В. И. Филиппов, Возмущение тригонометрической системы в $L_1(0,\pi)$, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 3, 429–436

DOI: 10.4213/mzm2829

Математические заметки

том 80 выпуск 3 сентябрь 2006

УДК 517.5

ВОЗМУЩЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В $L_1(0,\pi)$

В. И. Филиппов

В работе изучается специальное возмущение функциональной системы, которая получается из ядра Фейера. Показано как это согласуется с устойчивостью базисов и полных систем, а также с устойчивостью тригонометрической системы. Дается алгоритм приближения по системам, полученным возмущением исходной системы.

Библиография: 9 названий.

В работе [1] с помощью ядра Фейера строится система вида

$$F_0(x)\equiv 1,$$
$$F_k^{(n)}=\frac{1}{2^{2(n+1)}}\left(\frac{\sin 2^n(x-(2k-1)\pi/2^n)}{\sin\frac12(x-(2k-1)\pi/2^n)}\right)^2=\frac{1}{2^{2(n+1)}}\,\frac{1-\cos(2^{n+1}x)}{1-\cos(x-(2k-1)\pi/2^n)}, \tag{1}$$

где $n=0,1,2,\dots$, $k=1,\dots,2^n$, и устанавливается, что система (1) является диадическим интерполяционным базисом в пространстве непрерывных 2π-периодических функций. В данной работе мы рассматриваем возмущение системы (1), а, именно, систему (8) и возмущение тригонометрической системы в пространстве $L_1(0,\pi)$. Устойчивость полных систем в банаховых пространствах рассматривалась в работе [2], а возмущения полных минимальных систем рассматривались в работах [3]–[5].

Приведем теоремы A и B об устойчивости полных минимальных систем так, как они приводятся в работе [4].

Теорема A (М. Г. Крейн, Д. П. Мильман, М. А. Рутман [3]). *Минимальная последовательность $X=\{x_k\}_1^\infty\subset S(B)$ устойчива в том смысле, что при любых $\{\varepsilon_k\geqslant 0\}_{k=1}^\infty$, для которых*

$$q=\sum_1^\infty \varepsilon_k\|x_k^*\|<1, \tag{2}$$

любая последовательность $Y=\{y_k\}_1^\infty$, где $\|y_k-x_k\|\leqslant\varepsilon_k$, $k=1,2,\dots$, эквивалентна (и, более того, 0-изометрична) X и полнота X влечет полноту Y.

Тем самым, Y минимальна; более того, если X базисная, то и Y базисная, а если X безусловная базисная, то и Y безусловно базисная последовательность.

В том случае, если

$$\sum_1^\infty \varepsilon_k\|x_k^*\|<\infty,$$

указанные выше выводы также справедливы после удаления, быть может, конечного числа элементов из X *и* Y.

Назовем последовательность $U=\{u_k\}_1^\infty$ *подчиненной* $X=\{x_k\}_1^\infty$, если существует $C>0$ такое, что при любых $\{a_k\}_1^\infty$ и $n=1,2,\dots$

$$\Bigl\|\sum_1^n a_k u_k\Bigr\| \leqslant C\Bigl\|\sum_1^n a_k x_k\Bigr\|. \tag{3}$$

Будем писать в этом случае $U \prec X$. Последовательность $\{x_k+u_k\}_1^\infty$ обозначим $X+U$, а $\{\varepsilon x_k\}_1^\infty$ обозначим εX.

Теорема B (Ю. Б. Тумаркин [5]). *Пусть* X – *минимальная в* B *система и* $U \prec X$ *с некоторой константой* C_0 *в неравенствах* (3). *Тогда при любом* $\varepsilon<\varepsilon_0=1/C_0$ *последовательность* $Y=X+\varepsilon U$ *эквивалентна* X *и полнота* X *влечет полноту* $X+\varepsilon U$.

