquad T_iT_je_5 = \pm T_ie_4.$$

Следовательно, $\|T_{d_1}T_{d_2}\cdots T_{d_m}e_i\| \leqslant C|\gamma_2|^{m/2}$ для $i = 1, 2, 4, 5$. Далее, для всех i, j, $k, l \in \{0,1\}$ имеют место равенства

$$T_iT_je_6 = 0, \qquad T_ie_3 = d_3e_2 + d_2e_5,$$
$$T_iT_jT_kT_le_4 = \pm\gamma_2^2(d_4e_1 + e_4) + \gamma_3(T_iT_jT_ke_2 \pm \gamma_2T_ie_2), \qquad T_iT_jT_ke_7 = \pm\frac{1}{2}T_iT_je_4.$$

Пользуясь этими равенствами, для произвольного вектора $w \in E_1$ и любых $d_1, d_2, \dots$, $d_m \in \{0,1\}$ получаем

$$\|T_{d_1}T_{d_2}\cdots T_{d_m}w\| \leqslant C|\gamma_7|^m\|w\|.$$

Поэтому для любого $m \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\|T_{d_1}T_{d_2}\cdots T_{d_m}|_{E_1}\| \leqslant C|\gamma_2|^{m/2}$$

и по предложению 2 $\alpha_\varphi \geqslant (1/2)\log_2(1/|\gamma_2|)$. Таким образом, если $d_1 = d_5 = d_7 = 1$ и $\gamma_2 \neq 0$, то $\alpha_\varphi = (1/2)\log_2(1/|\gamma_2|)$.

2^0. Пусть $d_1 = d_3 = d_7 = 1$ и $d_5\gamma_2 \neq 0$. Тогда маска (13) не имеет блокирующих множеств и функция φ генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Более того, согласно (11)

$$\begin{aligned}8\varphi(x) = \chi_{[0,1)}(y)\bigl(1 &+ w_1(y) + d_2w_2(y) + w_3(y) + d_2d_4w_4(y) + d_2d_5w_5(y) + d_6w_6(y)\\ &+ w_7(y) + d_2d_5\gamma_2w_{10}(y) + d_6\gamma_4w_{12}(y) + d_6\gamma_5w_{13}(y) + \gamma_6w_{14}(y)\\ &+ d_2d_4d_5\gamma_2w_{20}(y) + d_2d_5^2\gamma_2w_{21}(y) + d_6\gamma_2\gamma_5w_{26}(y) + \gamma_4\gamma_6w_{28}(y)\\ &+ \gamma_5\gamma_6w_{29}(y) + d_2d_5^2\gamma_2^2w_{42}(y) + d_4d_6\gamma_2\gamma_5w_{52}(y)\\ &+ d_5d_6\gamma_2\gamma_5w_{53}(y) + \gamma_2\gamma_5\gamma_6w_{58}(y) + d_2d_4d_5^2\gamma_2^2w_{84}(y) + \cdots\bigr),\end{aligned}$$

где $y = x/8$. Положим

$$\begin{aligned}G_2 := 4 &+ d_2 + d_2d_4 + d_2d_5 + d_6 + d_2d_5\gamma_2 + d_6\gamma_4 + d_6\gamma_5\\ &+ \gamma_6 + d_2d_4d_5\gamma_2 + d_2d_5^2\gamma_2 + d_6\gamma_2\gamma_5 + \gamma_4\gamma_6 + \gamma_5\gamma_6.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}8\varphi(0) = G_2 + \frac{\gamma_2}{1-d_5\gamma_2}(&d_2d_5^2\gamma_2 + d_2\gamma_4d_5^2\gamma_2 + d_2d_5^3\gamma_2 + d_4d_6\gamma_5\\ &+ d_5d_6\gamma_5 + \gamma_5\gamma_6 + d_5d_6\gamma_2\gamma_5 + d_4\gamma_5\gamma_6 + d_5\gamma_5\gamma_6).\end{aligned}$$

