А. В. Глушко, А. С. Рябенко, Принцип локализации и оценка скорости затухания колебаний в вязкой сжимаемой стратифицированной жидкости, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 4, 585–593

DOI: 10.4213/mzm4646

Математические заметки

Том 85 выпуск 4 апрель 2009

УДК 517.95

Принцип локализации и оценка скорости затухания колебаний в вязкой сжимаемой стратифицированной жидкости

А. В. Глушко, А. С. Рябенко

Рассматривается начально-краевая задача, описывающая в линейном приближении малые акустическо-гравитационные колебания вязкой стратифицированной жидкости. Отличительной чертой данной работы является отказ от предположения Буссинеска относительно стационарной плотности, что приводит к рассмотрению гидродинамической системы с переменными коэффициентами.

На основе принципа локализации получена оценка скорости стабилизации решения задачи при $t \to \infty$. Принцип локализации основан на связи между скоростью убывания решения задачи и геометрией области потери аналитичности образа Лапласа ($L_{t\to\gamma}$) решения. Принцип локализации осуществляется на основе априорных оценок для образа решения. На этой же основе доказана однозначная разрешимость как исходной задачи, так и задачи в образах.

Библиография: 7 названий.

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с частными производными

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} - \frac{\nu}{\rho_0(x)}\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_0(x)}\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0(x)}q(t,x) = F(t,x), \\
\frac{\partial q(t,x)}{\partial t} - \left(\frac{N^2(x)}{g} + gc^{-2}\right)\rho_0(x)V(t,x) + \rho_0(x)\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} = 0, \\
\frac{\partial q(t,x)}{\partial t} - c^{-2}\frac{\partial P(t,x)}{\partial t} - \frac{N^2(x)}{g}\rho_0(x)V(t,x) = 0,
\end{gathered} \tag{1}
$$

$x > 0$, $t > 0$, с начальными условиями

$$
V(t,x)|_{t=0} = P(t,x)|_{t=0} = q(t,x)|_{t=0} = 0 \tag{2}
$$

и граничными условиями

$$
V(t,x)|_{x=0} = V(t,x)|_{x=\infty} = 0. \tag{3}
$$

Система (1) описывает в линейном приближении малые акустическо-гравитационные колебания вязкой жидкости (см. [1]). Колебания считаются одномерными (в направлении однородного поля тяготения).

Использованы следующие обозначения: $V(t,x)$, $q(t,x)$, $P(t,x)$ – скорость движения частицы, находящейся в момент $t>0$ в точке $x\in\mathbb{R}_+$, ее плотность и давление в ней соответственно; $\rho_0(x)$ – стационарная плотность, ν – коэффициент вязкости, c – скорость распространения звуковых колебаний в среде, g – ускорение свободного падения, $N^2(x)=-(\rho_0'(x)\rho_0^{-1}(x)+gc^{-2})g$ – частота Вейсяля–Брента. Модель (1) отличается от рассмотренной в работах [2], [3] наличием переменных коэффициентов, обусловленным отказом от предположения Буссинеска относительно стационарной плотности $\rho_0(x)$. Основной целью работы является получение оценки скорости стабилизации решения при $t\to\infty$ на основе принципа локализации, развитого в работах [3]–[5] для систем уравнений гидродинамического типа с постоянными коэффициентами и в работе [6] для начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности. Результаты получены на основе установления связи между скоростью убывания решения задачи и геометрией области аналитичности образа Лапласа ($L_{t\to\gamma}$) решения. Аналитичность образа решения устанавливается на основе априорных оценок образа решения. На этой же основе доказана однозначная разрешимость как исходной задачи (1)–(3), так и задачи в образах. В работе приводятся результаты о скорости стабилизации при $t\to\infty$ компоненты решения $V(t,x)$. В дальнейшем планируется улучшить оценку скорости убывания этой компоненты решения и получить оценки остальных компонент.

Сформулируем условия, используемые в работе.