Следствие A [4]. *Из теоремы B следует теорема A, так как условие* (2) *означает, что выполняется соотношение* $Y-X=U\prec X$ *с константой* q *в* (3).

Действительно, пусть

$$x=\sum_1^n a_k x_k=\sum_1^n x_k^*(x)x_k.$$

Тогда

$$\Bigl\|\sum_1^n a_k u_k\Bigr\| = \Bigl\|\sum_1^n x_k^*(x)(y_k-x_k)\Bigr\| \leqslant \sum_1^n |x_k^*(x)|\,\|y_k-x_k\| \leqslant \Bigl(\sum_1^n \|x_k^*\|\varepsilon_k\Bigr)\|x\| \leqslant q\|x\|.$$

Приведем некоторые другие факты, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Определение. Система $\{f_n\}\subset L_p$, $0<p<\infty$, называется *системой представления* в пространстве L_p, если для любой функции $f\in L_p$ существует ряд $\sum_{k=1}^\infty c_k f_k$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty}\Bigl\|f-\sum_{k=1}^n c_k f_k\Bigr\|_p=0.$$

Здесь

$$\|f\|_p=\left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\min(1,1/p)}, \qquad 0<p<\infty, \quad -\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty.$$

Рассмотрим функциональную систему $\{\varphi_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}\in L_1(a,b)$ такую, что

$$\sup_n \sigma_n=\sigma<1, \tag{4}$$

где

$$\sigma_n=\inf\biggl\{\frac{1}{|Q|}\|\chi_Q(t)-\lambda\varphi_n(t)\|_1 : \lambda\in\mathbb{R},\ Q\subset(a,b)\biggr\}.$$

Если $\varepsilon > 0$ такое, что $\sigma+\varepsilon=\sigma' < 1$, то существуют $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $Q_n=\bigcup_{i=1}^{i_n}[a_i^n,b_i^n]$ такие, что

$$\sigma_n' = \frac{1}{|Q_n|}\,\|\chi_{Q_n}(t)-\lambda_n\cdot\varphi_n(t)\|_1 \leqslant \sigma+\varepsilon=\sigma' < 1 \tag{5}$$

и также $\sup_n \sigma_n' \leqslant \sigma' < 1$. Пусть система $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условию

$$\forall\, N \in \mathbb{N} \qquad \operatorname{mes}\biggl\{(a,b)\setminus \bigcup_{n=N}^{\infty} Q_n\biggr\}=0. \tag{6}$$

Пусть $x_n=\min_i\{a_i^n\}$, $y_n=\max_i\{b_i^n\}$; обозначим $d(\varphi_n)=y_n-x_n$ и $\operatorname{supp}\varphi_n=\{t: \varphi_n(t)\neq 0\}$. Пусть

$$d(\varphi_n)\to 0, \quad n\to\infty, \qquad d(\varphi_n)\neq 0. \tag{7}$$

Ниже мы используем определение покрытия в смысле Витали [6; с. 30, 231].

Теорема C [7]. *Предположим, что система $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L_1(a,b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, удовлетворяет условиям (5)–(7) и для каждого $N\in\mathbb{N}$ множество (a,b) покрывается в смысле Витали семейством $\{Q_n\}_{n=N}^{\infty}$. Тогда если $N\in\mathbb{N}$, то система $\{\varphi_n\}_{n=N}^{\infty}$ является системой представления в $L_1(a,b)$.*

Замечание 1. Заметим, что доказательство теоремы C представляет собой конкретный алгоритм разложения элементов пространства L_1 по системам функций, удовлетворяющих условиям теоремы C.