Для любого нечетного $s \geqslant 5$

$$\begin{aligned}8\varphi\biggl(\frac{1}{2^s}\biggr) = G_2 + \frac{\gamma_2}{1-d_5\gamma_2}&(d_2d_5^2\gamma_2 + \gamma_5\gamma_6 + d_5d_6\gamma_2\gamma_5)\\ &\times(1 - 2(d_5\gamma_2)^{(s-3)/2} + 2(d_5\gamma_2)^{(s-3)/2})\\ &+ (d_4d_6\gamma_5 + d_5d_6\gamma_5 + d_4\gamma_5\gamma_6 + d_5\gamma_5\gamma_6)\\ &\times(1 - 2(d_5\gamma_2)^{(s-1)/2} + d_2d_4d_5^2\gamma_2 + d_2d_5^3\gamma_2).\end{aligned}$$

Для любого четного $s \geqslant 6$

$$\begin{aligned}8\varphi\biggl(\frac{1}{2^s}\biggr) = G_2 + \frac{\gamma_2}{1-d_5\gamma_2}\bigl(&d_2d_5^2\gamma_2 + (d_4d_6\gamma_5 + d_5d_6\gamma_5)(1 - 2(d_5\gamma_2)^{(s-2)/2})\\ &+ (d_2d_4d_5^2\gamma_2 + d_2d_5^3\gamma_2 + d_4\gamma_5\gamma_6 + d_5\gamma_5\gamma_6)\\ &\quad\times(1 - 2(d_5\gamma_2)^{(s-4)/2})\\ &+ \gamma_5\gamma_6(1 - 2(d_5\gamma_2)^{(s-2)/2} + 2(d_5\gamma_2)^{s/2})\\ &+ d_5d_6\gamma_2\gamma_5(1 - 2(d_5\gamma_2)^{(s-4)/2}) + 2(d_5\gamma_2)^{(s-2)/2}\bigr).\end{aligned}$$

Поэтому $|\varphi(0) - \varphi(1/2^s)| \leqslant C|d_5\gamma_2|^{s/2}$ и $\alpha_\varphi \leqslant (1/2)\log_2(1/|d_5\gamma_2|)$. Заметим теперь, что для векторов (15) и любых $i, j \in \{0,1\}$

$$T_ie_1 = 0, \qquad T_iT_je_5 = \pm\gamma_2d_5e_5, \qquad T_ie_4 = \pm\gamma_2e_5,$$

а для $i = 1, 4, 5$ верна оценка

$$\|T_{d_1}T_{d_2}\cdots T_{d_m}e_i\| \leqslant C|d_5\gamma_2|^{m/2}.$$

Кроме того, для всех $i, j, k, l \in \{0,1\}$ имеют место равенства

$$T_iT_jT_kT_le_2 = \pm\gamma_2 d_5 T_ie_4 \pm (d_6-1)\gamma_2\gamma_5 T_ie_5 + T_iT_jT_ke_7, \qquad T_ie_3 = e_2 + d_2e_5,$$
$$T_iT_je_6 = \pm\gamma_5 T_ie_4, \qquad T_iT_jT_ke_7 = \pm\frac{1}{2}(\pm\gamma_2\gamma_5 T_ie_5 + (\pm\gamma_5\gamma_6 - d_5)T_ie_4).$$

Пользуясь этими равенствами, для произвольного вектора $w \in E_1$ и любых $d_1, d_2, \dots, d_m \in \{0,1\}$ получаем

$$\|T_{d_1}T_{d_2}\cdots T_{d_m}w\| \leqslant C|\gamma_7|^m\|w\|.$$

Значит, для любого $m \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\|T_{d_1}T_{d_2}\cdots T_{d_m}|_{E_1}\| \leqslant C|d_5\gamma_2|^{m/2}$$

и по предложению 2 $\alpha_\varphi \geqslant (1/2)\log_2(1/|d_5\gamma_2|)$. Таким образом, если $d_1 = d_3 = d_7 = 1$ и $d_5\gamma_2 \neq 0$, то $\alpha_\varphi = (1/2)\log_2(1/|d_5\gamma_2|)$.

