Н. Замани, О градуированных дистрибутивных модулях, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 4, 528–535

DOI: 10.4213/mzm4581

Математические заметки

Том 83 выпуск 4 апрель 2008

УДК 512.55

О градуированных дистрибутивных модулях

Н. Замани

Предложены описания градуированных дистрибутивных модулей над $\mathbb{Z}$-градуированным коммутативным кольцом R с единицей.

Библиография: 15 названий.

Пусть R – $\mathbb{Z}$-градуированное коммутативное кольцо с отличной от нуля единицей и M – $\mathbb{Z}$-градуированный R-модуль. Будем говорить, что M является *градуированным дистрибутивным* модулем (*г.д. модулем*), если решетка его градуированных подмодулей дистрибутивна, т.е. если

$$(X+Y)\cap Z=(X\cap Z)+(Y\cap Z)$$

для всех градуированных подмодулей X, Y и Z модуля M (равносильное условие: $(X\cap Y)+Z=(X+Z)\cap(Y+Z)$ для всех градуированных подмодулей X, Y и Z модуля M). Понятие дистрибутивных модулей независимо ввели и изучили Дэвисон [1] и Стефенсон [2]. Структуре и описанию дистрибутивных модулей посвящены многие важные заслуживающие внимания исследования (см., например, [3]–[7]), однако, насколько известно автору, градуированная версия понятия дистрибутивных модулей изучена мало [8], [9].

В этой статье предложено несколько характеризаций г.д. модулей. В частности, доказана следующая

Теорема А. *Следующие утверждения равносильны*:

(i) *M является г.д. R-модулем*;

(ii) *любой *замкнутый подмодуль M является *неприводимым*;

(iii) *для любых $i\in\mathbb{Z}$ и $x,y\in M_i$ и всякого *максимального идеала $\mathfrak{m}$ градуированные подмодули $Rx(\mathfrak{m})$ и $Ry(\mathfrak{m})$ сравнимы по включению*;

(iv) *для любого градуированного подмодуля N модуля M и любого *максимального идеала $\mathfrak{m}$, содержащего $N:_R M$, модуль $^*E_R(M/N(\mathfrak{m}))$ *неразложим.*

Теорема Б. *Для градуированного R-модуля M следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *M является г.д. модулем*;

(ii) *для любого собственного градуированного подмодуля N модуля M разложение $N=\bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{mK}(M/N)}N(\mathfrak{p})$ *неприводимо.*

Для доказательства теорем А и Б нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения. Начнем с обозначений и определений. Пусть $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} R_i$ и $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$. Мы будем говорить, что элементы M_i *однородны* степени i и обозначать множество всех однородных элементов кольца R (соответственно модуля M) через $H(R)$ (соответственно $H(M)$). Для данного замкнутого относительно умножения множества $S \subseteq H(R)$ мы можем превратить кольцо дробей $S^{-1}R$ в градуированное кольцо, полагая

$$(S^{-1}R)_i = \{r/s : r \in H(R),\, s \in S,\, i = \deg(r) - \deg(s)\}$$

для каждого $i \in \mathbb{Z}$, где $\deg(r)$ – степень однородного элемента r. Напомним, что модуль $S^{-1}M$ можно представить как $S^{-1}R \otimes_R M$, т.е. в виде градуированного $S^{-1}R$-модуля. Если $\mathfrak{p}$ является градуированным простым идеалом и $S = H(R)\setminus\mathfrak{p}$, то градуированное кольцо $S^{-1}R$ (соответственно градуированный $S^{-1}R$-модуль $S^{-1}M$) обозначается через $R_{(\mathfrak{p})}$ (соответственно через $M_{(\mathfrak{p})}$) и называется *однородной локализацией* кольца R (соответственно модуля M) по $\mathfrak{p}$. Градуированный идеал $\mathfrak{m}$ называется **максимальным*, если он максимален в решетке всех градуированных идеалов кольца R. Мы говорим, что кольцо R **квазилокально*, если оно имеет единственный *максимальный идеал. Пусть N – градуированный подмодуль модуля M и $\mathfrak{p}$ – градуированный простой идеал кольца R. Тогда объединение $N(\mathfrak{p}) = \bigcup_{s\in H(R)\setminus\mathfrak{p}} (N :_M s)$ является градуированным подмодулем модуля M, содержащим N.