Теорема D [8]. *Если система функций $\{f_n\}$ является системой представления в пространстве $L_q(0,\pi)$, $0<q<\infty$, то система $\{f_n\}$ является системой представления и в пространствах $L_p(0,\pi)$ для всех p, $0<p<1$, $p\leqslant q$.*

Теорема 1. *Пусть*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\varphi_{n,k}-\cos 2^{n+1}x}{1-\cos(x-2\pi(2k+1)/2^n)}\right|dx \leqslant 0.37, \qquad n=2,3,\dots, \quad k=0,1,\dots,2^{n-2}-1.$$

Тогда существует число $n_0\in\mathbb{N}$ такое, что система

$$\frac{1}{2^{n-1}}\left\{\frac{1-\varphi_{n,k}(x)}{1-\cos(x-(2k+1)2\pi/2^n)}\right\}, \qquad n=n_0+2,n_0+3,\dots, \quad k=0,1,\dots,2^{n-2}-1, \tag{8}$$

является системой представления в пространстве $L_p(0,\pi)$, $0<p\leqslant 1$, и существует конкретный алгоритм приближения по системе (8) в этих пространствах.

Для доказательства теоремы 1 необходима

Лемма 1. *Ядро Фейера*

$$\delta_{2^n}(x)=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\left(\frac{\sin(2^n x/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$$

удовлетворяет условию

$$\int_0^{\pi}\left|\chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n},\frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x)-\frac{1}{2^{n-1}}\,\delta_{2^n}\left(x-(2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right)\right|dx$$
$$\leqslant 0.62\bigl\|\chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n},\frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x)\bigr\|_{L^1(0,\pi)}, \qquad n=1,2,\dots, \quad k=0,1,\dots,2^{n-2}-1.$$

Доказательство. Рассмотрим ядро Фейера в виде

$$\delta_{2^n}(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{2^n - k}{2^n} \cos kx = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \left(\frac{\sin 2^{n-1}x}{\sin(x/2)}\right)^2.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2 dt = 1, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Первый положительный нуль ядра Фейера есть $2\pi/2^n$. Вычислим

$$I_{2^n} = \int_0^{2\pi/2^n} \delta_{2^n}(x)\,dx = \frac{\pi}{2^n} + \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{2^n-k}{k2^n} \sin\frac{2k\pi}{2^n} = \frac{\pi}{2^n} + \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \sin\frac{2k\pi}{2^n}.$$

Здесь I_{2^n} – это квадратурная формула для интегрального синуса

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 1.4181515761326\dots .$$

Очевидно, что

$$|I_{2^n} - I| < \delta_n \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{9}$$

Пусть n_0 – настолько большое число, что для $n \geqslant n_0$ мы имеем $\delta_n \leqslant 1/100$. Очевидно, что

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} \left|\chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) - \frac{1}{2^{n-1}}\delta_{2^n}\left(x - (2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right)\right| dx \\
&\quad = \int_{2\pi 2k/2^n}^{2\pi 2(k+1)/2^n} \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x)\,dx \\
&\qquad - \frac{1}{2^{n-1}} \int_{2\pi 2k/2^n}^{2\pi 2(k+1)/2^n} \delta_{2^n}\left(x - (2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right) dx \\
&\qquad + \frac{1}{2^{n-1}} \int_{(0,\pi)\setminus\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)} \delta_{2^n}\left(x - (2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right) dx \\
&\quad \leqslant \frac{2\pi}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{\pi}{2\pi} - \frac{2I_n}{\pi}\right) \leqslant \frac{2\pi}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{\pi}{2\pi} - \frac{2I}{\pi} + \frac{C_1}{2^{2n}2\pi}\right) \\
&\quad \leqslant 0.62\left\|\chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x)\right\|_{L^1(0,\pi)}.
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $\chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x)$ является характеристической функцией интервала $\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)$, где $n = 2, 3, \dots,$ $k = 0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1$. Зафиксируем эти номера n и k. Теперь покажем, что существует $0 < \sigma_0 < 1$ такое, что имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
&\left\|\chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) - \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1 - \varphi_{n,k}(x)}{1 - \cos(x - 2\pi(2k+1)/2^n)}\right\|_p \\
&\qquad < \sigma_0 \left\|\chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x)\right\|_p, \qquad 0 < \sigma_0 < 1.
\end{aligned}$$