Условие 1. Функция $\rho_0(x)\in C^2[0,\infty)$ и существуют $\varepsilon_1,\varepsilon_2,c_1>0$ такие, что при $x\in[0,\infty)$ выполнены неравенства

$$\varepsilon_1\leqslant\rho_0(x)\leqslant\varepsilon_2,\qquad |\rho_0'(x)|\leqslant c_1.$$

Условие 2. Функция $f(t,x)$ непрерывна по совокупности переменных $x\in[0,\infty)$, $t>0$ и $f(t,x)e^{\delta t}\in L_1(\mathbb{R}^2_{++})$ при некотором $\delta>0$.

Условие 3. Для функции $\partial^k f(t,x)/\partial t^k$, где $k=0,1,2$, выполнено условие 2

$$f(t,x)|_{t=0}=0,\qquad \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0,$$
$$(1+x)\int_0^\infty\left|\frac{\partial^k f(t,x)}{\partial t^k}\right|e^{\delta t}\,dt\in L_2[0,\infty),\qquad \text{где}\quad k=0,1,2.$$

Определение. Будем говорить, что набор функций $V_1(t,x)$, $q_1(t,x)$, $P_1(t,x)$ принадлежат *классу* T_a, если справедливы следующие оценки:

$$\left|\frac{\partial^k V_1(t,x)}{\partial t^k}\right|\leqslant c_2e^{at},\qquad \left|\frac{\partial^{k+1}V_1(t,x)}{\partial x^{k+1}}\right|\leqslant c_2e^{at},$$
$$\left|\frac{\partial^k q_1(t,x)}{\partial t^k}\right|\leqslant c_2e^{at},\qquad \left|\frac{\partial^k P_1(t,x)}{\partial t^k}\right|\leqslant c_2e^{at},\qquad \left|\frac{\partial P_1(t,x)}{\partial x}\right|\leqslant c_2e^{at},$$

где $k=0,1$.

Ниже преобразования Лапласа ($L_{t\to\gamma}$) функций $V(t,x)$, $q(t,x)$, $P(t,x)$, $F(t,x)$ будем обозначать $v(\gamma,x)$, $\rho(\gamma,x)$, $p(\gamma,x)$, $f(\gamma,x)$ соответственно.

После применения преобразования Лапласа ($L_{t\to\gamma}$) к задаче (1)–(3) и некоторых вычислений мы получаем, что

$$\rho(\gamma,x)=\frac{1}{\gamma}\biggl(\frac{N^2(x)}{g}+gc^{-2}\biggr)\rho_0(x)v(\gamma,x)-\frac{\rho_0(x)}{\gamma}\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\,, \tag{4}$$

$$p(\gamma,x)=c^2\rho(\gamma,x)-\frac{c^2N^2(x)\rho_0(x)}{g\gamma}v(\gamma,x), \tag{5}$$

а функция $v(\gamma,x)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial}{\partial x}\biggl(\frac{\nu\gamma+\rho_0(x)c^2}{\gamma}\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\biggr)-\gamma\rho_0(x)v(\gamma,x)=-f_*(\gamma,x), \tag{6}$$

$$v(\gamma,x)|_{x=0}=v(\gamma,x)|_{x=\infty}=0, \tag{7}$$

где $f_*(\gamma,x)=\rho_0(x)f(\gamma,x)$.

Отметим, что при произвольном $\rho_0(x)$, конечно, не удается в явном виде выписать решение задачи (6), (7).

Теорема 1. *Пусть функции $f_*(\gamma,x)$, $v(\gamma,x)$, $\partial v(\gamma,x)/\partial x$, $\partial^2 v(\gamma,x)/\partial x^2$ принадлежат пространству $L_2[0,\infty)$ по переменной x при каждом фиксированном $\gamma\in D$, где D – это некоторая область в комплексной плоскости, функция $v(\gamma,x)$ является решением задачи* (6), (7), *для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие* 1, *тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $\psi_1>0.5\pi$ такое, что при $\gamma\in(D\cap(|\gamma|\geqslant\varepsilon)\cap(|\arg\gamma|\leqslant\psi_1))$ будет справедлива следующая оценка*:

$$\biggl\|\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}\biggr\|^2+|\gamma|\biggl\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\biggr\|^2+|\gamma|^2\|v(\gamma,x)\|^2\leqslant c_3\|f_*(\gamma,x)\|^2, \tag{8}$$

где $c_3=c_3(\psi_1,\varepsilon)$ такое, что $0<\varepsilon_3<c_3(\psi_1,\varepsilon)<\varepsilon_4$.

