Ш. Галандарзаде, З. Хощере, n-Расширенные квазибэровские кольца, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 6, 826–839

DOI: 10.4213/mzm4732

Математические заметки

Том 85 выпуск 6 июнь 2009

УДК 512.552

n-Расширенные квазибэровские кольца

Ш. Галандарзаде, Ф. Заре Хощере

Кольцо с единицей называется n-расширенным квазибэровским кольцом (относительно главных идеалов), если для любых собственных (главных) правых идеалов $I_1, \dots, I_n$, где $n \geqslant 2$, правый аннулятор произведения $I_1 \cdots I_n$ порожден идемпотентом. Кольцо с единицей называется n-расширенным правым (левым) PP-кольцом, если правый (соответственно левый) аннулятор произведения $x_1 \cdots x_n$, где $n \geqslant 2$, порожден идемпотентом для любых неединичных элементов $x_1, \dots, x_n$. Рассматривается поведение n-расширенных правых (главных) квазибэровских колец относительно правых PP-колец при применении различных конструкций и расширений. Эти классы колец замкнуты относительно прямых произведений и эквивалентностей Мориты. Приводятся примеры, которые иллюстрируют саму теорию и намечают ее границы.

Библиография: 3 названия.

1. Введение. В этой статье под кольцами всегда подразумеваются ассоциативные кольца с единицей и все модули предполагаются унитальными. Кольцо R называется *правым* (*левым*) PP-*кольцом*, если правый (соответственно левый) аннулятор любого элемента R порожден идемпотентом. Кольцо R называется *обобщенным правым* (*левым*) PP-*кольцом*, если для любого $x \in R$ найдется натуральное число n такое, что правый (левый) аннулятор элемента x^n порожден идемпотентом. Для заданного натурального n кольцо R называется *n-обобщенным правым* (*левым*) PP-*кольцом*, если для любого $x \in R$ правый (соответственно левый) аннулятор элемента x^n порожден идемпотентом.

Кольцо R называется *квазибэровским*, если правый аннулятор каждого непустого подмножества R (правого идеала) порожден идемпотентом как правый идеал. Кольцо R называется *квазибэровским относительно правых главных идеалов*, если правые аннуляторы правых главных идеалов порождены идемпотентами. Аналогично определяются *квазибэровские кольца относительно левых главных идеалов*. Будем говорить, что кольцо R является *обобщенным квазибэровским относительно правых* (*главных*) *идеалов*, если для любого правого (главного) идеала I в кольце R найдется такое натуральное n (зависящее от I), что правый аннулятор идеала I^n порожден идемпотентом. Мы говорим, что кольцо R является *n-обобщенным квазибэровским относительно правых* (*главных*) *идеалов* для данного натурального n, если для любого правого (главного) идеала I в кольце R правый аннулятор идеала I^n порожден идемпотентом. *Квазибэровские* и *обобщенные квазибэровские кольца относительно левых идеалов* определяются аналогично.

В этой статье вводятся новые понятия n-расширенных квазибэровских колец (относительно главных идеалов) и n-расширенных PP-колец. Мы докажем ряд специальных теорем и утверждений; например, одна из теорем гласит, что кольцо эндоморфизмов конечно порожденного проективного модуля над n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов само является n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов; в частности, свойство быть n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов инвариантно относительно эквивалентностей Мориты. Центр n-расширенного квазибэровского кольца относительно правых (главных) идеалов и правого PP-кольца является n-расширенным PP-кольцом.

2. Предварительные сведения и примеры. Пусть R – кольцо. Идемпотент $e \in R$ называется *левым* (*правым*) *полуцентральным идемпотентом*, если $xe = exe$ ($ex = exe$) для всех $x \in R$ (это понятие ввел Биркенмейер в 1983 г). Мы используем обозначения $Z(R)$, $B(R)$, $S_l(R)$ и $\mathrm{Mat}_n(R)$ для центра кольца R, множества всех центральных идемпотентов в R, множества всех левых полуцентральных идемпотентов в R и кольца матриц размера $n \times n$ над R соответственно. Для непустого подмножества X кольца R правый (левый) аннулятор множества X над R обозначается через $r_R(X)$ (соответственно $l_R(X)$). Когда из контекста ясно, о каком кольце идет речь, мы опускаем индекс. Символы $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_n$ обозначают кольца целых чисел и вычетов по модулю n соответственно. Кольцо R называется *абелевым*, если любой идемпотент в этом кольце централен. Очевидно, если R – абелево или полупростое кольцо, то $S_l(R) = B(R)$; обратное неверно [1; предложение 1.17].

Предложение 1. *Пусть R – кольцо и $n \geqslant 2$ – целое. Тогда R является квазибэровским относительно правых идеалов, если и только если правый аннулятор произведения $I_1 \cdots I_n$ порожден идемпотентом для любых правых идеалов $I_1, \dots, I_n$ в кольце R.*

Доказательство. Пусть R – квазибэровское кольцо относительно правых идеалов. Тогда аннулятор $r_R(I)$ порожден идемпотентом для любого правого идеала I в R. Пусть $I_1, \dots, I_n$ – правые идеалы в кольце R. Поскольку произведение $I_1 \cdots I_n$ тоже является правым идеалом в R, имеем $r_R(I_1 \cdots I_n) = eR$ для некоторого идемпотента e в R.