Очевидно, $N(\mathfrak{p}) = N_{(\mathfrak{p})} \cap M$ и, если модуль M конечно порожден, то из включения $N :_R M \subseteq \mathfrak{p}$ вытекает, что $N(\mathfrak{p}) :_R M \subseteq \mathfrak{p}$. Кроме того, если идеал $\mathfrak{p}$ минимален над $N :_R M$, то $N(\mathfrak{p})$ является $\mathfrak{p}$-первичным подмодулем модуля M. Положим

$$Z(N) = \{a \in R : N \subset (N :_M a)\}.$$

Тогда множество $R \setminus Z(N)$ замкнуто относительно умножения в кольце R. Будем говорить, что N является **замкнутым подмодулем* модуля M, если само множество $Z(N)$ является некоторым идеалом $\mathfrak{p}$ кольца R. В таком случае $\mathfrak{p}$ является простым идеалом кольца R и мы говорим, что подмодуль N $\mathfrak{p}$-**замкнут*. На самом деле $Z(N)$ является в этом случае градуированным простым идеалом. Действительно, пусть $a = a_m + \dots + a_n \in Z(N)$ – разложение элемента a в сумму однородных элементов a_i. Тогда существует $x \in H(M)\setminus N$, для которого $a_m x + \dots + a_n x = ax \in N$. Поскольку подмодуль N градуирован, отсюда вытекает, что $a_i x \in N$ для всех $i = m, \dots, n$. Следовательно, $N \subset N :_M a_i$ для любого $i = m, \dots, n$, т.е. каждая однородная составляющая элемента a принадлежит идеалу $Z(N)$.

Наконец, мы говорим, что N является **неприводимым* подмодулем модуля M, если из того, что $N = N_1 \cap N_2$ для градуированных подмодулей N_1 и N_2 модуля M, вытекает, что либо $N = N_1$, либо $N = N_2$.

Предложение 1. *Пусть N – *неприводимый подмодуль модуля M. Тогда N является *замкнутым подмодулем модуля M.*

Доказательство. Пусть $r, s \in Z(N)$. Тогда $N \subset (N :_M r)$ и $N \subset (N :_M s)$. По предположению $N \subset (N :_M r) \cap (N :_M s) = (N :_M r - s)$, а это означает, что $r - s \in Z(N)$. Требуемое утверждение вытекает из того, что произведение элемента кольца R и элемента множества $Z(N)$ всегда принадлежит $Z(N)$.

Предложение 2. *Любой градуированный подмодуль модуля M является пересечением *замкнутых подмодулей.*

Доказательство. Модуль M *неприводим и, следовательно, *замкнут; значит, пересечение всех *замкнутых подмодулей M, содержащих N, непусто. Следовательно, для того чтобы доказать требуемое утверждение, достаточно показать, что для каждого $m \in H(M) \setminus N$ существует *замкнутый подмодуль C модуля M, который содержит N и не содержит m. Пусть

$$\sum = \{L \supseteq N : L \text{ является градуированным подмодулем } M \text{ и не содержит } m\}.$$

Тогда семейство $\sum$ непусто, и по лемме Цорна оно имеет максимальный по включению элемент; обозначим этот элемент через C. Покажем, что C является *замкнутым подмодулем M. Пусть $r, s \in Z(C)$. Тогда существуют $x, y \in H(M) \setminus C$, для которых $rx, sy \in C$. Из максимальности C вытекает, что $m \in C + Rx$ и $m \in C + Ry$. Следовательно, $rm \in rC + Rrx \subseteq C$ и $sm \in sC + Rsy \subseteq C$. Поэтому $(r - s)m \in C$ и $r - s \in Z(C)$. Таким образом, C является *замкнутым подмодулем M.

Лемма 3. *Следующие утверждения равносильны*:

(i) *M является г.д. R-модулем*;

(ii) *$(Rx :_R y) + (Ry :_R x) = R$ для всех $x, y \in H(M)$ таких, что* $\deg(x) = \deg(y)$.

