

Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, Ю. Г. Рыков, Возникновение иерархии особенностей в средах без собственного перепада давления. Двумерный случай, *Матем. заметки*, 2022, том 112, выпуск 4, 486–499

DOI: 10.4213/mzm13587

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.149.234.78

9 января 2025 г., 14:07:28





## Возникновение иерархии особенностей в средах без собственного перепада давления.

### Двумерный случай

А. И. Аптекарев, Ю. Г. Рыков

Рассматриваются обобщенные решения системы уравнений газовой динамики без давления в случае двух пространственных переменных. В отличие от много изучавшегося случая одной пространственной переменной двумерная ситуация, а также и вообще многомерная, характеризуется тем, что сильные особенности могут возникать на многообразиях разной размерности. Это свойство будем обозначать как существование иерархии сильных особенностей. В данной статье показано, что при наличии иерархии особенностей обобщение соотношений Ренкина–Гюгонио должно быть расширено, а также приведена форма такого расширения. На примере начальных данных Римана продемонстрирован путь построения обобщенного решения в случае возникновения иерархии особенностей.

Библиография: 28 названий.

**Ключевые слова:** среды без давления, сильные особенности, концентрация вещества, обобщенные соотношения Ренкина–Гюгонио, иерархия особенностей.

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzml3587>

*Посвящается 90-летию академика В. П. Маслова*

**1. Введение и постановка задачи.** В математическом моделировании среды, где внутренним перепадом давления можно пренебречь (кратко: среды без давления), оказываются полезными для описания некоторых сложных физических явлений, таких как эволюция многофазных потоков, движение дисперсных сред, в частности капель или пыли, движение гранулированных сред и т.д. Кроме того, существует еще одно интересное приложение подобной модели в астрофизике, а именно среда без давления оказывается удобным инструментом приближенного описания крупномасштабного распределения вещества во Вселенной. Основой для математического изучения свойств таких сред является так называемая система уравнений газовой динамики без давления. Такое название обусловлено тем, что данная система получается из обычной системы уравнений газовой динамики, в которой формально давление положено равным нулю. В данной работе мы будем рассматривать эту систему уравнений в двумерном случае. Пусть  $\mathbf{x} \equiv (x, y)$ ,  $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ ,

$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ . Тогда двумерная система уравнений газовой динамики без давления выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \varrho \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial(\varrho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\varrho > 0$  имеет смысл плотности вещества,  $\mathbf{u} \equiv (u, v)$  – вектор скорости, а  $\otimes$  обозначает тензорное произведение.

Полная система уравнений газовой динамики включает в себя еще и уравнение сохранения полной энергии, поэтому к системе (1.1), положив в традиционном законе сохранения давление равным нулю, следовало бы добавить уравнение

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}E) = 0, \quad (1.2)$$

где  $E \equiv \varrho(e + |\mathbf{u}|^2/2)$ ,  $e$  – удельная внутренняя энергия. Однако уравнение (1.2) в отличие от обычной газовой динамики оказывается независимым от системы (1.1) в том смысле, что эволюция особенностей определяется только (1.1), а (1.2) определяет закон изменения дополнительной величины – удельной внутренней энергии  $e$  – “вдоль” уже известных особенностей.

Поэтому в рамках текущей публикации мы будем рассматривать только задачу Коши для системы (1.1) с начальными данными

$$\varrho(0, \mathbf{x}) = \varrho_0(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad (1.3)$$

где функции  $\varrho_0$ ,  $\mathbf{u}_0$ , вообще говоря, являются произвольными ограниченными измеримыми функциями.

Еще в конце 70-х годов прошлого века Крайко, см., например, [1], обратил внимание на среды без давления в связи с указанными выше приложениями и показал, что в таких средах возникает новый тип скачков с концентрацией вещества на, вообще говоря, гиперповерхностях. В указанной работе также были получены законы эволюции подобных гиперповерхностей на физическом уровне строгости. Начиная с работы [2], система (1.1) интенсивно изучалась в одномерной постановке. Отметим несколько характерных публикаций в этом направлении. В статьях [3], [4] при помощи различных подходов была доказана теорема существования обобщенных решений в пространстве мер. В работе [5] был подробно описан вариационный принцип для одномерного варианта системы (1.1), который позволяет конструктивно описывать структуру обобщенных решений. Вопросы как существования, так и единственности обобщенных решений были рассмотрены, например, в [6], [7]. Вследствие вырожденности системы уравнений газовой динамики без давления условия единственности могут принимать разные формы, но в целом обусловлены требованиями прихода на кривую особенностей нужного количества характеристик и того или иного способа запрета распада вещества. Обобщение вариационного подхода на случай наличия внешних сил, а также текущий общий обзор можно найти, например, в [8].