3^0. Пусть $d_1 = d_2 = d_3 = 1$ и $\gamma_7 \neq 0$. Тогда маска (13) не имеет блокирующих множеств и функция φ генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Применяя формулу (11), имеем

$$\begin{aligned}8\varphi(x) = \chi_{[0,1)}(y)\bigl(1 &+ w_1(y) + w_2(y) + w_3(y) + d_4w_4(y) + d_5w_5(y) + d_6w_6(y) + d_7w_7(y)\\ &+ d_6\gamma_4w_{12}(y) + d_6\gamma_5w_{13}(y) + d_7\gamma_6w_{14}(y) + d_7\gamma_7w_{15}(y)\\ &+ d_7\gamma_4\gamma_6w_{28}(y) + d_7\gamma_5\gamma_6w_{29}(y) + d_7\gamma_6\gamma_7w_{30}(y) + d_7\gamma_7^2w_{31}(y)\\ &+ d_7\gamma_4\gamma_6\gamma_7w_{60}(y) + d_7\gamma_5\gamma_6\gamma_7w_{61}(y) + d_7\gamma_6\gamma_7^2w_{62}(y)\\ &+ d_7\gamma_7^3w_{63}(y) + d_7\gamma_4\gamma_6\gamma_7^2w_{124}(y) + d_7\gamma_5\gamma_6\gamma_7^2w_{125}(y) + \cdots\bigr),\end{aligned}$$

где $y = x/8$. Положим

$$G_3 := 4 + d_4 + d_5 + d_6 + d_6\gamma_4 + d_6\gamma_5.$$

Тогда

$$8\varphi(0) = G_3 + \frac{d_7}{1-\gamma_7}(1 + \gamma_6(1 + \gamma_4 + \gamma_5)).$$

Кроме того, для любого целого $s \geqslant 2$

$$8\varphi\biggl(\frac{1}{2^s}\biggr) = G_3 + \frac{d_7}{1-\gamma_7}\bigl(1 - 2\gamma_7^s + (1-2\gamma_7^{s-2})(d_6\gamma_5 + \gamma_4\gamma_6) + \gamma_6(1-2\gamma_7^{s-1})\bigr).$$

Поэтому $|\varphi(0) - \varphi(1/2^s)| \leqslant C|\gamma_7|^s$. Для всех $i, j, k \in \{0,1\}$ справедливы равенства

$$T_iT_jT_ke_1 = T_iT_jT_ke_4 = T_iT_jT_ke_5 = T_iT_jT_ke_6 = 0,$$
$$T_iT_jT_ke_2 = \pm d_7\gamma_7T_iT_je_7, \qquad T_iT_jT_ke_3 = (d_6-d_7)(\gamma_4e_1 + \gamma_5e_4) + 2d_7T_ie_7,$$
$$T_iT_jT_ke_7 = \pm\gamma_7T_iT_je_7, \qquad T_iT_je_7 = \pm\frac{1}{2}(\pm(\gamma_6-\gamma_7)(\gamma_4e_1 + \gamma_5e_4) + 2\gamma_7T_ie_7).$$

Следовательно, для произвольного вектора $w \in E_1$ и любых $d_1, d_2, \dots, d_m \in \{0,1\}$

$$\|T_{d_1}T_{d_2}\cdots T_{d_m}w\| \leqslant C|\gamma_7|^m\|w\|.$$

Поэтому для любого $m \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$\|T_{d_1}T_{d_2}\cdots T_{d_m}|_{E_1}\| \leqslant C|\gamma_7|^m$$

и по предложению 2 $\alpha_\varphi \geqslant \log_2(1/|\gamma_7|)$. Таким образом, если $d_1 = d_2 = d_3 = 1$ и $\gamma_7 \neq 0$, то $\alpha_\varphi = \log_2(1/|\gamma_7|)$.

4^0. Пусть $d_1 = d_2 = d_5 = 1$ и $\gamma_7 \neq 0$. Тогда маска (13) не имеет блокирующих множеств и функция φ генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$. При этом

$$\begin{aligned}8\varphi(x) = \chi_{[0,1)}(y)\bigl(1 &+ w_1(y) + w_2(y) + d_3w_3(y) + d_4w_4(y) + w_5(y) + d_3d_6w_6(y)\\ &+ d_3d_7w_7(y) + \gamma_3w_{11}(y) + d_3d_6\gamma_4w_{12}(y) + d_3d_7\gamma_6w_{14}(y)\\ &+ d_3d_7\gamma_7w_{15}(y) + d_6\gamma_3w_{22}(y) + d_7\gamma_3w_{23}(y) + d_3d_7\gamma_4\gamma_6w_{28}(y)\\ &+ d_3d_7\gamma_6\gamma_7w_{30}(y) + d_3d_7\gamma_7^2w_{31}(y) + d_6\gamma_3\gamma_4w_{44}(y)\\ &+ d_7\gamma_3\gamma_6w_{46}(y) + d_7\gamma_3\gamma_7w_{47}(y) + d_3d_7\gamma_4\gamma_6\gamma_7w_{60}(y)\\ &+ d_3d_7\gamma_6\gamma_7^2w_{62}(y) + \cdots\bigr),\end{aligned}$$