Пусть $n \geqslant n_0$, $k = 0, 1, \dots, 2^{n-2}-1$. Тогда

$$\left\| \frac{1}{2^{n-1}} \delta_{2^n}\left(x - (2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right) - \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \frac{1-\varphi_{n,k}(x)}{1-\cos(x-(2k+1)2\pi/2^n)} \right\} \right\|_{L(0,\pi)}$$
$$\leqslant \frac{2\pi}{2\pi 2^{n-1}} \int_0^\pi \left| \frac{\varphi_{n,k}(x) - \cos 2^{n+1}x}{1-\cos(x-(2k+1)2\pi/2^n)} \right| dx \leqslant 0.37 \left\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) \right\|_{L(0,\pi)}. \tag{10}$$

Поэтому, используя лемму 1 и (10), получим

$$\left\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) - \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \frac{1-\varphi_{n,k}(x)}{1-\cos(x-2\pi(2k+1)/2^n)} \right\} \right\|_1$$
$$< \sigma_0 \left\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) \right\|_1, \qquad 0 < \sigma_0 \leqslant 0.99 < 1.$$

Из теоремы C следует, что система (8) является системой представления в пространстве $L_1(0,\pi)$, а из теоремы D следует, что и в пространствах L_p, $0 < p \leqslant 1$.

Теорема 2. *Пусть система 2π-периодических функций $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty \in L_1(0,2\pi)$ удовлетворяет условию*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos kx - \varphi_k(x)|\, dx \leqslant \sigma_k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Если

$$\frac{\sigma_0}{2} + \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{2^n-k}{2^n} \sigma_k \leqslant 0.37$$

для всех $n = 1, 2, \dots$, то система специальных сдвигов системы $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ полна в пространстве $L_1(0,\pi)$ и существует конкретный алгоритм приближения в пространстве $L_1(0,\pi)$ по системе специальных сдвигов системы $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $n \geqslant n_0$, $k = 0, 1, \dots, 2^{n-2}-1$. Тогда

$$\left\| \frac{1}{2^{n-1}}\, \delta_{2^n}\left(x - (2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right) - \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{1}{2}\varphi_0\left(x - (2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right) \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n-j}{2^n} \varphi_j\left(x - (2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right)\right) \right\|_{L(0,\pi)}$$
$$\leqslant \frac{2\pi}{2^{n-1}} \left\| \frac{1}{4\pi} \left(1 - \varphi_0\left(x - (2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right) \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n-j}{2^n} \left(\cos j\left(x - (2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right) - \varphi_j\left(x - (2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right)\right)\right) \right\|_{L(0,\pi)}$$
$$\leqslant \left(\frac{\sigma_0}{2} + \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n-j}{2^n} \sigma_j \right) \left\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) \right\|_{L(0,\pi)}$$
$$\leqslant 0.37 \left\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) \right\|_{L(0,\pi)}. \tag{11}$$

Поэтому, используя лемму 1 и (11), получим

$$\begin{aligned}\Bigg\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n},\frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) - \frac{1}{2^{n-1}}\Bigg(\frac{1}{2}\varphi_0\Big(x-(2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\Big) \\ + \sum_{j=1}^{2^n-1}\frac{2^n-j}{2^n}\,\varphi_j\Big(x-(2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\Big)\Bigg)\Bigg\|_1 \\ < \sigma_0 \big\|\chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n},\frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x)\big\|_1, \qquad 0<\sigma_0\leqslant 0.99<1.\end{aligned}$$

Из теоремы C следует, что система

$$\begin{gathered}\Bigg\{\frac{1}{2^{n-1}}\Bigg(\frac{1}{2}\varphi_0\Big(x-(2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\Big)+\sum_{j=1}^{2^n-1}\frac{2^n-j}{2^n}\varphi_j\Big(x-(2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\Big)\Bigg)\Bigg\}, \\ n=1,2,\dots,\quad k=0,1,\dots,2^{n-2}-1,\end{gathered}\tag{12}$$

является системой представления в пространстве $L_1(0,\pi)$, а из теоремы D следует, что и в пространствах L_p, $0<p\leqslant 1$.