Если при этом кольцо R *квазилокально, то каждое из утверждений (i) *и* (ii) *эквивалентно следующим утверждениям*:

(iii) *множество всех градуированных подмодулей модуля M линейно упорядочено по включению*;

(iv) *множество всех градуированных циклических подмодулей модуля M линейно упорядочено по включению.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $x, y \in H(M)$ таковы, что $\deg(x) = \deg(y)$. Тогда $x \in Rx \cap (Ry + R(x - y))$. По условию $x \in Rx \cap Ry + Rx \cap R(x - y)$. Значит, существуют $r, s \in R_0$, для которых $x = ry + s(x - y)$. Следовательно, $sy \in Rx$. С другой стороны, $(1 - s)x = (r - s)y$, откуда вытекает, что $1 - s \in (Ry :_R x)$. Таким образом,

$$1 = s + (1 - s) \in (Rx :_R y) + (Ry :_R x),$$

что и требовалось.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть X, Y и Z – градуированные подмодули модуля M, и пусть $x \in X \cap (Y + Z)$ – однородный элемент. Тогда существуют однородные элементы $y \in Y$ и $z \in Z$ такие, что $x = y + z$ и $\deg(x) = \deg(y) = \deg(z)$. По условию $(Rx :_R y) + (Ry :_R x) = R$. Значит, существует $r \in R$, для которого $r \in (Rx :_R y)$ и $1 - r \in (Ry :_R x)$. Следовательно, $x = (1 - r)x + ry + rz = sy + rz$ для некоторого $s \in R$. Это означает, что

$$x \in (Rx \cap Ry) + (Rx \cap Rz) \subseteq (X \cap Y) + (X \cap Z).$$

Отсюда вытекает требуемое утверждение, потому что обратное включение всегда имеет место.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) очевидно.

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Предположим, что (iii) не выполнено. Тогда существуют градуированные подмодули X и Y модуля M, для которых $X \nsubseteq Y$ и $Y \nsubseteq X$. Значит, найдутся $x \in H(X) \setminus Y$ и $y \in H(Y) \setminus X$. Следовательно, $Rx \nsubseteq Ry$ и $Ry \nsubseteq Rx$, а это противоречит (iv).

Если кольцо R *квазилокально, то утверждения (i) и (iv) эквивалентны по лемме 5.22 из [8].

Лемма 4 [8; лемма 5.24]. *Модуль M является г.д. R-модулем тогда и только тогда, когда $M_{(\mathfrak{p})}$ является г.д. $R_{(\mathfrak{p})}$-модулем для каждого градуированного простого (*максимального) идеала $\mathfrak{p}$ кольца R.*

Лемма 5. *Следующие условия равносильны:*

(i) *M является г.д. R-модулем;*

(ii) *для любого собственного градуированного подмодуля N модуля M и любого градуированного простого (*максимального) идеала $\mathfrak{p}$ кольца R, содержащего $N :_R M$, $N_{(\mathfrak{p})}$ является *неприводимым подмодулем модуля $M_{(\mathfrak{p})}$.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть N – собственный градуированный подмодуль модуля M и $\mathfrak{p}$ – градуированный простой идеал кольца R, содержащий $N :_R M$. Предположим, что $N_{(\mathfrak{p})} = K_{(\mathfrak{p})} \cap L_{(\mathfrak{p})}$. (Заметим, что любой градуированный подмодуль модуля $M_{(\mathfrak{p})}$ можно представить как однородную локализацию некоторого градуированного подмодуля модуля M по $\mathfrak{p}$.) По лемме 4 $M_{(\mathfrak{p})}$ является г.д. модулем над *квазилокальным кольцом $R_{(\mathfrak{p})}$. Значит, по лемме 3, либо $L_{(\mathfrak{p})} \subseteq K_{(\mathfrak{p})}$, либо $K_{(\mathfrak{p})} \subseteq L_{(\mathfrak{p})}$, т.е. либо $N_{(\mathfrak{p})} = L_{(\mathfrak{p})}$, либо $N_{(\mathfrak{p})} = K_{(\mathfrak{p})}$. Следовательно, модуль $N_{(\mathfrak{p})}$ неприводим.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Ввиду лемм 3 и 4 достаточно доказать, что для каждого градуированного простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца R любые два градуированных подмодуля модуля $M_{(\mathfrak{p})}$ сравнимы. Итак, пусть $\mathfrak{p}$ – градуированный простой идеал кольца R, и пусть $K_{(\mathfrak{p})}$ и $L_{(\mathfrak{p})}$ – собственные градуированные подмодули модуля $M_{(\mathfrak{p})}$. Можно считать, что $(M :_R K \cap L) \subseteq \mathfrak{p}$. По предположению $K_{(\mathfrak{p})} \cap L_{(\mathfrak{p})} = (K \cap L)_{(\mathfrak{p})}$ является *неприводимым подмодулем модуля $M_{(\mathfrak{p})}$, так что либо $K_{(\mathfrak{p})} \subseteq K_{(\mathfrak{p})} \cap L_{(\mathfrak{p})}$, либо $L_{(\mathfrak{p})} \subseteq K_{(\mathfrak{p})} \cap L_{(\mathfrak{p})}$. Следовательно, либо $K_{(\mathfrak{p})} \subseteq L_{(\mathfrak{p})}$, либо $L_{(\mathfrak{p})} \subseteq K_{(\mathfrak{p})}$, откуда вытекает требуемое утверждение.