Обратно, покажем, что $r_R(I_1 \cdots I_n) = eR$ для любых правых идеалов $I_1, \dots, I_n$ в кольце R. Пусть I – правый идеал в R, и пусть $I_1 = I$ и $I_j = R$ для $j = 2, \dots, n$. Тогда $r_R(I) = r_R(IR \cdots R) = eR$ для некоторого $e^2 = e \in R$, а значит, кольцо R является квазибэровским относительно правых идеалов.

Предложение 2. *Пусть R – кольцо, $n \geqslant 2$ – целое число и правый аннулятор произведения $I_1 \cdots I_n$ порожден идемпотентом для любых правых главных идеалов $I_1, \dots, I_n$ в кольце R. Тогда R является квазибэровским кольцом относительно правых главных идеалов.*

Доказательство стандартно.

То же самое верно и для квазибэровских колец относительно левых (главных) идеалов, а значит, и для квазибэровских колец (относительно главных идеалов).

Определение 1. Пусть R – кольцо и $n \geqslant 2$ – целое. Кольцо R называется *n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых* (*главных*) *идеалов*, если для любых собственных правых (главных) идеалов $I_1, I_2, \dots, I_n$ в кольце R правый аннулятор произведения $I_1 I_2 \cdots I_n$ порожден идемпотентом. Аналогично определяется *n-расширенное квазибэровское кольцо относительно левых идеалов*.

Кольцо R называется *n-расширенным квазибэровским кольцом* (*относительно главных идеалов*), если оно является n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых и левых (главных) идеалов.

Предложение 3. *Пусть $n \geqslant 2$ – целое число. Кольцо R является правым* PP*-кольцом, если и только если правый аннулятор произведения $x_1 \cdots x_n$ порожден идемпотентом для любых n элементов $x_1, \dots, x_n$ кольца R.*

Доказательство. Пусть R – правое PP-кольцо. Поскольку произведение $x_1 \cdots x_n$ любых n элементов $x_1, \dots, x_n$ кольца R само является элементом кольца R, правый аннулятор произведения $x_1 \cdots x_n$ порожден идемпотентом.

Обратно, покажем, что аннулятор $r_R(x_1 \cdots x_n)$ порожден идемпотентом для любых n элементов $x_1, \dots, x_n$ кольца R. Возьмем $x \in R$. Положим $x_1 = x$ и $x_j = 1$ для $j = 2, \dots, n$. Тогда $r_R(x) = r_R(x1 \cdots 1) = eR$ для некоторого идемпотента e в кольце R. Значит, R является правым PP-кольцом.

То же утверждение верно для левых PP-колец и, следовательно, для PP-колец.

Определение 2. Пусть $n \geqslant 2$ – целое число. Кольцо R называется *n-расширенным правым* PP*-кольцом*, если для любых неединичных элементов $x_1, \dots, x_n$ кольца R правый аннулятор произведения $x_1 \cdots x_n$ порожден идемпотентом. *n-Расширенное левое* PP*-кольцо* определяется аналогично.

Кольцо R называется *n-расширенным* PP*-кольцом*, если оно одновременно является n-расширенным правым и левым PP-кольцом.

Следующий пример демонстрирует разницу между n-расширенными и $(n-1)$-расширенными кольцами.

Пример 1. Пусть $R = \mathbb{Z}_{27}$ и $I = \langle 3 \rangle$. Поскольку произведение любых трех неединичных элементов кольца R равно нулю, R является 3-расширенным квазибэровским кольцом и 3-расширенным PP-кольцом. Единственные идемпотенты кольца R – это элементы 0 и 1. Следовательно, аннуляторы $r_R(I^2)$ и $r_R(3^2)$ не порождены идемпотентами, потому что $3 \in r_R(I^2)$ и $3 \in r_R(3^2)$, тогда как 2 не принадлежит ни одному из аннуляторов $r_R(I^2)$ и $r_R(3^2)$. Таким образом, R не является 2-расширенным квазибэровским кольцом относительно главных идеалов или 2-расширенным PP-кольцом. Заметим, что $r_R(I) \neq 0$, $r_R(3) \neq 0$, $2 \notin r_R(I)$ и $2 \notin r_R(3)$. Значит, R не является ни квазибэровским кольцом относительно главных идеалов, ни PP-кольцом.

Замечание 1. Вообще, кольцо $\mathbb{Z}_{p^p}$, где p – простое число, большее двух, является p-расширенным квазибэровским кольцом и p-расширенным PP-кольцом, но не является ни $(p-1)$-расширенным квазибэровским кольцом относительно главных идеалов, ни $(p-1)$-расширенным PP-кольцом. Не является оно и квазибэровским кольцом относительно главных идеалов или PP-кольцом. Наконец, $\mathbb{Z}_{2^2} = \mathbb{Z}_4$ является 2-расширенным квазибэровским кольцом и 2-расширенным PP-кольцом, но не является ни квазибэровским относительно главных идеалов, ни PP-кольцом.

Ниже мы приводим пример n-обобщенного PP-кольца, которое не является n-расширенным PP-кольцом.