Доказательство. Умножим (6) на $\overline{v}(\gamma,x)$ и проинтегрируем по x от 0 до ∞, после чего с учетом (7) получаем, что

$$\int_0^\infty\frac{\nu\gamma+\rho_0(x)c^2}{\gamma}\biggl|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\biggr|^2dx+\int_0^\infty\gamma\rho_0(x)|v(\gamma,x)|^2\,dx=(f_*(\gamma,x),v(\gamma,x)). \tag{9}$$

Из (9) вытекает следующее равенство:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty(k\nu|\gamma|+\sqrt{k^2+1}\,\rho_0(x)c^2\cos(\varphi+\psi))\biggl|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\biggr|^2dx\\+\int_0^\infty|\gamma|^2\sqrt{k^2+1}\cos(\varphi-\psi)\rho_0(x)|v(\gamma,x)|^2\,dx\\=|\gamma|(k\operatorname{Re}(f_*(\gamma,x),v(\gamma,x))+\operatorname{Im}(f_*(\gamma,x),v(\gamma,x))),\end{aligned} \tag{10}$$

где $\sin\psi=(k^2+1)^{-0.5}$, $\cos\psi=k(k^2+1)^{-0.5}$, $\varphi=\arg\gamma$. Равенство (10) рассматривается только в случае, когда $k>1$. Нетрудно видеть, что $\psi\to+0$ при $k\to\infty$. Из (10) следует, что при $|\gamma|\geqslant 2\rho_0(x)c^2|\cos(\varphi+\psi)|(\nu\cos\psi)^{-1}$ и при $\varphi\in[0;0,5\pi+\psi-\varepsilon^0]$, где $0<\varepsilon^0<\psi$, будет справедлива оценка

$$\frac{\nu|\gamma|}{2}\biggl\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\biggr\|^2+\frac{\varepsilon_1|\gamma|^2\sin\varepsilon^0\|v(\gamma,x)\|^2}{2}\leqslant\frac{\|f_*(\gamma,x)\|^2}{2\sin\varepsilon^0}\,. \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что найдется такое ψ, что при $\varphi \in [0.5(\pi - \psi); 0.5(\pi + \psi)]$ будет верна оценка

$$2\rho_0(x)c^2|\cos(\varphi + \psi)|(\nu \cos\psi)^{-1} < \varepsilon, \tag{12}$$

где ε – произвольное положительное число. Из (6), (11) и (12) следует оценка

$$\left\|\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2 + |\gamma|\left\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2 + |\gamma|^2\|v(\gamma,x)\|^2 \leqslant c_3\|f_*(\gamma,x)\|^2. \tag{13}$$

В случае, когда $\varphi \in [0.5(-\pi - \psi); 0.5(-\pi + \psi)]$, неравенство (13) доказывается аналогично. Из (9) следует, что при $|\varphi| \leqslant 0.5(\pi - \psi)$ будет справедлива оценка

$$(\nu|\gamma| + \varepsilon_5)\left\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2 + \varepsilon_6|\gamma|^2\|v(\gamma,x)\|^2 \leqslant |\gamma||(f_*(\gamma,x), v(\gamma,x))|$$
$$\leqslant 0.5\varepsilon_6|\gamma|^2\|v(\gamma,x)\|^2 + 0.5\varepsilon_6^{-1}\|f_*(\gamma,x)\|^2.$$

Следовательно, при $|\varphi| \leqslant 0.5(\pi - \psi)$ справедлива оценка

$$|\gamma|\left\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2 + |\gamma|^2\|v(\gamma,x)\|^2 \leqslant c_3\|f_*(\gamma,x)\|^2,$$

что с учетом (6) приводит к неравенству (8).