Лемма 6. *Пусть N – градуированный подмодуль модуля M и $\mathfrak{p}$ – градуированный простой (*максимальный) идеал кольца R. Тогда $N_{(\mathfrak{p})}$ является *неприводимым подмодулем модуля $M_{(\mathfrak{p})}$ в том и только том случае, если $N(\mathfrak{p})$ является *неприводимым подмодулем модуля M.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $N(\mathfrak{p}) = K \cap L$ для некоторых градуированных подмодулей K и L модуля M. Из однородной локализации по $\mathfrak{p}$ и равенства $(N(\mathfrak{p}))_{(\mathfrak{p})} = N_{(\mathfrak{p})}$ вытекает, что $N_{(\mathfrak{p})} = K_{(\mathfrak{p})} \cap L_{(\mathfrak{p})}$. Значит, по предположению либо $N_{(\mathfrak{p})} = K_{(\mathfrak{p})}$, либо $N_{(\mathfrak{p})} = L_{(\mathfrak{p})}$, откуда следует, что либо $N(\mathfrak{p}) = K$, либо $N(\mathfrak{p}) = L$.

($\Leftarrow$) Пусть K и L – градуированные подмодули модуля M, для которых $N_{(\mathfrak{p})} = K_{(\mathfrak{p})} \cap L_{(\mathfrak{p})}$. Тогда

$$N(\mathfrak{p}) = N_{(\mathfrak{p})} \cap M = (K_{(\mathfrak{p})} \cap M) \cap (L_{(\mathfrak{p})} \cap M) = K(\mathfrak{p}) \cap L(\mathfrak{p}).$$

По предположению либо $N(\mathfrak{p}) = L(\mathfrak{p})$, либо $N(\mathfrak{p}) = K(\mathfrak{p})$, и из однородной локализации по $\mathfrak{p}$ следует, что либо $N_{(\mathfrak{p})} = K_{(\mathfrak{p})}$, либо $N_{(\mathfrak{p})} = L_{(\mathfrak{p})}$.

Из сделанных выше наблюдений вытекает следующее

Следствие 7. *Следующие утверждения равносильны*:

(a) *M является г.д. R-модулем*;

(b) *для всякого градуированного подмодуля N модуля M и любого градуированного простого (*максимального) идеала $\mathfrak{p}$ кольца R, содержащего $N :_R M$, $N(\mathfrak{p})$ является *неприводимым подмодулем модуля M.*

Лемма 8. *Пусть N – конечно порожденный градуированный подмодуль модуля M и $\mathfrak{p}$ – градуированный простой идеал кольца R, содержащий $N :_R M$. Предположим, что $N_{(\mathfrak{p})} \neq 0$. Тогда $(\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p})$ является *замкнутым подмодулем модуля M.*