Пример 2. Пусть $\mathbb{Z}_2$ – поле из двух элементов, и пусть

$$R = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a_i \in \mathbb{Z}_2 \text{ для } n = 1, 2, 3, 4\}$$

– кольцо гамильтоновых кватернионов над $\mathbb{Z}_2$. Согласно [2; пример 1] R является 2-обобщенным PP-кольцом, но аннулятор $r_R((1+i)i) = r_R(1+i)$ не порождается идемпотентом, так что R не является 2-расширенным PP-кольцом.

Предложение 4. *Пусть R – n-расширенное правое* PP*-кольцо. Тогда R не содержит центральных нильпотентов порядка $m > n$.*

Доказательство. Предположим, что $0 \neq a \in R$ – центральный нильпотент порядка $m > n$. Если $m - 1 = n$, то $r_R(a^{m-1}) = eR$ для некоторого $e^2 = e \in R$. Если $m - 1 > n$, то

$$r_R(a^{m-1}) = r_R(a^{m-n}\underbrace{a \cdots a}_{n-1}) = eR$$

для некоторого $e^2 = e \in R$. Но $a \in r_R(a^{m-1})$ и $a^{m-1} \neq 0$; значит, ни одно из равенств $e = 0$ и $e = 1$ не может выполняться. Поскольку $a \in Z(R)$ и $a \in r_R(a^{m-1})$, имеем $ea = a = ae$. Следовательно,

$$0 = a^{m-1}e = a^{m-2}ae = a^{m-2}a = a^{m-1}$$

– мы пришли к противоречию.

Предложение 5. *Для кольца R следующие условия равносильны*:

(i) *R является n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых главных идеалов*;

(ii) *для любых собственных конечно порожденных правых идеалов $I_1, \dots, I_n$ в кольце R найдется идемпотент $e \in R$ со свойством $r_R(I_1 \cdots I_n) = eR$*;

(iii) *для любых собственных главных идеалов $I_1, \dots, I_n$ в кольце R найдется идемпотент $e \in R$ со свойством $r_R(I_1 \cdots I_n) = eR$*;

(iv) *для любых собственных конечно порожденных идеалов $I_1, \dots, I_n$ в кольце R найдется идемпотент $e \in R$ со свойством $r_R(I_1 \cdots I_n) = eR$.*

Доказательство. Ясно, что (ii) влечет (i). Импликации (i) $\Leftrightarrow$ (iii) и (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) вытекают из того, что $r_R(I_1 \cdots I_n) = r_R(RI_1 \cdots RI_n)$. Предположим, что выполнено (i) и $I_i = \sum_{J_i=1}^{m_i} a_{ij_i}R$ для $i = 1, \dots, n$. Пусть $m = \max\{m_1, \dots, m_n\}$ и $a_{ij_i} = 0$ для $j_i \geqslant m_i$. Тогда

$$I_1 \cdots I_n = \sum_{1 \leqslant j_1, \dots, j_n \leqslant m} a_{1j_1}R \cdots a_{nj_n}R.$$

Поскольку R является n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых главных идеалов, имеем $r_R(a_{1j_1}R \cdots a_{nj_n}R) = e_{j_1,\dots,j_n}R$, где $e_{j_1,\dots,j_n}$ – идемпотент кольца R для $j_i = 1, \dots, m$ и $i = 1, \dots, n$. Каждый идемпотент $e_{j_1,\dots,j_n}$ является левым полуцентральным; значит,

$$\begin{aligned} r_R(I_1 \cdots I_n) &= r_R\biggl(\sum_{1 \leqslant j_1, \dots, j_n \leqslant m} a_{1j_1}R \cdots a_{nj_n}R\biggr) \\ &= \bigcap_{1 \leqslant j_1, \dots, j_n \leqslant m} r_R(a_{1j_1}R \cdots a_{nj_n}R) = \bigcap_{1 \leqslant j_1, \dots, j_n \leqslant m} e_{j_1,\dots,j_n}R = eR \end{aligned}$$

для некоторого идемпотента e кольца R.

3. n-Расширенные квазибэровские кольца и PP-кольца. Для кольца R положим

$$R_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, a_{ij} \in R \right\}.$$

Если R – абелево обобщенное правое PP-кольцо, то согласно [2; предложение 3] R_n – тоже обобщенное правое PP-кольцо. Кроме того, если $S_l(R) = B(R)$ и R – квазибэровское кольцо (относительно правых главных идеалов), то согласно [3; теорема 3.2] для любого $n \geqslant 2$ кольцо R_n является n-обобщенным квазибэровским кольцом (относительно правых главных идеалов). Используя примеры 2 и 3, мы покажем, что для n-расширенных колец эти утверждения могут быть неверными.

Теорема 1. *Пусть R_n – m-расширенное правое* PP*-кольцо. Тогда R тоже является m-расширенным правым* PP*-кольцом.*

Доказательство. Пусть R – m-расширенное PP-кольцо. Возьмем матрицу

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_i \end{pmatrix} \in R_n,$$

где a_i – неединичный элемент кольца R для каждого $i = 1, 2, \dots, m$. Для некоторого $e^2 = e \in R_n$ имеем $r_R(A_1 \cdots A_m) = eR_n$, причем

$$e = \begin{pmatrix} f & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f \end{pmatrix},$$

где $f^2 = f \in R$. Следовательно, $fR \subseteq r_R(a_1 \cdots a_m)$. Пусть $b \in r_R(a_1 \cdots a_m)$. Тогда

$$\begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix} \in R_n$$

содержится в $r_R(A_1 \cdots A_m) = eR_n$. Значит, $b \in fR$ и R является m-расширенным правым PP-кольцом.