Лемма 1. *Пусть функции $f_*(\gamma,x)$, $v(\gamma,x)$, $\partial v(\gamma,x)/\partial x$, $\partial^2 v(\gamma,x)/\partial x^2$ принадлежат пространству $L_2[0,\infty)$ по переменной x при каждом фиксированном $\gamma \in D$, где D – это некоторая область в комплексной плоскости, функция $v(\gamma,x)$ является решением задачи (6), (7), для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1, тогда для достаточно малых γ, лежащих между кривой $l(\psi) = -\psi^2\nu^{-1}\rho_1c^2 + i6\nu^{-1}\rho_1c^2\psi$ (здесь $\psi \in [-\delta,0) \cup (0,-\delta]$) и мнимой осью (включая точки, лежащие на $l(\psi)$ и мнимой оси) и принадлежащих D, будет выполнена оценка*

$$\left\|\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2 + |\gamma|\sin 0.5\psi\left\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2 + |\gamma|^2(\sin 0.5\psi)^2\|v(\gamma,x)\|^2$$
$$\leqslant c_4(1 + (|\gamma|\sin 0.5\psi)^{-1} + (\sin 0.5\psi)^{-4} + |\gamma|^2)\|f_*(\gamma,x)\|^2.$$

Доказательство. Из теоремы 1 мы получаем, что при $\varphi \in [0; 0.5(\pi + \psi)]$ и при $|\gamma| \geqslant 2\rho_0(x)c^2|\cos(\varphi + \psi)|(\nu\cos\psi)^{-1}$ справедлива оценка

$$0.5\nu|\gamma|\left\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2 + \varepsilon_1|\gamma|^2\sin 0.5\psi\|v(\gamma,x)\|^2 \leqslant |\gamma||(f_*(\gamma,x), v(\gamma,x))|.$$

Отсюда следует неравенство

$$|\gamma|\sin 0.5\psi\left\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2 + |\gamma|^2(\sin 0.5\psi)^2\|v(\gamma,x)\|^2 \leqslant c_5\|(f_*(\gamma,x)\|^2. \tag{14}$$

Пусть $\varphi \in [0.5\pi; 0.5(\pi + \psi)]$. При достаточно малых ψ будет верна оценка

$$2\rho_0(x)c^2|\cos(\varphi + \psi)|(\nu\cos\psi)^{-1} \leqslant 4\rho_1c^2\nu^{-1}\sin 1.5\psi \leqslant 6\rho_1c^2\nu^{-1}\psi, \tag{15}$$

где $\rho_1 = \sup_{x\in[0,\infty)} \rho_0(x)$. Из (6) и (14) следует оценка

$$\left\|\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\| + |\gamma|\sin 0.5\psi\left\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2 + |\gamma|^2(\sin 0.5\psi)^2\|v(\gamma,x)\|^2$$
$$\leqslant c_5(1+(|\gamma|\sin 0.5\psi)^{-1}+(\sin 0.5\psi)^{-4}+|\gamma|^2)\|f_*(\gamma,x)\|^2. \tag{16}$$

Из (15) вытекает, что оценка (16) справедлива, когда γ лежит между кривой $l_1(\psi) = -\psi^2\rho_1 c^2\nu^{-1} + i6\rho_1 c^2\nu^{-1}\psi$ и мнимой осью. Аналогично можно доказать, что оценка (16) справедлива, когда γ лежит между кривой $l_2(\psi) = -\psi^2\rho_1 c^2\nu^{-1} - i6\rho_1 c^2\nu^{-1}\psi$ при $\psi \in (0,\delta]$ и мнимой осью.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть функции $f_*(\gamma,x)(1+x)$, $v(\gamma,x)$, $\partial v(\gamma,x)/\partial x$, $\partial^2 v(\gamma,x)/\partial x^2$ принадлежат пространству $L_2[0,\infty)$ по переменной x при каждом фиксированном $\gamma\in D$, где D – это некоторая область в комплексной плоскости, функция $v(\gamma,x)$ является решением задачи (6), (7), для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1. Тогда для достаточно малых γ, лежащих между контуром $l(\psi)$ и мнимой осью (включая точки лежащие на контуре $l(\psi)$ и мнимой оси) и принадлежащих D, будет верна оценка*

$$\left\|\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2 + |\gamma|^2\|v(\gamma,x)\|^2 \leqslant c_6\|f_*(\gamma,x)(1+x)\|^2,$$