Следствие 1. *Пусть система 2π-периодических функций $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty \in L_1(0,2\pi)$ удовлетворяет условию*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\cos kx-\varphi_k(x)|\,dx\leqslant\sigma_k,\qquad k=0,1,2,\dots\,.$$

Если

$$\frac{\sigma_0}{2}+\sum_{k=1}^\infty\sigma_k\leqslant 0.37,$$

то система специальных сдвигов системы $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ полна в пространстве $L_1(0,\pi)$ и существует конкретный алгоритм приближения в пространстве $L_1(0,\pi)$ по системе специальных сдвигов системы $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$.

Теорема 3. *Пусть система функций $\varphi_0^1(x)\cup\{\varphi_n^i(x)\}_{n=1}^\infty\in L_1(0,\pi)$, $i=1,2$, удовлетворяет условиям*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}|\cos kx-\varphi_k^1(x)|\,dx&\leqslant\sigma_k^1,\qquad k=0,1,2,\dots,\\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}|\sin kx-\varphi_k^2(x)|\,dx&\leqslant\sigma_k^2,\qquad k=1,2,\dots\,.\end{aligned}$$

Если

$$\frac{\sigma_0^1}{2}+\sum_{j=1}^{2^n-1}\frac{2^n-j}{2^n}\left[\sigma_j^1\left|\cos\frac{j2\pi(2k+1)}{2^n}\right|+\sigma_j^2\left|\sin\frac{j2\pi(2k+1)}{2^n}\right|\right]\leqslant 0.37$$

для всех $n=1,2,\dots$, $k=0,1,\dots,2^{n-2}-1$, то система $\varphi_0^1(x)\cup\{\varphi_n^i(x)\}_{n=1}^\infty$, $i=1,2$, полна в пространстве $L_1(0,\pi)$ и существует конкретный алгоритм приближения в пространстве $L_1(0,\pi)$ по системе $\varphi_0^1(x)\cup\{\varphi_n^i(x)\}_{n=1}^\infty$, $i=1,2$.

Доказательство. Пусть $n \geqslant n_0$, $k = 0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1$. Тогда

$$
\begin{aligned}
\delta_{2^n}\left(x - (2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right) &= \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n - j}{2^n} \cos j\left(x - (2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n - j}{2^n} \left[\cos jx \cos\left(j(2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right) + \sin jx \sin\left(j(2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right)\right]
\end{aligned}
$$

и, следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\Bigg\| \frac{1}{2^{n-1}}\, \delta_{2^n}\left(x - (2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right) - \frac{1}{2^{n-1}}\left[\frac{1}{2}\varphi_0^1(x)\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n - j}{2^n}\left(\varphi_j^1(x) \cos j(2k+1)\frac{2\pi}{2^n} + \varphi_j^2(x) \sin j(2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right)\right]\Bigg\|_{L(0,\pi)} \\
&\leqslant \frac{2\pi}{2^{n-1}} \Bigg\| \frac{1}{4\pi}\bigl(1 - \varphi_0^1(x)\bigr) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n - j}{2^n} \left[\cos(2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\bigl(\cos jx - \varphi_j^1(x)\bigr)\right. \\
&\qquad \left. + \sin(2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\bigl(\sin jx - \varphi_j^2(x)\bigr)\right]\Bigg\|_{L(0,\pi)} \\
&\leqslant \frac{\sigma_0^1}{2} + \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n - j}{2^n} \left[\sigma_j^1 \left|\cos j(2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right|\right. \\
&\qquad \left. + \sigma_j^2 \left|\sin j(2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right|\right] \bigl\|\chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x)\bigr\|_{L(0,\pi)} \\
&\leqslant 0.37 \bigl\|\chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x)\bigr\|_{L(0,\pi)}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Используя лемму 1 и (13), получим