где $y = x/8$. Пусть

$$\begin{aligned}G_4 := 4 &+ d_3 + d_4 + d_3d_6 + d_3d_7 + \gamma_3 + d_3d_6\gamma_4 + d_3d_7\gamma_6 + d_3d_7\gamma_7\\ &+ d_6\gamma_3 + d_7\gamma_3 + d_3d_7\gamma_4\gamma_6 + d_3d_7\gamma_6\gamma_7 + d_3d_7\gamma_7^2 + d_6\gamma_3\gamma_4\\ &+ d_7\gamma_3\gamma_6 + d_7\gamma_3\gamma_7 + d_3d_7\gamma_4\gamma_6\gamma_7 + d_3d_7\gamma_6\gamma_7^2.\end{aligned}$$

Тогда

$$8\varphi(0) = G_4 + \frac{d_7}{1-\gamma_7}(d_3\gamma_7^3 + \gamma_3\gamma_4\gamma_6 + \gamma_3\gamma_6\gamma_7 + \gamma_3\gamma_7^2 + d_3\gamma_4\gamma_6\gamma_7^2 + d_3\gamma_6\gamma_7^3).$$

Для любого целого $s \geqslant 5$

$$\begin{aligned}8\varphi\biggl(\frac{1}{2^s}\biggr) = G_4 + \frac{d_7}{1-\gamma_7}\bigl(&d_3\gamma_7^3(1-2\gamma_7^{s-3})\\ &+ \gamma_3(\gamma_4\gamma_6 + \gamma_6\gamma_7 + \gamma_7^2)(1 - 2\gamma_7^{s-4} + 2\gamma_7^{s-3} - 2\gamma_7^{s-2})\\ &+ d_3\gamma_6\gamma_7^2(\gamma_4 + \gamma_7)(1-2\gamma_7^{s-4})\bigr).\end{aligned}$$

Отсюда видно, что $|\varphi(0) - \varphi(1/2^s)| \leqslant C|\gamma_7|^s$ и, значит, $\alpha_\varphi \leqslant \log_2(1/|\gamma_7|)$. Далее, как выше, для любых $i, j, k \in \{0,1\}$

$$\begin{gathered}T_ie_1 = T_iT_je_6 = 0, \qquad T_iT_jT_ke_2 = \pm d_7\gamma_3T_ie_2 + 2d_7T_iT_je_7,\\ T_iT_jT_ke_3 = d_3T_iT_je_2 \pm \gamma_3e_2, \qquad T_ie_4 = T_iT_je_5 = \pm\gamma_3e_2,\\ T_iT_je_7 = \pm\frac{1}{2}(\gamma_3T_ie_2 + \gamma_7T_ie_4 \pm (\gamma_6-\gamma_7)\gamma_4e_1 + \gamma_7T_ie_7).\end{gathered}$$

Отсюда для произвольного вектора $w \in E_1$ и любых $d_1, d_2, \dots, d_m \in \{0,1\}$ получаем

$$\|T_{d_1}T_{d_2}\cdots T_{d_m}w\| \leqslant C|\gamma_7|^m\|w\|.$$

Следовательно, для любого $m \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\|T_{d_1}T_{d_2}\cdots T_{d_m}|_{E_1}\| \leqslant C|\gamma_7|^m$$

и по предложению 2 $\alpha_\varphi \geqslant \log_2(1/|\gamma_7|)$. Таким образом, если $d_1 = d_2 = d_5 = 1$ и $\gamma_7 \neq 0$, то $\alpha_\varphi = \log_2(1/|\gamma_7|)$.