а при достаточно малых $\gamma\in D$ таких, что $|\varphi| < 0.5\pi$, верны оценки

$$\left\|\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2 + |\gamma|\cos\varphi\left\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2 + |\gamma|^2(\cos\varphi)^2\|v(\gamma,x)\|^2$$
$$\leqslant c_7((|\gamma|\cos\varphi)^{-1} + (\cos\varphi)^{-2} + 1)\|f_*(\gamma,x)\|^2,$$

$$\left\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2 + |\gamma|\cos\varphi\|v(\gamma,x)\|^2 \leqslant c_8\|f_*(\gamma,x)(1+x)\|^2.$$

Пусть $\delta > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. В дальнейшем через $l_\delta^{\alpha,\beta}$ будем обозначать контур следующего вида: $l_\delta^{\alpha,\beta} = l_0 \cup l \cup l_1$, где

$$\begin{aligned} l &= -\xi^2\alpha + i\xi\beta && \text{при} \quad \xi\in[-\delta,\delta], \\ l_0 &= -\delta^2\alpha - i(\delta+\xi)\beta && \text{при} \quad \xi\in(-\infty,0], \\ l_0 &= -\delta^2\alpha + (\delta+\xi)\beta && \text{при} \quad \xi\in[0,\infty). \end{aligned}$$

Теорема 2. *Пусть функция $f_*(\gamma,x)$ принадлежит пространству $L_2[0,\infty)$ по переменной x при $\operatorname{Re}\gamma \geqslant -\varepsilon$, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1, тогда найдется контур $l_{\delta_3}^{\alpha_3,\beta_3}$ такой, что при каждом фиксированном γ, лежащем правее контура $l_{\delta_3}^{\alpha_3,\beta_3}$, за исключением, быть может $\gamma = 0$, у задачи (6), (7) существует единственное решение из $H^2[0,\infty)$.*

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu\gamma + \rho_\varepsilon(x)c^2}{\gamma}\,\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right) - \gamma\rho_\varepsilon(x)v(\gamma,x) = -f_*(\gamma,x), \tag{17}$$

$$v(\gamma,x)|_{x=0} = v(\gamma,x)|_{x=\infty} = 0, \tag{18}$$

где $\rho_\varepsilon(x) = \rho_0(\varepsilon x)$.

При $\varepsilon = 1$ задача (17), (18) переходит в задачу (6), (7). При $\varepsilon = 0$ существует контур $l_{\delta_1}^{\alpha_1,\beta_1}$ такой, что при каждом фиксированном γ, лежащем правее контура $l_{\delta_1}^{\alpha_1,\beta_1}$, у задачи (17), (18) существует единственное решение из $H^2[0,\infty)$ (см. [3]). Поскольку $\rho_\varepsilon^{(k)}(x) = \varepsilon^k \rho_0^{(k)}(\varepsilon x)$, $k = 0, 1$, если условие 1 выполнено для $\rho_0(x)$, оно же будет выполнено и для $\rho(\varepsilon x)$ равномерно по $\varepsilon \in [0,1]$. Из теоремы 1, леммы 1 и леммы 2 следует, что существует контур $l_{\delta_2}^{\alpha_2,\beta_2}$ такой, что равномерно по $\varepsilon \in [0,1]$ при каждом фиксированном γ, лежащем правее контура $l_{\delta_2}^{\alpha_2,\beta_2}$, для решения задачи (17), (18) будет выполнена оценка

$$\left\| \frac{\partial^2 v_\varepsilon(\gamma,x)}{\partial x^2} \right\| + \left\| \frac{\partial v_\varepsilon(\gamma,x)}{\partial x} \right\| + \|v_\varepsilon(\gamma,x)\| \leqslant c_9 \|f_*(\gamma,x)\|. \tag{19}$$

При помощи метода продолжения по параметру из оценки (19) получаем, что при каждом фиксированном γ, лежащем правее некоторого контура $l_{\delta_3}^{\alpha_3,\beta_3}$, задача (6), (7) однозначно разрешима в $H^2[0,\infty)$.