Следующий пример показывает, что обратное неверно.

Пример 3. Пусть $R = \mathbb{Z}$. Тогда аннулятор

$$r_{R_2}\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; d \in R \right\}$$

не порождается идемпотентом. Пусть

$$\begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} R_2$$

для некоторого $f^2 = f \in R$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} af & bf \\ 0 & af \end{pmatrix},$$

где $a, b \in R$. Следовательно, $d = 0$. Это противоречие показывает, что R_2 не является 2-расширенным правым PP-кольцом.

Ниже мы приводим пример n-обобщенного квазибэровского кольца относительно правых идеалов, которое не является ни n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов, ни квазибэровским кольцом относительно правых главных идеалов.

Пример 4. Пусть $R = \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Тогда

$$\bigl\{I_1 = \langle 1\rangle = \langle 5\rangle = R,\ I_2 = \langle 4\rangle = \langle 2\rangle = \{0, 2, 4\},\ I_3 = \langle 3\rangle = \{0, 3\},\ I_4 = \langle 0\rangle = 0\bigr\}$$

и $\{0, 1, 3, 4\}$ – множества всех идеалов и всех идемпотентных элементов кольца R соответственно. Имеем $r_R(I_1) = I_4$, $r_R(I_2) = I_3$, $r_R(I_3) = I_2$ и $r_R(I_4) = I_1$. Следовательно, кольцо $\mathbb{Z}_6$ является квазибэровским. Согласно [3; теорема 3.2]

$$R_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}_6 \right\}$$

– 2-обобщенное квазибэровское кольцо. Пусть

$$J_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \langle 2\rangle \right\}, \qquad J_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \langle 3\rangle \right\}.$$

Тогда

$$J_1 J_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r_{R_2}(J_1 J_2) = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} R_2$$

для некоторого $f^2 = f \in R$. Тогда

$$\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, $f = f1 = 1$. Но

$$\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

для каждого $0 \neq y \in \mathbb{Z}_6$. Это противоречие показывает, что кольцо R_2 не является 2-расширенным квазибэровским.

Кроме того, поскольку
$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R_2,$$
кольцо R_2 не является 2-расширенным квазибэровским кольцом.

Из того, что
$$r_{R_2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R_2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R_2\right) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & xz \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, z \in \mathbb{Z}_6\right\} = r_{R_2}\left(\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right),$$
вытекает, что R_2 не является 2-расширенным квазибэровским кольцом относительно главных идеалов.

Следующий пример показывает, что, вообще говоря, подкольца n-расширенных квазибэровских колец относительно правых (главных) идеалов не обязано быть n-расширенным квазибэровским кольцом относительно (правых) главных идеалов.

Пример 5. Кольцо $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ является n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов для каждого $n \geqslant 2$. Для простого p положим
$$R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod p\}.$$
Кольцо R – подкольцо кольца $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, не являющееся n-расширенным квазибэровским кольцом относительно (правых) главных идеалов ни для какого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку единственные идемпотенты в R – это $(0, 0)$ и $(1, 1)$, аннулятор $r_R(((p, 0)R)^n) = (0, p)R$ не порождается идемпотентом ни для какого $n \in \mathbb{N}$.

Приведем теперь пример n-расширенного квазибэровского кольца, которое содержит полупростое n-расширенное PP-подкольцо, не являющееся n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых или левых идеалов ни для какого целого $n \geqslant 2$.

Пример 6. Для поля F и $n = 1, 2, \dots$ положим $F_n = F$ и определим S как кольцо матриц размера 2×2 над кольцом $\prod_{n=1}^{\infty} F_n$. Кольцо S квазибэровское, а потому и n-расширенное квазибэровское для каждого целого $n \geqslant 2$ [1; предложение 2.1, теорема 2.2]. Положим
$$R = \begin{pmatrix} \prod\limits_{n=1}^{\infty} F_n & \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} F_n \\ \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} F_n & \left\langle \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} F_n, 1 \right\rangle \end{pmatrix},$$
где $\left\langle \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n, 1 \right\rangle$ – F-алгебра, порожденная суммой $\bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n$ и 1 и $n \geqslant 2$ – целое. Кольцо R является подкольцом кольца S. Согласно [3; пример 2.3] R является полупростым n-расширенным PP-кольцом, но не является n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых или левых идеалов.

Пример 7. Пусть $A = R \oplus \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}[X])$, где R – кольцо из примера 5. Тогда согласно [3; пример 2.4] A является полупростым кольцом, причем его центр – n-расширенное PP-кольцо, не являющееся n-расширенным квазибэровским кольцом относительно левых или правых идеалов ни для какого $n \in \mathbb{N}$.

Следующий пример – простое n-расширенное квазибэровское кольцо относительно правых главных идеалов, которое не является n-расширенным правым или левым PP-кольцом.