Доказательство. Покажем, что $Z((\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$. Возьмем $r \in Z((\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p}))$. Существует $m \in H(M) \setminus (\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p})$, для которого $rm \in (\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p})$. Следовательно, $(\mathfrak{p}N :_R m) \subseteq \mathfrak{p}$ и найдется $t \in H(R) \setminus \mathfrak{p}$, для которого $rtm \in \mathfrak{p}N$. Значит, $rt \in \mathfrak{p}$, откуда $r \in \mathfrak{p}$. Таким образом, $Z((\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p})) \subseteq \mathfrak{p}$. Чтобы доказать обратное включение, возьмем $r \in \mathfrak{p}$. Поскольку подмодуль N конечно порожден и $N_{(\mathfrak{p})} \neq 0$, из градуированной версии леммы Накаямы (см. [10; лемма I.7.5]) вытекает, что $(\mathfrak{p}N)_{(\mathfrak{p})} \neq N_{(\mathfrak{p})}$. Значит, $(\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p}) \neq N(\mathfrak{p})$. В любом случае $(\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p}) \subseteq N(\mathfrak{p})$ и $N(\mathfrak{p}) \subseteq (\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p}) :_M \mathfrak{p}$, так что $(\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p}) \subset (\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p}) :_M \mathfrak{p}$. Отсюда вытекает существование элемента $x \in H(M) \setminus (\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p})$, для которого $rx \in (\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p})$, т.е. $(\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p}) \subset ((\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p}) :_M r)$. Таким образом, $r \in Z((\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p}))$, что и требовалось.

Следуя [11; с. 72], мы говорим, что простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца R является *ассоциированным простым дивизором в смысле Круля* модуля M, если для каждого элемента $t \in \mathfrak{p}$ существует элемент $x \in M$ такой, что $t \in 0 :_R x \subseteq \mathfrak{p}$. Пусть $\mathrm{K}(M)$ (соответственно, $\mathrm{mK}(M)$) обозначает множество всех ассоциированных простых дивизоров в смысле Круля модуля M (соответственно, множество всех максимальных элементов в $\mathrm{K}(M)$). Поскольку M – градуированный R-модуль, каждый элемент $\mathfrak{p} \in \mathrm{K}(M)$ градуирован; кроме того, для каждого $t \in \mathfrak{p}$ можно найти однородный элемент x такой, что $t \in 0 :_R x \subseteq \mathfrak{p}$. Чтобы убедиться в этом, возьмем $\mathfrak{p} \in \mathrm{K}(M)$. Пусть $t_m + \dots + t_n = t \in \mathfrak{p}$ – разложение элемента t в сумму однородных элементов t_i степени i. По предположению существует элемент $x_u + \dots + x_v = x \in M$, для которого $tx = 0$ и $0 :_R x \subseteq \mathfrak{p}$. Таким образом, мы имеем уравнения $\sum_{i+j=s} t_i x_j = 0$ для $s = m+u, \dots, n+v$. Значит, $t_m x_u = 0$; по индукции получаем $t_m^i x_{u+i-1} = 0$ для всех $i \geqslant 1$. Следовательно, $t_m^l x = 0$ для достаточно больших l. Поскольку $\mathfrak{p}$ является простым идеалом, $t_m \in \mathfrak{p}$. Повторяя эту процедуру, мы убеждаемся в том, что все однородные составляющие элемента t принадлежат $\mathfrak{p}$. Чтобы доказать второе утверждение, заметим, что $\bigcap_{i=u}^{i=v}(0 :_R x_i) \subseteq \mathfrak{p}$. Поскольку $\mathfrak{p}$ – простой идеал, найдется j, для которого $(0 :_R x_j) \subseteq \mathfrak{p}$. Это доказывает лемму, потому что $t \in (0 :_R x_i)$ для всех $i = u, \dots, v$.

Простой идеал $\mathfrak{p}$ называется *слабым ассоциированным простым дивизором в смысле Бурбаки* модуля M, если он является минимальным простым дивизором $0 :_R x$ для некоторого $x \in M$. Мы будем обозначать семейство всех слабых ассоциированных простых дивизоров в смысле Бурбаки модуля M через $\mathrm{wB}(M)$. Как известно (см., например, [12; лемма 2.15]), множество $\mathrm{wB}(M)$ непусто. То, что множество $\mathrm{K}(M)$ непусто и каждый элемент семейства $\mathrm{wB}(M)$ градуирован, вытекает из следующего утверждения.

Предложение 9 [13; теорема 1]. *Во введенных выше обозначениях* $\mathrm{wB}(M) \subseteq \mathrm{K}(M)$.

Пусть ${}^*\mathrm{Spec}(R)$ – множество всех градуированных простых идеалов кольца R. Заметим, что для всякого собственного подмодуля N модуля M $N = \bigcap_{\mathfrak{p}\in {}^*\mathrm{Spec}(R)} N(\mathfrak{p})$. Члены $N(\mathfrak{p})$ этого представления, вообще говоря, не обязаны быть *замкнутыми. Однако для градуированных простых идеалов из семейства $\mathrm{mK}(M/N)$ все компоненты выписанного выше представления подмодуля N *замкнуты. Имеет место следующая теорема.