Теорема 3. *Пусть функции $f(\gamma,x)$, $\partial f(\gamma,x)/\partial\gamma$, $v(\gamma,x)$, $\partial v(\gamma,x)/\partial x$, $\partial^2 v(\gamma,x)/\partial x^2$ принадлежат пространству $L_2[0,\infty)$ по переменной x при каждом фиксированном γ, лежащем правее некоторого контура $l_\delta^{\alpha,\beta}$, функция $v(\gamma,x)$ является решением задачи (6), (7), для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1. Тогда существует контур $l_{\delta_3}^{\alpha_3,\beta_3}$ такой, что при каждом фиксированном γ, лежащем правее контура $l_{\delta_3}^{\alpha_3,\beta_3}$, функции $v(\gamma,x)$, $\partial v(\gamma,x)/\partial x$, $\partial^2 v(\gamma,x)/\partial x^2$ будут аналитичны по γ равномерно по $x \in [0,\infty)$.*

Доказательство. Обозначим через

$$\dot f(\gamma,x) = \frac{\partial f(\gamma,x)}{\partial \gamma}\,.$$

Рассмотрим задачу

$$(\nu\gamma + \rho_0(x)c^2)\frac{\partial^2 \dot v(\gamma,x)}{\partial x^2} + c^2\rho_0(x)\frac{\partial \dot v(\gamma,x)}{\partial x} - \gamma^2\rho_0(x)\dot v(\gamma,x)$$
$$= -\rho_0(x)f(\gamma,x) - \gamma \dot f(\gamma,x) - \nu\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2} + 2\gamma\rho_0(x)v(\gamma,x), \tag{20}$$
$$v(\gamma,x)|_{x=0} = v(\gamma,x)|_{x=\infty} = 0. \tag{21}$$

При помощи априорных оценок, полученных в теореме 1, лемме 1 и лемме 2, можно показать, что справедливо неравенство

$$\left\| \frac{\partial^2 \widetilde v(\gamma,x)}{\partial x^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial \widetilde v(\gamma,x)}{\partial x} \right\|^2 + \|\widetilde v(\gamma,x)\|^2$$
$$\leqslant c_{10}(|\Delta\gamma| \|f(\gamma+\Delta\gamma,x)\|^2 + \|f(\gamma+\Delta\gamma,x) - f(\gamma,x)\|^2 + \|\widehat f(\gamma,x) - \dot f(\gamma,x)\|^2), \tag{22}$$

где

$$\widetilde v(\gamma,x) = \frac{v(\gamma+\Delta\gamma,x) - v(\gamma,x)}{\Delta\gamma} - \dot v(\gamma,x), \qquad \widehat f(\gamma,x) = \frac{f(\gamma+\Delta\gamma,x) - f(\gamma,x)}{\Delta\gamma}\,.$$

Из (22) следует утверждение теоремы.

Лемма 3. *Пусть для функции* $v(\gamma, x)$ *выполнена оценка*

$$n\left\|\frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2}\right\|^2 + (nA + (1-n))\left\|\frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x}\right\|^2 + A^2\|v(\gamma, x)\|^2 \leqslant c_{11}\|f(\gamma, x)\|^2$$

при $A > 0$, $n = 0, 1$ *и некоторых* γ, *тогда при тех же* γ *равномерно по* $x \in [0, \infty)$ *будут справедливы оценки*

$$|v(\gamma, x)| \leqslant c_{12}A^{-3/4}\|f(\gamma, x)\|, \qquad \left|\frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x}\right| \leqslant c_{13}A^{-1/4}\|f(\gamma, x)\| \quad \textit{при} \;\; n = 1 \tag{23}$$