Пример 8. Рассмотрим

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ a \equiv d,\ b \equiv 0,\ c \equiv 0 \pmod 2 \right\}.$$

Поскольку кольцо R – простое, оно является n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых главных идеалов. При этом согласно [3; пример 2.9] R не является обобщенным правым или левым PP-кольцом, а значит, и n-расширенным правым или левым PP-кольцом ни для какого $n \in \mathbb{N}$.

Предложение 6. *Если R – n-расширенное правое квазибэровское кольцо относительно главных идеалов, то центр R является n-расширенным правым* PP-*кольцом.*

Доказательство. Пусть $Z(R)$ – центр R, и пусть $a_1,\dots,a_n \in Z(R)$ – отличные от единицы элементы. Тогда

$$l_R(a_1\cdots a_n) = l_R(Ra_1\cdots Ra_n) = r_R(a_1\cdots a_n) = r_R(a_1R\cdots a_nR) = eR,$$

где $e \in S_l(R)$.

Поскольку

$$l_R(Ra_1\cdots Ra_n) = l_Rr_Rl_R(Ra_1\cdots Ra_n) = l_Rr_R(eR)$$

и $r_R(eR) = r_R(eR\cdots eR) = fR$ для некоторого $f \in S_l(R)$, имеем $1-f \in S_r(R)$; значит,

$$eR = l_R(Ra_1\cdots Ra_n) = l_R(fR) = R(1-f).$$

Итак, $e = x(1-f)$ для некоторого $x \in R$. Следовательно, $ef = x(1-f)f = 0$. Из того, что $e \in S_l(R)$, вытекают равенства $fe = efe = 0$, откуда $ef = 0$. Из $eR = R(1-f)$ получаем $1-f = ey$ для некоторого $y \in R$; значит, $e = e(1-f) = ey = 1-f$. Таким образом, $e \in S_l(R) \cap S_r(R) = B(R)$. Следовательно,

$$r_{Z(R)}(a_1\cdots a_n) = r_R(a_1\cdots a_n) \cap Z(R) = eR \cap Z(R) = eZ(R).$$

Предложение 7. *Для любого кольца R верны следующие утверждения*:

(i) *если R – n-расширенное* PP-*кольцо, то $Z(R)$ – n-расширенное* PP-*кольцо*;

(ii) *если R – абелево n-расширенное правое* PP-*кольцо, то $Z(R)$ – n-расширенное* PP-*кольцо.*

Доказательство. (i) Пусть $x_1,\dots,x_n$ – неединичные элементы кольца $Z(R)$. Тогда $r_R(x_1\cdots x_n) = eR$ и $l_R(x_1\cdots x_n) = Rf$ для некоторых $e^2 = e$ и $f^2 = f$ в R. Из равенства $r_R(x_1\cdots x_n) = l_R(x_1\cdots x_n)$ вытекает, что $r_R(x_1\cdots x_n)$ является двусторонним идеалом в R. Значит, $re = ere = frf = fr = er$ для каждого $r \in R$, откуда $e = f \in Z(R)$. Поскольку $r_{Z(R)}(x_1\cdots x_n) = r_R(x_1\cdots x_n) \cap Z(R)$, имеем $r_{Z(R)}(x_1\cdots x_n) = eZ(R)$.

(ii) Пусть $x_1,\dots,x_n$ – неединичные элементы кольца $Z(R)$. Тогда $r_R(x_1\cdots x_n) = eR$ для некоторого идемпотента $e \in R$. Поскольку кольцо R абелево, идемпотент e централен, и

$$l_{Z(R)}(x_1\cdots x_n) = r_{Z(R)}(x_1\cdots x_n) = r_R(x_1\cdots x_n) \cap Z(R) = eZ(R).$$

Предложение 8. *Класс n-расширенных правых* PP*-колец замкнут относительно прямого произведения.*

Доказательство. Пусть R_i, где $i \in I$, – n-расширенное правое PP-кольцо и $R = \prod_{i\in I} R_i$. Рассмотрим неединичные элементы $x^1 = (x_i^1),\dots,x^n = (x_i^n)$ кольца R. Имеем $r_{R_i}(x_i^1\cdots x_i^n) = e_iR_i$, где $e_i^2 = e_i \in R_i$ для каждого $i \in I$. Пусть $e = (e_i) \in R$. Тогда $e^2 = e$ и $r_R(x^1\cdots x^n) = eR$.

Предложение 9. *Класс n-расширенных квазибэровских колец относительно правых* (*главных*) *идеалов замкнут относительно прямого произведения.*

Ниже мы приводим пример абелева квазибэровского кольца относительно правых главных идеалов, которое содержит обобщенное квазибэровское подкольцо относительно правых главных идеалов, не являющееся n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых главных идеалов.

Пример 9. Пусть R – абелево квазибэровское кольцо относительно правых главных идеалов с нулевой характеристикой, и пусть $S = \prod_{n=1}^{\infty} R$. Согласно [3; пример 4.10] подкольцо T кольца S, порожденное суммой $\bigoplus_{n=1}^{\infty} R$ и $1 \in S$, является обобщенным квазибэровским кольцом относительно правых главных идеалов, но не является n-обобщенным правым квазибэровским кольцом относительно главных идеалов ни для какого целого $n \geqslant 2$. Значит, оно не является n-расширенным правым квазибэровским кольцом относительно главных идеалов ни для какого целого $n \geqslant 2$.