Теорема 10. *Пусть N – собственный градуированный подмодуль модуля M. Тогда $N = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{mK}(M/N)} N(\mathfrak{p})$ и все компоненты $N(\mathfrak{p})$ являются $\mathfrak{p}$-*замкнутыми подмодулями для различных несравнимых градуированных простых идеалов $Z(N(\mathfrak{p}))=\mathfrak{p}$.*

Доказательство. Заметим, что $N = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{mK}(M/N)} N(\mathfrak{p})$. Чтобы убедиться в этом, возьмем $x \in H(M) \setminus N$. Пусть $\mathfrak{q}$ – минимальный простой дивизор $N :_R x$. Тогда существует $\mathfrak{p} \in \mathrm{mK}(M/N)$, для которого $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Следовательно, $N :_R x \subseteq \mathfrak{p}$, так что x не является элементом подмодуля $N(\mathfrak{p})$. Значит, x не принадлежит пересечению $\bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{mK}(M/N)} N(\mathfrak{p})$, что и требовалось.

Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно проверить, что если $\mathfrak{p} \in \mathrm{K}(M/N)$, то подмодуль $N(\mathfrak{p})$ $\mathfrak{p}$-*замкнут, т.е. $Z(N(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$. Предположим, что $r = r_m + \dots + r_n$ не принадлежит идеалу $\mathfrak{p}$. Тогда существует $m \leqslant j \leqslant n$ такое, что r_j не принадлежит идеалу $\mathfrak{p}$. Покажем, что $(N(\mathfrak{p}) :_M r) = N(\mathfrak{p})$. Возьмем $x \in H(M)$, для которого $rx \in N(\mathfrak{p})$. Поскольку $N(\mathfrak{p})$ является градуированным подмодулем модуля M, все однородные составляющие элемента rx принадлежат $N(\mathfrak{p})$; в частности, $r_j x \in N(\mathfrak{p})$. Отсюда вытекает существование $s \in H(R) \setminus \mathfrak{p}$, для которого $s r_j x \in N$; следовательно, $x \in N(\mathfrak{p})$. Таким образом, $Z(N(\mathfrak{p})) \subseteq \mathfrak{p}$. Чтобы доказать обратное включение, возьмем $r \in \mathfrak{p}$. Поскольку $\mathfrak{p} \in \mathrm{K}(M/N)$, найдется $x \in M \setminus N(\mathfrak{p})$, для которого $r \in N(\mathfrak{p}) :_R x \subseteq \mathfrak{p}$. Следовательно, $N(\mathfrak{p}) \subset N(\mathfrak{p}) :_M r$, а значит, $r \in Z(N(\mathfrak{p}))$.

В категории градуированных R-модулей объектами являются градуированные R-модули. Морфизм $f\colon M \to M'$ в этой категории – это гомоморфизм R-модулей такой, что $f(M_i) \subseteq M'_i$ для всех $i \in \mathbb{Z}$. Градуированный R-модуль E называется **инъективным*, если он является инъективным объектом в категории градуированных R-модулей. Расширение $N \subset M$ градуированных R-модулей называется **существенным расширением*, если для любого градуированного подмодуля $0 \neq U \subset M$ имеем $U \cap N \neq 0$. По аналогии с определением в неградуированном случае модуль E называется **инъективной оболочкой* модуля N, если он является *инъективным *существенным расширением модуля N. Ввиду [14; 3.6.2] любой градуированный R-модуль X имеет единственную (с точностью до изоморфизма) *инъективную оболочку. Обозначим *инъективную оболочку модуля X через ${}^*E(X)$. Градуированный R-модуль называется **неразложимым*, если он ненулевой и не разлагается в прямую сумму двух собственных градуированных подмодулей. Используя те же рассуждения, что и в неградуированном случае, легко показать, что градуированный подмодуль U модуля M *неприводим, если и только если оболочка ${}^*E(M/U)$ *неразложима.

Доказательство теоремы А. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть N – *замкнутый собственный подмодуль модуля M, для которого $Z(N)=\mathfrak{p}$. Тогда $N :_R M \subseteq \mathfrak{p}$ и $N(\mathfrak{p})=N$. Требуемое утверждение вытекает из следствия 7.