5^0. Пусть $d_1 = d_3 = \gamma_5 = 1$ и $\gamma_7 \neq 0$. Тогда маска (13) не имеет блокирующих множеств и функция φ генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Кроме того,

$$\begin{aligned}8\varphi(x) = \chi_{[0,1)}(y)\bigl(1 &+ w_1(y) + d_2w_2(y) + w_3(y) + d_2d_4w_4(y) + d_6w_6(y) + d_7w_7(y)\\ &+ d_6\gamma_4w_{12}(y) + d_6w_{13}(y) + d_7\gamma_6w_{14}(y) + d_7\gamma_7w_{15}(y)\\ &+ d_6\gamma_2w_{26}(y) + d_7\gamma_4\gamma_6w_{28}(y) + d_7\gamma_6w_{29}(y) + d_7\gamma_6\gamma_7w_{30}(y)\\ &+ d_7\gamma_7^2w_{31}(y) + d_4d_6\gamma_2w_{52}(y) + d_7\gamma_2\gamma_6w_{58}(y) + d_7\gamma_4\gamma_6\gamma_7w_{60}(y)\\ &+ d_7\gamma_6\gamma_7w_{61}(y) + d_7\gamma_6\gamma_7^2w_{62}(y) + \cdots\bigr),\end{aligned}$$

где $y = x/8$. Положим

$$\begin{aligned}G_5 := 3 &+ d_2 + d_2d_4 + 2d_6 + d_7 + d_6\gamma_4 + 2d_7\gamma_6 + d_7\gamma_7 + d_6\gamma_2 + d_7\gamma_4\gamma_6\\ &+ d_7\gamma_6\gamma_7 + 2d_7\gamma_7^2 + d_4d_6\gamma_2 + d_7\gamma_2\gamma_6 + d_7\gamma_4\gamma_6\gamma_7 + d_7\gamma_6\gamma_7^2.\end{aligned}$$

Тогда

$$8\varphi(0) = G_5 + \frac{d_7}{1-\gamma_7}(\gamma_7^3 + d_4\gamma_2\gamma_6 + \gamma_2\gamma_6\gamma_7 + \gamma_4\gamma_6\gamma_7^2 + \gamma_6\gamma_7^2 + \gamma_6\gamma_7^3).$$

Для любого $s \geqslant 5$ имеем

$$8\varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) = G_5 + \frac{d_7}{1-\gamma_7}\bigl(\gamma_7^3(1-\gamma_7^{s-3}) + \gamma_6(d_4\gamma_2 + \gamma_2\gamma_7 + \gamma_4\gamma_7^2 + \gamma_7^2 + \gamma_7^3)(1-2\gamma_7^{s-4})\bigr),$$

и верна оценка $|\varphi(0) - \varphi(1/2^s)| \leqslant C|\gamma_7|^s$. Значит, $\alpha_\varphi \leqslant \log_2(1/|\gamma_7|)$. Далее,

$$\begin{gathered}T_ie_1 = T_iT_jT_ke_4 = T_iT_je_5 = T_iT_jT_kT_le_6 = 0,\\ T_ie_2 = -d_7e_1 + d_7e_4 + (d_6 - d_7)e_6 + 2d_7, \qquad T_ie_3 = e_2 + d_2e_6,\\ T_ie_7 = \pm\frac{1}{2}((\gamma_4 - \gamma_7)e_1 - (\gamma_7 + 1)e_4 - \gamma_2e_5 + (\gamma_6 - \gamma_7)e_6 + \gamma_7e_7).\end{gathered}$$

Поэтому для произвольного вектора $w \in E_1$ и любых $d_1, d_2, \dots, d_m \in \{0,1\}$ верна оценка

$$\|T_{d_1}T_{d_2}\cdots T_{d_m}w\| \leqslant C|\gamma_7|^m\|w\|,$$

и для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|T_{d_1}T_{d_2}\cdots T_{d_m}|_{E_1}\| \leqslant C|\gamma_7|^m.$$

Пользуясь предложением 2, отсюда выводим оценку $\alpha_\varphi \geqslant \log_2(1/|\gamma_7|)$. Таким образом, если $\gamma_5 = d_1 = d_3 = 1$ и $\gamma_7 \neq 0$, то $\alpha_\varphi = \log_2(1/|\gamma_7|)$. Теорема доказана.