Следующий пример доказывает существование квазибэровского кольца относительно главных идеалов, которое не является n-расширенным правым PP-кольцом, но содержит n-расширенное правое PP-подкольцо.

Пример 10. Обозначим кольцо всех матриц размера 2×2 над $\mathbb{Z}[X]$ через S и кольцо всех матриц размера 2×2 над $\mathbb{Z}$ через R. Согласно [3; пример 4.11, (ii)] R – n-расширенное правое PP-кольцо, а S – квазибэровское кольцо относительно главных идеалов, не являющееся n-расширенным правым PP-кольцом ни для какого целого $n \geqslant 2$.

Пример 11. Пусть S – кольцо всех матриц размера 2×2 над $\mathbb{Z}[x]$, и пусть T – кольцо всех матриц размера 2×2 над $\mathbb{Z}_n[x]$. Тогда $S \oplus T$ – обобщенное квазибэровское кольцо, которое не является n-расширенным PP-кольцом.

4. n-Расширенные матричные кольца. В этом пункте T обозначает кольцо обобщенных (или формальных) треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} S & M \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

размера 2×2, где R и S – кольца, а M – (S,R)-бимодуль. Для (S,R)-подмодуля N бимодуля M мы полагаем

$$\operatorname{Ann}_R(N)=\{r\in R\mid Nr=0\}\qquad \text{и}\qquad \operatorname{Ann}_S(N)=\{s\in S\mid sN=0\}.$$

Теорема 2. *Пусть*

$$T=\begin{pmatrix} S & M\\ 0 & R\end{pmatrix},$$

где R и S – кольца и M – (S,R)-бимодуль. Тогда следующие условия равносильны:

(1) *T является n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов*;

(2) (i) *R и S являются n-расширенными квазибэровскими кольцами относительно правых (главных) идеалов*;

(ii) *$r_M(I_1I_2\cdots I_n)=(r_S(I_1I_2\cdots I_n))M$, где $I_1,I_2,\dots,I_n$ – собственные (главные) идеалы кольца S*;

(iii) *если*

$$\begin{pmatrix} I_1 & N_1\\ 0 & J_1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} I_2 & N_2\\ 0 & J_2\end{pmatrix},\quad \dots,\quad \begin{pmatrix} I_n & N_n\\ 0 & J_n\end{pmatrix}$$

– собственные (главные) правые идеалы кольца T, то

$$\begin{aligned} r_R(J_1\cdots J_n)\cap \operatorname{Ann}_R(I_1\cdots I_{n-1}N_n)\cap \operatorname{Ann}_R(I_1\cdots I_{n-2}N_{n-1}J_n)\cap\cdots\\ \cap \operatorname{Ann}_R(I_1\cdots I_{i-1}N_iJ_{i+1}\cdots J_n)\cap\cdots\cap \operatorname{Ann}_R(N_1J_2\cdots J_n)=eR\end{aligned}$$

для некоторого $e=e^2\in R$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). (i) Пусть T – n-расширенное квазибэровское кольцо, и пусть $J_1,\dots,J_n$ – идеалы в кольце R.

Положим

$$I_1=\begin{pmatrix} 0 & MJ_1\\ 0 & J_1\end{pmatrix}\qquad \text{и}\qquad I_k=\begin{pmatrix} 0 & M\\ 0 & J_k\end{pmatrix}\quad \text{для}\ \ k=2,\dots,n.$$

Поскольку T является n-расширенным квазибэровским кольцом и $r_R(J_1\cdots J_n)\subseteq \operatorname{Ann}_R(MJ_1\cdots J_n)$, имеем

$$\begin{aligned} r_T(I_1\cdots I_n)&=r_T\left(\begin{pmatrix} 0 & MJ_1\\ 0 & J_1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0 & M\\ 0 & J_n\end{pmatrix}\right)=r_T\left(\begin{pmatrix} 0 & MJ_1\cdots J_n\\ 0 & J_1\cdots J_n\end{pmatrix}\right)\\ &=\begin{pmatrix} S & M\\ 0 & r_R(J_1\cdots J_n)\cap \operatorname{Ann}_R(MJ_1\cdots J_n)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} S & M\\ 0 & r_R(J_1\cdots J_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e_1 & 0\\ 0 & e_2\end{pmatrix}T=\begin{pmatrix} e_1S & e_1M\\ 0 & e_2R\end{pmatrix}\end{aligned}$$

для некоторых $e_1\in S_l(S)$ и $e_2\in S_l(R)$. Значит, $r_R(J_1\cdots J_n)=e_2R$ для некоторого $e_2\in S_l(R)$. Остальные случаи очевидны.