Случай многих пространственных переменных оказывается гораздо более сложным. Во-первых, как показано в [9] в рамках изучения двумерной задачи Римана

для общих уравнений газовой динамики, при отсутствии давления прямое обобщение соотношений Ренкина–Гюгонио представляет собой систему уравнений в частных производных, включающую в себя помимо динамики гиперповерхностей-особенностей еще и динамику плотности концентрации вещества. Аналогичное обобщение соотношений Ренкина–Гюгонио на основе теории новых обобщенных функций Коломбо, см., например, [10], было получено в [11] (и более развернуто в [12]), где также было получено его описание в интегральной форме. Интегральное описание фактически предполагает возможность возникновения иерархии особенностей, т.е. концентрации вещества на многообразиях разной размерности. Этот факт представляет собой вторую основную трудность, возникающую при рассмотрении многомерной ситуации. О возникновении иерархии особенностей в двумерном случае в рамках приближенного описания впервые, по-видимому, было заявлено в [13]. Концентрация вещества в многомерном случае на поверхностях коразмерности один изучалась, например, в работах [14]–[16].

Также отметим, что система уравнений газовой динамики без давления может описывать и процессы распада вещества. Соответствующие обобщенные решения не будут принадлежать к классу энтропийных решений, но, тем не менее, могут иметь отношение к реальным физическим процессам, см., например, [17], [18]. Кроме того, тонкие вопросы распространения векторного поля скоростей на точки  $(t, \mathbf{x})$ , находящиеся внутри особенностей разных размерностей, рассмотрены в публикациях [19], [20] в случае, когда система (1.1) может быть представлена как уравнение Гамильтона–Якоби; допустимо и обобщение на произвольный выпуклый гамильтониан. При этом используется вариационная трактовка вязких решений данного уравнения. Полученный результат оказывается полезным, в том числе, в астрофизических приложениях, см., например, [21].

Предлагаемая публикация, в отличие от многих других в данной области, направлена, прежде всего, на изучение процессов возникновения и распространения иерархии особенностей. Пункт 2 посвящен необходимым формулировкам понятия обобщенного решения для системы (1.1), а также дополнительным определениям. В п. 3 будет показано, что в двумерном случае ранее полученные обобщенные соотношения Ренкина–Гюгонио для (1.1) должны быть расширены. А именно, кроме соотношений, выполняющихся на особых поверхностях в пространстве  $(t, x, y)$  и имеющих вид уравнений в частных производных, необходимо добавить еще и соотношения для кривых концентрации, которые имеют вид обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема 1 утверждает, что при этих условиях кусочно гладкие функции с конечным числом “регулярных” поверхностей особенностей являются обобщенным решением системы (1.1). Иллюстрирующий пример решений с иерархией особенностей приведен в п. 4 и оформлен как теорема 2.

**2. Основные понятия и определения.** Введем дополнительные обозначения:

$$d\mathbf{x} \equiv (dx, dy), \quad \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \equiv (u(t, \mathbf{x}), v(t, \mathbf{x})), \quad \mathbf{I}_t(d\mathbf{x}) \equiv (I_t(dx, dy), J_t(dx, dy)).$$

Обобщенное решение задачи (1.1), (1.3) будет пониматься в смысле семейства мер  $P_t(d\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{I}_t(d\mathbf{x})$ , где индекс  $t$  означает параметр времени. Соответственно, так же будут пониматься начальные данные. А именно, в случае начальных данных (1.3)

соответствующие меры  $P_0(d\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{I}_0(d\mathbf{x})$  являются абсолютно непрерывными относительно стандартной меры Лебега с плотностями  $\varrho_0(\mathbf{x})$ ,  $\varrho_0(\mathbf{x})\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Пусть  $\mathfrak{P}_t(d\mathbf{x}) \equiv (P_t(d\mathbf{x}), \mathbf{I}_t(d\mathbf{x}))$  – семейства мер Радона, определенные на борелевских подмножествах  $\mathbb{R}^2$ , слабо непрерывные по  $t$ , и, кроме того,  $P_t \geq 0$ , а мера  $\mathbf{I}_t$  абсолютно непрерывна относительно  $P_t$  для почти всех  $t > 0$ . Определим вектор-функцию  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  как производную Радона–Никоидима  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = d\mathbf{I}_t/dP_t$ . Тогда  $\mathfrak{P}_t$  назовем *обобщенным решением* задачи Коши (1.1), (1.3), если