(ii) $\Rightarrow$ (i). По лемме 4 достаточно показать, что для любого *максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца R модуль $M_{(\mathfrak{m})}$ является г.д. модулем над *квазилокальным кольцом $R_{(\mathfrak{m})}$. Согласно лемме 3 для этой цели достаточно показать, что для любых $x,y\in H(M)$ либо $\langle x/1\rangle \subseteq \langle y/1\rangle$, либо $\langle y/1\rangle \subseteq \langle x/1\rangle$. Пусть $N=\langle x,y\rangle$ и $N_{(\mathfrak{m})}\neq 0$. (Если $N_{(\mathfrak{m})}=0$, то $x/1=y/1=0$, и доказывать нечего.) По лемме 8 $(\mathfrak{m}N)(\mathfrak{m})$ является *замкнутым подмодулем модуля M; по предположению он *неприводим. Значит, по лемме 6 $(\mathfrak{m}N)_{(\mathfrak{m})}$ является *неприводимым подмодулем модуля $M_{(\mathfrak{m})}$. Но $R_{(\mathfrak{m})}/(\mathfrak{m})R_{(\mathfrak{m})}$ – либо поле, либо кольцо вида $k[t,t^{-1}]$, где t – трансцендентный над k однородный элемент положительной степени (см. [14; лемма 1.5.7]). Согласно [15; лемма 1.1.1] любой градуированный модуль над $k[t,t^{-1}]$ является свободным градуированным модулем; значит, $N_{(\mathfrak{m})}/\mathfrak{m}N_{(\mathfrak{m})}$ – либо конечномерное векторное пространство над полем $R_{(\mathfrak{m})}/\mathfrak{m}R_{(\mathfrak{m})}$, либо свободный градуированный модуль над $R_{(\mathfrak{m})}/\mathfrak{m}R_{(\mathfrak{m})}$ ранга 1. В любом случае либо $N_{(\mathfrak{m})}=\langle x/1\rangle+(\mathfrak{m}N)_{(\mathfrak{m})}$, либо $N_{(\mathfrak{m})}=\langle y/1\rangle+(\mathfrak{m}N)_{(\mathfrak{m})}$. Следовательно, по градуированной версии леммы Накаямы либо $N_{(\mathfrak{m})}=\langle x/1\rangle$, либо $N_{(\mathfrak{m})}=\langle y/1\rangle$, а значит, либо $\langle x/1\rangle \subseteq \langle y/1\rangle$, либо $\langle y/1\rangle \subseteq \langle x/1\rangle$, что и требовалось.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Предположим противное; тогда существует *максимальный идеал $\mathfrak{m}$ такой, что $Rx(\mathfrak{m}) \nsubseteq Ry(\mathfrak{m})$ и $Ry(\mathfrak{m}) \nsubseteq Rx(\mathfrak{m})$ для некоторых $i\in\mathbb{Z}$ и $x,y\in M_i$. Следовательно, x не является элементом $Ry(\mathfrak{m})$, а y не является элементом $Rx(\mathfrak{m})$. Из предположения и леммы 3 вытекает существование элемента $r\in R$, для которого $rx\in Ry$ и $(1-r)y\in Rx$. Поскольку $\mathfrak{m}$ является *максимальным идеалом, по крайней мере один из элементов r и $1-r$ не содержится в $\mathfrak{m}$. Таким образом, по крайней мере одна из однородных составляющих элемента r или $1-r$ не содержится в $\mathfrak{m}$. В первом случае $x\in Ry(\mathfrak{m})$, а во втором – $y\in Rx(\mathfrak{m})$; в любом случае получаем противоречие.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что (i) не выполнено. Тогда по лемме 3 существует *максимальный идеал $\mathfrak{m}$ кольца R такой, что $(Ry :_R x)+(Rx :_R y)\subseteq \mathfrak{m}$ для некоторых $i\in\mathbb{Z}$ и $x,y\in M_i$. Имеем $y\in Ry(\mathfrak{m})\setminus Rx(\mathfrak{m})$ и $x\in Rx(\mathfrak{m})\setminus Ry(\mathfrak{m})$ в противоречие с (iii).