(ii) Пусть $I_1,I_2,\dots,I_n$ – собственные (главные) идеалы в кольце S. Тогда

$$\begin{pmatrix} I_j & M\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \text{где}\quad j=1,2,\dots,n,$$

являются идеалами в кольце T. Поскольку T является n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов, имеем

$$r_T\left(\begin{pmatrix} I_1 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} I_n & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} T,$$

где $e_1 \in S_l(S)$ и $e_2 \in S_l(R)$. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} r_S(I_1 \cdots I_n) & r_M(I_1 \cdots I_n) \\ 0 & \mathrm{Ann}_R(I_1 \cdots I_{n-1}M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1S & e_1M \\ 0 & e_2R \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$r_M(I_1 \cdots I_n) = e_1M = e_1SM = (r_S(I_1 \cdots I_n))M.$$

(iii) Пусть

$$\begin{pmatrix} I_1 & N_1 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} I_n & N_n \\ 0 & J_n \end{pmatrix}$$

– собственные (главные) идеалы кольца T.

Поскольку T является n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов, имеем

$$r_T\left(\begin{pmatrix} I_1 & N_1 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} I_n & N_n \\ 0 & J_n \end{pmatrix}\right) = eT$$

для некоторого $e^2 = e \in T$.

Положим

$$A = I_1 \cdots I_{n-1}N_n + I_1 \cdots I_{n-2}N_{n-1}J_n + \cdots + I_1 \cdots I_{i-1}N_iJ_{i+1} \cdots J_n + \cdots + N_1J_2 \cdots J_n.$$

Имеем

$$r_T\begin{pmatrix} I_1 \cdots I_n & A \\ 0 & J_1 \cdots J_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_S(I_1 \cdots I_n) & r_M(I_1 \cdots I_n) \\ 0 & r_R(J_1 \cdots J_n) \cap \mathrm{Ann}_R(A) \end{pmatrix} = eT.$$

Значит,

$$\begin{aligned} &r_R(J_1 \cdots J_n) \cap \mathrm{Ann}_R(I_1 \cdots I_{n-1}N_n) \cap \cdots \\ &\qquad \cap \mathrm{Ann}_R(I_1 \cdots I_{i-1}N_iJ_{i+1} \cdots J_n) \cap \cdots \cap \mathrm{Ann}_R(N_1J_2 \cdots J_n) = e_2R, \end{aligned}$$

где $e_2^2 = e_2 \in R$. Отсюда

$$eT = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & M \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1S & e_1M \\ 0 & e_2R \end{pmatrix},$$

где $e_1 \in S_l(S)$ и $e_2 \in S_l(R)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что R и S – n-расширенные квазибэровские кольца относительно правых (главных) идеалов. Пусть

$$\begin{pmatrix} I_k & N_k \\ 0 & J_k \end{pmatrix}$$

– собственные (главные) идеалы кольца T для $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$r_S(I_1 \cdots I_n) = e_1 S, r_M(I_1 \cdots I_n) = e_1 M$$

для некоторого $e_1 \in S_l(S)$ и

$$\begin{aligned} &r_R(J_1 \cdots J_n) \cap \operatorname{Ann}_R(I_1 \cdots I_{n-1} N_n) \cap \cdots \\ &\qquad \cap \operatorname{Ann}_R(I_1 \cdots I_{i-1} N_i J_{i+1} \cdots J_n) \cap \cdots \cap \operatorname{Ann}_R(N_1 J_2 \cdots J_n) = e_2 R \end{aligned}$$

для некоторого $e_2 \in S_l(R)$. Имеем

$$\begin{aligned} &r_T\left(\begin{pmatrix} I_1 & N_1 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} I_n & N_n \\ 0 & J_n \end{pmatrix}\right) \\ &\quad = \begin{pmatrix} r_S(I_1 \cdots I_n) & r_M(I_1 \cdots I_n) \\ 0 & r_R(J_1 \cdots J_n) \cap \operatorname{Ann}_R(I_1 \cdots I_{n-1} N_n + \cdots + N_1 J_2 \cdots J_n) \end{pmatrix} \\ &\quad = \begin{pmatrix} e_1 S & e_1 M \\ 0 & e_2 R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & M \\ 0 & R \end{pmatrix} = eT, \end{aligned}$$

где $e \in S_l(T)$.

Ниже мы приводим пример n-расширенного квазибэровского кольца относительно правых идеалов, не являющееся квазибэровским кольцом. Тот же пример показывает, что определение n-расширенных квазибэровских колец несимметрично.

Пример 12. Пусть

$$T = \begin{pmatrix} R & S \\ 0 & R \end{pmatrix},$$

где

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– квазибэровское кольцо и

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– (R, R)-бимодуль. Тогда T является 2-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых идеалов, но не является квазибэровским кольцом или квазибэровским кольцом относительно левых идеалов ни для какого целого $n \geqslant 2$.

Предложение 10. *Пусть e – ненулевой идемпотент в кольце R.*

(i) *Если R является n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов, то eRe тоже является n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов.*

(ii) *Если R является n-расширенным правым* PP*-кольцом, то eRe тоже является n-расширенным правым* PP*-кольцом.*

Доказательство. (i) Сначала предположим, что R – n-расширенное квазибэровское кольцо. Покажем, что eRe является n-расширенным квазибэровским кольцом. Пусть $I_1, \ldots, I_n$ – собственные правые идеалы в eRe. Тогда $I_j R$ – собственные правые идеалы в R для $j = 1, \ldots, n$. Поскольку R является n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых идеалов, имеем $r_R(I_1R \cdots I_nR) = fR$ для некоторого полуцентрального идемпотента f в кольце R. Покажем, что

$$r_{eRe}(I_1 \cdots I_n) = (efe)eRe.$$

Поскольку идемпотент f полуцентрален, имеем $(efe)eRe \subseteq r_{eRe}(I_1 \cdots I_n)$. Пусть $x = exe \in r_{eRe}(I_1 \cdots I_n)$. Тогда

$$0 = I_1 \cdots I_n x = I_1 eRe \cdots I_n eRex = I_1 R \cdots I_n Rx.$$

Значит, $x = fx = efxe = (efe)(exe)$.