- 1) для любой вектор-функции  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{f} \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$  и любых  $0 < t_1 < t_2 < +\infty$  выполнено

$$\iint \mathbf{f}(\mathbf{x}) \odot \mathfrak{P}_{t_2}(d\mathbf{x}) - \iint \mathbf{f}(\mathbf{x}) \odot \mathfrak{P}_{t_1}(d\mathbf{x}) = \int_{t_1}^{t_2} \iint (\nabla \otimes \mathbf{f})^T \cdot \mathbf{u} \odot \mathfrak{P}_\tau(d\mathbf{x}) d\tau, \quad (2.1)$$

где  $\odot$  обозначает покомпонентное произведение (произведение Адамара), индекс  $T$  – операцию транспонирования, а  $\iint$  обозначает интегрирование по  $\mathbb{R}^2$ ;

- 2) в слабом смысле при  $t \rightarrow +0$   $P_t \rightarrow P_0$ ,  $\mathbf{I}_t \rightarrow \mathbf{I}_0$ .

Как было показано в работах, цитированных во введении, в одномерном случае решение задачи (1.1), (1.3) может быть построено при помощи рассмотрения так называемой динамики прилипания, т.е. рассмотрения системы движущихся по инерции частиц, которые испытывают абсолютно неупругие соударения с выполнением законов сохранения массы и импульса. Вследствие того, что для одной пространственной переменной  $x$  частицы, летящие навстречу друг другу, обязательно столкнутся, возможно в каждый момент времени  $t$  определить отображение  $x = \varphi_t(a)$ , где  $a$  – лагранжева координата, которое показывает, какие частицы с начальным расположением  $a$  окажутся в точке  $x$  в момент времени  $t$ . При помощи этого отображения обобщенное решение задачи (1.1), (1.3) легко восстанавливается. При малых значениях времени и гладких начальных данных отображение  $\varphi_t(a)$  имеет вид  $\varphi_t(a) = a + t\mathbf{u}_0(a)$ . Однако с ростом  $t$  это отображение может перестать быть взаимно однозначным, так что одному значению  $x$  будет соответствовать целый отрезок  $[a_1, a_2]$  значений  $a$ . Такая потеря взаимной однозначности отражает наличие процесса концентрации вещества в одномерном случае.

Для многомерного случая попытка построить аналог отображения  $x = \varphi_t(a)$  была предпринята в [22], однако, как отмечено в [23], соответствующие доказательства так и остались незавершенными. С нашей точки зрения причиной возникших трудностей является то, что в многомерном случае возникает иерархия особенностей, которая не дает построить аналог техники, приведшей к успеху в одномерном случае. В многомерном случае частицы, летящие в некотором смысле навстречу друг другу, могут и не столкнуться: соответствующие траектории могут скрещиваться. Например, в двумерном случае ситуация скрещивания характерна для большинства траекторий для полного по некоторой мере набора начальных расположений частиц, см. [24]. Если же имеется бесконечный начальный набор частиц в ограниченном множестве на плоскости, то возможны ситуации несуществования и неединственности обобщенного решения, см. [23].

Авторами настоящей работы был предложен другой подход, [25], [26], который, вообще говоря, не опирается на рассмотрение системы взаимодействующих частиц

и учитывает возможность концентрации вещества на многообразиях разной размерности. В следующем пункте будет показано, что в соответствии с этим подходом необходимо расширение обобщения соотношений Ренкина–Гюгонио, которое было получено ранее. Напомним, что в работах [9], [11], [12] было получено обобщение соотношений Ренкина–Гюгонио для системы уравнений (1.1) на случай концентрации вещества вдоль поверхностей в пространстве  $(t, \mathbf{x})$ . Также в [9] и далее, например, в [27], была исследована задача Римана для (1.1), но только в случаях, когда не возникает концентрации вещества на кривых в пространстве  $(t, \mathbf{x})$ . Если же последний вид концентрации вещества имеет место, то тогда необходимо расширение имеющегося обобщения соотношений Ренкина–Гюгонио.