(i) $\Leftrightarrow$ (iv). Требуемая эквивалентность вытекает из сказанного в абзаце перед доказательством теоремы и следствия 7.

Предыдущая теорема утверждает, что для любого градуированного подмодуля N г.д. модуля M представление N в виде пересечения *замкнутых модулей из теоремы А является разложением N на *неприводимые компоненты. Теорема Б показывает, что это условие достаточно для того, чтобы модуль M был г.д. модулем.

Доказательство теоремы Б. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) вытекает из теорем 10 и А.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Согласно леммам 3 и 4 достаточно показать, что для каждого *максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца R градуированные циклические подмодули модуля $M_{(\mathfrak{m})}$ вполне упорядочены. Возьмем $x,y\in H(M)$. Положим $N=\langle x,y\rangle$. По предположению $\mathfrak{m}N=\bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{mK}(M/\mathfrak{m}N)}(\mathfrak{m}N)(\mathfrak{p})$ является *неприводимым разложением подмодуля

$\mathfrak{m}N$. Покажем, что $\mathfrak{m} \in \mathrm{mK}(M/\mathfrak{m}N)$. Если это не так, то $(\mathfrak{m}N)(\mathfrak{p}) = N(\mathfrak{p})$ для всех $\mathfrak{p} \in \mathrm{mK}(M/\mathfrak{m}N)$. Отсюда следует, что $\mathfrak{m}N = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{MaxK}(M/\mathfrak{m}N)} N(\mathfrak{p}) \supseteq N$. Но из того, что подмодуль N конечно порожден и градуирован вытекает, что $N \not\subseteq \mathfrak{m}N$. Значит, $\mathfrak{m} \in \mathrm{mK}(M/\mathfrak{m}N)$, и $(\mathfrak{m}N)(\mathfrak{m})$ – *неприводимый подмодуль модуля M. По лемме 6 $(\mathfrak{m}N)_{(\mathfrak{m})}$ является *неприводимым подмодулем модуля $M_{(\mathfrak{m})}$. Теперь утверждение теоремы доказывается так же, как импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) в теореме A.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] T. M. K. Davison, “Distributive homomorphism of rings and modules”, *J. Reine Angew. Math.*, **270** (1974), 28–34.

[2] W. Stephenson, “Modules whose lattice of submodules is distributive”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **28** (1974), 291–310.

[3] V. Erdoğdu, “Distributive modules”, *Canad. Math. Bull.*, **30**:2 (1987), 248–254.

[4] V. Erdoğdu, “The distributive hull of a ring”, *J. Algebra*, **132**:2 (1990), 263–269.

[5] V. Erdoğdu, “Cyclically decomposable distributive modules”, *Comm. Algebra*, **25**:5 (1997), 1635–1639.

[6] A. A. Tuganbaev, *Semidistributive Modules and Rings*, Math. Appl., **449**, Klüwer Academic, Dordrecht–Boston–London, 1998.

[7] A. A. Tuganbaev, *Distributive Modules and Related Topics*, Algebra, Logic and Appl., **12**, Gordon & Breach, Amsterdam, 1999.

[8] J. Escoriza, B. Torrecillas, “Multiplication objects in commutative Grothendieck categories”, *Comm. Algebra*, **26**:6 (1998), 1867–1883.

[9] R. Naghipour, N. Zamani, “Graded distributive modules”, *Southeast Asian Bull. Math.*, **29**:6 (2005), 1095–1099.

[10] C. Nastasescu, F. van Oystaeyen, *Graded Ring Theory*, North-Holland Math. Library, **28**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1982.

[11] D. H. Underwood, “On some uniqueness questions in primary representations of ideals”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **9** (1969), 69–94.

[12] M. D. Larsen, P. J. McCarthy, *Multiplicative Theory of Ideals*, Pure Appl. Math., **43**, Academic Press, New York–London, 1971.

[13] R. A. Kuntz, “Associated prime divisors in the sense of Krull”, *Canad. J. Math.*, **24** (1972), 808–818.

[14] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen–Macaulay Rings*, Cambridge Stud. Adv. Math., **39**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[15] S. Goto, K. Watanabe, “On graded rings. I”, *J. Math. Soc. Japan*, **30**:2 (1978), 179–213.

Н. Замани
Ардабильский университет им. Мохагега, Иран
E-mail: naserzak@yahoo.com

Поступило
03.01.2007