и

$$|v(\gamma, x)| \leqslant c_{14}A^{-1/2}\|f(\gamma, x)\| \qquad \textit{при} \quad n = 0. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть $n = 1$. Воспользуемся неравенством, полученным в [7]:

$$\sup_{x\in[0,\infty)}\left(\left|\frac{\partial^r v(\gamma, x)}{\partial x^r}\right|\right)^2 \leqslant \varepsilon^{2s-2r-1}\left\|\frac{\partial^s v(\gamma, x)}{\partial x^s}\right\|^2 + c_{15}\varepsilon^{-2r-1}\|v(\gamma, x)\|^2,$$

где $0 \leqslant r < s - 0.5$, $\varepsilon > 0$, норма берется в $L_2[0, \infty)$ по переменной x. С помощью последнего неравенства получаем следующие оценки:

$$A^{3/2}\sup_{x\in[0,\infty)}(|v(\gamma, x)|)^2 \leqslant A^k\left\|\frac{\partial^{2-k} v(\gamma, x)}{\partial x^{2-k}}\right\|^2 + c_{15}A^2\|v(\gamma, x)\|^2, \qquad k = 0, 1. \tag{25}$$

Из (25) следует первая из оценок (23). Вторая оценка в (23) и оценка (24) для случая $n = 0$ доказываются аналогично.

Лемма 4. *Пусть функция* $F(t, x)$ *удовлетворяет условию* 3, *тогда функция*

$$f(\gamma, x) = L_{t\to\gamma}[F(t, x)] \tag{26}$$

аналитична по γ *при* $\operatorname{Re}\gamma \geqslant -\varepsilon$, *где* $\varepsilon < \delta$, $\partial f(\gamma, x)/\partial\gamma \in L_2[0, \infty)$ *и верна оценка*

$$\|f(\gamma, x)\| \leqslant c_{16}(1 + |\gamma|)^{-2}.$$

Доказательство. Аналитичность функции $f(\gamma, x)$ по γ таким, что $\operatorname{Re}\gamma \geqslant -\varepsilon$, и то, что $\partial f(\gamma, x)/\partial\gamma \in L_2[0, \infty)$, очевидно. Оценка $\|f(\gamma, x)\|$ получена на основе условия 3 с помощью интегрирования по частям в правой части соотношения (26).

Теорема 4. *Пусть функция* $F(t, x)$ *удовлетворяет условию* 3, *для функции* $\rho_0(x)$ *выполнено условие* 1, *тогда функции* $V(t, x)$, $q(t, x)$, $P(t, x)$ *такие, что*

$$V(t, x) = L^{-1}_{\gamma\to t}[v(\gamma, x)], \qquad q(t, x) = L^{-1}_{\gamma\to t}[\rho(\gamma, x), \qquad P(t, x) = L^{-1}_{\gamma\to t}[p(\gamma, x)],$$

являются классическим решением задачи (1)–(3) *и принадлежат классу* T_a *при любом* $a > 0$.

Доказательство. Из теорем 1, 2 леммы 4 следует, что при $\operatorname{Re}\gamma \geqslant a$ у задачи (6), (7) существует единственное решение $v(\gamma, x)$ из $H^2[0, \infty)$. Из теоремы вложения $C^1[0; \infty) \subset H^2[0; \infty)$ следует, что $v(\gamma, x)$ один раз непрерывно дифференцируема по x. Из уравнения (6) и условия на функцию $F(t, x)$ следует, что $v(\gamma, x)$ дважды непрерывно дифференцируема по x. Из теорем 1, 3 и леммы 4 следует, что $v(\gamma, x)$ аналитична по γ при $\operatorname{Re}\gamma \geqslant a$. Из теоремы 1, 3 и 4 получаем, что при $\operatorname{Re}\gamma \geqslant a$ справедливы следующие оценки:

$$|v(\gamma, x)| \leqslant c_{17}(1+|\gamma|)^{-11/4}, \qquad \left|\frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x}\right| \leqslant c_{17}(1+|\gamma|)^{-9/4}. \tag{27}$$

Из (4)–(6) и (27) следуют неравенства

$$|p(\gamma, x)| + |\rho(\gamma, x)| \leqslant c_{18}(1+|\gamma|)^{-13/4}, \qquad \left|\frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2}\right| \leqslant c_{19}(1+|\gamma|)^{-7/4}. \tag{28}$$

Из оценок (27), (28) следует, что функции $V(t, x)$, $q(t, x)$, $P(t, x)$ (где $a > 0$) принадлежат классу T_a.