Теперь предположим, что R – n-расширенное квазибэровское кольцо относительно правых главных идеалов. Покажем, что eRe тоже является n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых главных идеалов. Пусть $a_1(eRe), \ldots, a_n(eRe)$ – собственные главные правые идеалы в eRe. Поскольку R является n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых главных идеалов, имеем $r_R(a_1R \cdots a_nR) = fR$ для некоторого полуцентрального идемпотента f в R. Покажем, что

$$r_{eRe}(a_1(eRe) \cdots a_n(eRe)) = (efe)(eRe).$$

Пусть $x \in r_{eRe}(a_1(eRe) \cdots a_n(eRe))$. Тогда

$$0 = a_1(eRe) \cdots a_n(eRe)x = a_1R \cdots a_nRx.$$

Значит, $x = fx = (efe)(exe)$.

(ii) Пусть $x_1, \ldots, x_n \in eRe$ – неединичные элементы. Тогда $r_R(x_1 \cdots x_n) = fR$ для некоторого идемпотента $f \in R$. Поскольку $r_{eRe}(x_1 \cdots x_n) = r_R(x_1 \cdots x_n) \cap eRe$ и $1 - e \in r_R(x_1 \cdots x_n)$, имеем $1 - e = f(1 - e)$, откуда $0 = e(1 - e) = ef(1 - e)$. Таким образом, $ef = efe$. Пусть $g = ef$. Тогда $g^2 = g \in eRe$ и

$$x_1 \cdots x_n g = x_1 \cdots x_n ef = x_1 \cdots x_n f = 0.$$

Для $y \in r_{eRe}(x_1 \cdots x_n)$ имеем $y = ey = efy = gy \in geRe$. Значит, $r_{eRe}(x_1 \cdots x_n) = geRe$.

Теорема 3. *Кольцо эндоморфизмов конечно порожденного проективного модуля над n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов R является n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов. В частности, свойство быть n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов инвариантно относительно эквивалетностей Мориты.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает непосредственно из предложения 6. Пусть m – натуральное число, R – n-расширенное квазибэровское кольцо относительно правых идеалов и $I_1, \ldots, I_n$ – собственные идеалы в $\mathrm{Mat}_m(R)$. Тогда $I_k = \mathrm{Mat}_m(J_k)$ для некоторых идеалов J_k кольца R, где $k = 1, \ldots, n$. Поскольку R является n-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых идеалов, имеем $r_R(J_1 \cdots J_n) = eR$ для некоторого $e \in S_l(R)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} r_R(I_1 \cdots I_n) &= r_R(\mathrm{Mat}_m(J_1) \cdots \mathrm{Mat}_m(J_n)) = r_R(\mathrm{Mat}_m(J_1 \cdots J_n)) \\ &= \mathrm{Mat}_m(r_R(J_1 \cdots J_n)) = \mathrm{Mat}_m(eR) = e\mathrm{Mat}_m(R). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что R – n-расширенное квазибэровское кольцо относительно правых главных идеалов и $a_k \in \mathrm{Mat}_m(R)$ для $k=1,\dots,n$. Тогда

$$\mathrm{Mat}_m(R)a_k\mathrm{Mat}_m(R) = \mathrm{Mat}_m(J_k),$$

где J_k – конечно порожденные идеалы кольца R для $k=1,\dots,n$. Из предложения 5 вытекает, что $r_R(J_1\cdots J_n)=eR$ для некоторого $e\in S_l(R)$. Значит,

$$\begin{aligned} &r_R(\mathrm{Mat}_m(R)a_1\mathrm{Mat}_m(R)\cdots\mathrm{Mat}_m(R)a_n\mathrm{Mat}_m(R)) \\ &\qquad = r_R(\mathrm{Mat}_m(J_1\cdots J_n)) = \mathrm{Mat}_m(eR) = e\mathrm{Mat}_m(R). \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] G. F. Birkenmeier, J. Y. Kim, J. K. Park, “Principally quasi-Baer rings”, *Comm. Algebra*, **29**:2 (2001), 639–660.

[2] C. Huh, H. K. Kim, Y. Lee, “p.p. rings and generalized p.p. rings”, *J. Pure Appl. Algebra*, **167**:1 (2002), 37–52.

[3] A. Moussavi, H. Haj Seyyed Javadi, E. Hashemi, “Generalized quasi-Baer rings”, *Comm. Algebra*, **33**:7 (2005), 2115–2129.

Ш. Галандарзаде
Технический университет им. К. Н. Туси, Тегеран, Иран
E-mail: ghalandarzadeh@kntu.ac.ir

Поступило
11.03.2008

Ф. Заре Хощере
Технический университет им. К. Н. Туси, Тегеран, Иран