Укажем в заключение три случая, когда $\widehat{\rho}(A_0, A_1) = 0$ и решение уравнения (2) является двоично-целой функцией. Пусть $y = x/8$ и $x \in [0,8)$. Тогда, полагая

$$W(y) := w_1(y) + d_2w_2(y) + d_3w_3(y) + d_2d_4w_4(y) + d_3d_6w_6(y) + d_3d_7w_7(y),$$

получаем из формулы (11) следующие три разложения.

1) Если $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_7 = 0$, то

$$\begin{aligned}8\varphi(x) = 1 + d_1\{W(y) &+ d_2d_5w_5(y) + d_3d_6\gamma_4w_{12}(y) + d_3d_6\gamma_5w_{13}(y)\\ &+ d_3d_7\gamma_6w_{14}(y) + d_3d_7\gamma_4\gamma_6w_{28}(y) + d_3d_7\gamma_5\gamma_6w_{29}(y)\}.\end{aligned}$$

2) Если $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_5=\gamma_7=0$, то

$$\begin{aligned}8\varphi(x)=1+d_1\{W(y)&+d_2d_5w_5(y)+d_2d_5\gamma_3w_{11}(y)+d_3d_6\gamma_4w_{12}(y)\\&+d_3d_7\gamma_6w_{14}(y)+d_2d_5d_6\gamma_3w_{22}(y)+d_2d_5d_7\gamma_3w_{23}(y)\\&+d_3d_7\gamma_4\gamma_6w_{28}(y)+d_2d_5d_6\gamma_3\gamma_4w_{44}(y)\\&+d_2d_5d_7\gamma_3\gamma_6w_{46}(y)+d_2d_5d_7\gamma_3\gamma_4\gamma_6w_{92}(y)\}.\end{aligned}$$

3) Если $d_5=\gamma_1=\gamma_3=\gamma_7=0$, то

$$\begin{aligned}8\varphi(x)=1+d_1\{W(y)&+d_3d_6\gamma_4w_{12}(y)+d_3d_7\gamma_6w_{14}(y)+d_3d_6\gamma_2\gamma_5w_{26}(y)\\&+d_3d_7\gamma_4\gamma_6w_{28}(y)+d_3d_7\gamma_5\gamma_6w_{29}(y)+d_3d_4d_6\gamma_2\gamma_5w_{52}(y)\\&+d_3d_7\gamma_2\gamma_5\gamma_6w_{58}(y)+d_3d_4d_7\gamma_2\gamma_5\gamma_6w_{116}(y)\}.\end{aligned}$$

Авторы благодарят В. Ю. Протасова за полезные обсуждения результатов данной статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам*, РХД, Ижевск, 2001.

[2] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.

[3] I. Daubechies, J. C. Lagarias, “Two-scale difference equations II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals”, *SIAM J. Math. Anal.*, **23**:4 (1992), 1031–1079.

[4] D. Colella, C. Heil, “Characterization of scaling functions. Continuous solutions”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **15**:2 (1994), 496–518.

[5] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.

[6] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Adam Hilger, Bristol, 1990.

[7] Б. И. Голубов, *Элементы двоичного анализа*, Изд-во ЛКИ, М., 2007.

[8] В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков, “Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой”, *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 129–160.

[9] W. C. Lang, “Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group”, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **21**:2 (1998), 307–314.

[10] Ю. А. Фарков, “Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп”, *Матем. заметки*, **82**:6 (2007), 934–952.

[11] Ю. А. Фарков, “Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 193–220.

[12] В. Ю. Протасов, “Фрактальные кривые и всплески”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:5 (2006), 123–162.

[13] В. Ю. Протасов, “Обобщенный совместный спектральный радиус. Геометрический подход”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:5 (1997), 99–136.

[14] Е. А. Родионов, Ю. А. Фарков, “Об оценках гладкости диадических вейвлетов на полупрямой”, *Тезисы докладов V Международного симпозиума “Ряды Фурье и их приложения”* (27 мая–3 июня, 2008), Изд-во ЦВВР, Ростов-на-Дону, 2008, 48–49.

Е. А. Родионов
Российский государственный геологоразведочный университет
E-mail: evgeny_980@list.ru

Ю. А. Фарков
Российский государственный геологоразведочный университет
E-mail: farkov@list.ru

Поступило
23.07.2008
Исправленный вариант
20.01.2009