Из (27) и предельной теоремы о преобразовании Лапласа следует, что

$$\lim_{t\to+0} V(t, x) = \lim_{|\gamma|\to\infty} |\gamma v(\gamma, x)| = 0.$$

Равенства

$$\lim_{t\to+0} q(t, x) = \lim_{t\to+0} P(t, x) = 0$$

доказываются аналогично. Также из оценки (27) и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует, что

$$V(t, x)|_{x=0} = V(t, x)|_{x=\infty} = 0.$$

Теорема 5. *Пусть функция $F(t, x)$ удовлетворяет условию 3, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1, тогда решение $V(t, x)$, $q(t, x)$, $P(t, x)$ задачи (1)–(3) единственно в классе функций T_a при произвольном $a > 0$.*

Доказательство проводится при помощи априорной оценки из теоремы 1.

Приведем, на наш взгляд, главный результат работы.

Теорема 6. *Пусть функция $F(t, x)$ удовлетворяет условию 3, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1. Тогда для компоненты $V(t, x)$ решения задачи (1)–(3) справедлива оценка $|V(t, x)| \leqslant c_{21}t^{-1/4}$ при $t \to \infty$ с постоянной $c_{21} > 0$, равномерной по $x \in [0; \infty)$.*

Доказательство. Из интегральной теоремы Коши и оценок, полученных в теореме 1 и леммах 1–4, следует, что справедливо представление

$$V(t, x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_{\delta_3}^{\alpha_3,\beta_3}} e^{\gamma t} v(\gamma, x)\, d\gamma. \tag{29}$$

После параметризации контура $l_{\delta_3}^{\alpha_3,\beta_3}$ с учетом представления (29) и оценок, полученных в теореме 1 и леммах 1–4, имеем, что

$$|V(t, x)| \leqslant c_{20}\left(\int_0^{\delta} e^{-a_1\xi^2 t}\xi^{1/2}\, d\xi + O(e^{-\varepsilon_7 t})\right) \leqslant c_{21}t^{-1/4}, \qquad t \to \infty,$$

где $a_1 > 0$, $\varepsilon_7 > 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Л. М. Бреховских, В. В. Гончаров, *Введение в механику сплошной среды*, Наука, М., 1982.

[2] А. В. Глушко, "Асимптотические колебания и интрузия в вязкой сжимаемой стратифицированной жидкости", *Докл. РАН*, **365**:1 (1999), 26–31.

[3] А. В. Глушко, *Асимптотические методы в задачах гидродинамики*, Изд-во ВГУ, Воронеж, 2003.

[4] А. В. Глушко, С. О. Рыбаков, "Теорема о локализации для задачи динамики вращающейся вязкой сжимаемой жидкости", *Сиб. матем. журн.*, **33**:1 (1992), 32–43.

[5] А. В. Глушко, С. О. Рыбаков, "Асимптотика по времени решения начально-краевой задачи в полупространстве для уравнения динамики вращающейся вязкой сжимаемой жидкости", *Сиб. матем. журн.*, **33**:4 (1992), 42–58.

[6] А. С. Рябенко, "Оценка при $t \to \infty$ решения задачи о распределении тепла в полупространстве с переменным коэффициентом теплопроводности", *Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Матем.*, 2007, № 1, 95–99.

[7] В. П. Глушко, С. Г. Крейн, "Неравенства для норм в пространствах L_p с весом", *Сиб. матем. журн.*, **1**:3 (1960), 343–382.

А. В. Глушко
Воронежский государственный университет
E-mail: mail@angl.vrn.ru

Поступило
21.01.2008

А. С. Рябенко
Воронежский государственный университет
E-mail: alexr-83@yandex.ru