$$
\begin{aligned}
&\Bigg\|\chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) - \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2}\,\varphi_0^1(x)\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n - j}{2^n} \left[\varphi_j^1(x) \cos j(2k+1)\frac{2\pi}{2^n} + \varphi_j^2(x) \sin j(2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right]\right)\Bigg\|_1 \\
&< \sigma_0 \bigl\|\chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x)\bigr\|_1, \qquad 0 < \sigma_0 \leqslant 0.99 < 1.
\end{aligned}
$$

Из теоремы C следует, что система

$$
\left\{ \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2}\,\varphi_0^1(x) + \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n - j}{2^n} \left[\varphi_j^1(x) \cos j(2k+1)\frac{2\pi}{2^n} + \varphi_j^2(x) \sin j(2k+1)\frac{2\pi}{2^n}\right]\right)\right\},
$$
$$
n = 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1,
\tag{14}
$$

является системой представления в пространстве $L_1(0,\pi)$, а из теоремы D следует, что и в пространствах L_p, $0 < p \leqslant 1$.

Замечание 2. В теоремах A и B приводятся результаты об устойчивости полных минимальных систем. В теореме 1 рассматривается специальное возмущение системы (1), при этом системы (1) и (8), очевидно, не являются минимальными, а в теореме 3 более слабое возмущение, чем в теоремах A и B, но приводится алгоритм представления по новой, полученной возмущением, системе, что пока не представляется возможным сделать для всех систем при использовании теорем A и B в пространстве L_1 (так как процесс ортогонализации в L_1 не применим).

Заметим, что в работе [9] приводится более сильное возмущение в пространстве L_1 системы Хаара, чем в теореме A (ряд $\sum_1^\infty \varepsilon_k\|x_k^*\|$ расходится), но свойство полноты остается устойчивым, при этом приводится алгоритм приближения по новой, полученной возмущением, системе.

Автор выражает благодарность профессору В. Г. Кротову, профессору А. М. Седлецкому и профессору Ю. Престину за полезное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] С. В. Бочкарев, “Построение интерполяционного диадического базиса в пространстве непрерывных функций на основе ядер Фейера”, *Тр. МИАН*, **172** (1985), 29–59.

[2] А. М. Олевский, “Об устойчивости оператора ортогонализации Шмидта”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34** (1970), 803–826.

[3] М. Г. Крейн, Д. П. Мильман, М. А. Рутман, “Об одном свойстве базиса в пространстве Банаха”, *Записки матем. общества. Харьков* (4), **16** (1940), 106–110.

[4] В. Д. Мильман, “Геометрическая теория пространств Банаха”, *УМН*, **25**:3 (153) (1970), 113–174.

[5] Ю. Б. Тумаркин, “Устойчивость базисов в B-пространствах и других классах ЛВП”, *Теория функций, функцион. анализ и его прилож.*, 1971, № 14, 26–35.

[6] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, ИЛ, М., 1962.

[7] V. I. Filippov, “On the completeness and other properties of some function systems in L^p, $0 < p < \infty$”, *J. Approx. Theory*, **94** (1998), 42–53.

[8] V. I. Filippov, “Linear continuous functionals and representation of functions by series in the spaces E_φ”, *Anal. Math.*, **27**:4 (2001), 239–260.

[9] В. И. Филиппов, “О сильных возмущениях системы Хаара в пространствах $L_1(0,1)$”, *Матем. заметки*, **66**:4 (1999), 596–602.

В. И. Филиппов
Саратовский государственный социально-экономический университет
E-mail: filippov@ssea.runnet.ru

Поступило
23.04.2003
Исправленный вариант
15.03.2006