Проведем предварительные построения для обоснования указанного расширения. Пусть далее в этом пункте индекс  $i$  принимает значения  $i = 1, 2$ . Рассмотрим в пространстве  $(t, \mathbf{x})$  на временном отрезке  $t \in [t_1, t_2]$  две поверхности  $\Gamma_i(t, \mathbf{x}) = 0$ ,  $\Gamma_i \in C^1([t_1, t_2] \times \mathbb{R}^2)$ , пересекающиеся по некоторой кривой  $L$ . Пусть поверхности  $\Gamma_i$  задаются параметрически как

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_i(t, l) \in C^1([t_1, t_2] \times \mathbb{R}), \quad \mathbf{X} \equiv (\chi, \gamma),$$

а кривая  $L$  задается как

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}(t) \in C^1([t_1, t_2]), \quad \mathbf{S} \equiv (s^x, s^y).$$

Пусть также для некоторых непрерывно дифференцируемых  $l_i(t)$  выполнено равенство  $\mathbf{X}(t, l_i(t)) = \mathbf{S}(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ . Будем рассматривать поверхности  $\Gamma_i$  не для всех значений  $l$ , а именно, для  $\Gamma_1$  возьмем параметр  $l \leq l_1(t)$ , а для  $\Gamma_2$  – параметр  $l \geq l_2(t)$ . Для получившихся частей поверхностей сохраним обозначение  $\Gamma_i$ . Тогда  $\Gamma \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  является составной поверхностью, содержащей кривую  $L$ . Ориентируем  $\Gamma$  в соответствии с ориентацией  $(t, \mathbf{x})$ . В соответствии с направлением положительной нормали определим положительную “+” и отрицательную “–” стороны  $\Gamma$ . Соответственно, величины, относящиеся к двум сторонам поверхности, будем снабжать такими же индексами. Пусть характеристики

$$\mathbf{x}^* \equiv \mathbf{x}(\tau, \mathbf{a}) = \mathbf{a} + \tau \mathbf{u}_0(\mathbf{a}), \quad (2.2)$$

лежащие как с положительной, так и с отрицательной стороны  $\Gamma$ , пересекают ее в некоторый момент времени.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Пусть  $\mathbf{a} = (a, b)$ . Определим *лагранжево отображение*

$$\mathcal{L}_t: \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{x}$$

для (1.1) и описанной выше геометрической конфигурации следующим образом. Пусть  $\tau_0 > 0$  таково, что  $\mathbf{x}(\tau_0) = \mathbf{X}_i(\tau_0, l_0)$  для  $i = 1$  или  $i = 2$ ,  $\mathbf{x}(\tau)$  определено формулами (2.2). И пусть  $\tau_1 > \tau_0$  таково, что  $\mathbf{X}_i(\tau_1, l_0) = \mathbf{S}(\tau_1)$ . Тогда

$$\mathcal{L}_t(\mathbf{a}) = \begin{cases} \mathbf{x}(t) & \text{в соответствии с формулой (2.2) при } 0 < t < \tau_0; \\ \mathbf{X}(t, l_0) & \text{при } \tau_0 < t < \tau_1; \\ \mathbf{S}(t) & \text{при } \tau_1 < t. \end{cases}$$

Сформулируем вспомогательную лемму, которая легко может быть доказана непосредственными вычислениями и использовалась в [12].

**ЛЕММА 1.** Пусть на плоскости  $\mathbf{a} \equiv (a, b)$  существует семейство ориентированных областей  $G(t)$  с кусочно непрерывно дифференцируемыми границами  $\partial G(t)$ ,  $0 < t_1 \leq t \leq t_2$  таких, что  $G(\tau_1) \subset G(\tau_2)$  при  $t_1 < \tau_1 < \tau_2 < t_2$ . Пусть  $\partial G(t)$  представляет собой замкнутую кривую, которую можно задать параметрически как  $\mathbf{a}(t, l)$ , где  $l$  – параметр вдоль кривой. Тогда для  $t_1 \leq t \leq t_2$  справедливо следующее равенство:

$$\frac{d}{dt} \iint_{G(t)} \varphi d\mathbf{a} = \iint_{G(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\mathbf{a} + \oint_{\partial G(t)} \varphi \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial(t, l)} dl, \tag{2.3}$$

где  $\varphi(t, \mathbf{a}) \in C^1([t_1, t_2] \times \overline{\bigcup_{t \in [t_1, t_2]} G(t)})$ .

**3. Об обобщенных соотношениях Ренкина–Гюгонио.** Теперь сформулируем расширение обобщения соотношений Ренкина–Гюгонио, о котором шла речь в предыдущем пункте.

Рассмотрим семейство мер следующего вида:

$$\begin{aligned} P_t &= P^- + (P^+ - P^-)H(\Gamma) + \tilde{P}(t, l)\delta(\Gamma) + M(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{S}(t)), \\ \mathbf{I}_t &= \mathbf{I}^- + (\mathbf{I}^+ - \mathbf{I}^-)H(\Gamma) + \tilde{\mathbf{I}}(t, l)\delta(\Gamma) + \mathbf{\Pi}(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{S}(t)), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где  $\Gamma$  – поверхность, а  $\mathbf{S}(t)$  – параметризация кривой  $L$ , которые были построены в п. 2;  $H$  – функция Хевисайда;  $P^\pm, \mathbf{I}^\pm$  – меры, абсолютно непрерывные по отношению к мере Лебега, с плотностями  $\rho^\pm, \rho^\pm \mathbf{u}^\pm$  соответственно;  $\delta$  – мера Дирака на гиперповерхностях коразмерности один и два. При этом функции  $\rho^\pm, \rho^\pm \mathbf{u}^\pm, \tilde{P}, \tilde{\mathbf{I}}, M, \mathbf{\Pi}$  предполагаются кусочно непрерывно дифференцируемыми на своих областях определения.

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть семейство мер  $\mathfrak{P}_t(d\mathbf{x}) \equiv (P_t(d\mathbf{x}), \mathbf{I}_t(d\mathbf{x}))$ , определяемое формулами (3.1), является обобщенным решением задачи (1.1), (1.3) в смысле определения 1. Тогда функции  $(\rho^\pm, \mathbf{u}^\pm)$  удовлетворяют (1.1) в классическом смысле; вдоль поверхности  $\Gamma$  выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_t}{\partial t} &= \frac{\partial \chi}{\partial l} \{V[\rho] - [\rho v]\} - \frac{\partial \gamma}{\partial l} \{U[\rho] - [\rho u]\}, \\ \frac{\partial \mathbf{I}_t}{\partial t} &= \frac{\partial \chi}{\partial l} \{V[\rho \mathbf{u}] - [\rho v \mathbf{u}]\} - \frac{\partial \gamma}{\partial l} \{U[\rho \mathbf{u}] - [\rho u \mathbf{u}]\}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где  $(U, V) \equiv (\partial \chi / \partial t, \partial \gamma / \partial t)$ , и для любой величины  $f$  обозначено  $[f] \equiv f^+ - f^-$ , а вдоль кривой  $L$  выполнено

$$M(t) \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{\Pi}(t), \tag{3.3}$$

где  $(M(t), \mathbf{\Pi}(t)) = \mathfrak{P}_0(\mathcal{L}_t^{-1}(\mathbf{S}(t)))$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Соотношения (3.2) определяют эволюцию поверхности концентрации вещества и представляют собой обобщение соотношений Ренкина–Гюгонио, полученное ранее и цитированное выше. При этом  $\mathcal{L}_t^{-1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ . Если это последнее свойство нарушается, то это означает, что возникает концентрация вещества на

кривых, и тогда дополнительно должно выполняться (3.3). Это и составляет расширение обобщения соотношения Ренкина–Гюгонио для случая двух пространственных измерений. В п. 4 будет приведен соответствующий иллюстративный пример. Отметим, что в случае многих пространственных переменных количество дополнительных соотношений Ренкина–Гюгонио будет естественным образом расти.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.** Обозначим через  $\{t\}$  плоскость ( $t = \text{const}, \mathbf{x}$ ). Достаточно рассмотреть такую функцию  $\mathbf{f}$  из определения 1, что для  $0 < t_1 < t < t_2$  выполнено

$$(\Gamma \cap \{t\}) \cap \text{supp } \mathbf{f} \neq \emptyset \quad \text{и} \quad \mathbf{S}(t) \in \text{supp } \mathbf{f}.$$

Тогда для  $0 < t_1 < t < t_2$  кривая  $(\Gamma \cap \{t\})$  делит  $\text{supp } \mathbf{f}$  на две области  $D^-(t)$  и  $D^+(t)$ , т.е.

$$\text{supp } \mathbf{f} = D^-(t) \cup D^+(t) \cup (\Gamma \cap \{t\}) \cup \mathbf{S}(t). \quad (3.4)$$

Обозначим

$$D_*^\pm(t) \equiv \mathcal{L}_t^{-1}(D^\pm(t)), \quad D^\Gamma(t) \equiv \mathcal{L}_t^{-1}(\Gamma \cap \{t\}), \quad D^\mathbf{S}(t) \equiv \mathcal{L}_t^{-1}(\mathbf{S}(t)).$$

Теперь подставим вид (3.1) в правую часть интегрального тождества (2.1) и получим с учетом декомпозиции (3.4) и формул (2.2)

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left\{ \sum_{j=\pm} \iint_{D^j(\tau)} (\nabla \otimes \mathbf{f})^T \cdot \mathbf{u} \odot \mathfrak{P}_\tau(d\mathbf{x}) + \int_{\Gamma \cap \{t\}} (\nabla \otimes \mathbf{f})^T \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}(\tau, l) \odot \mathfrak{P}_\tau(dl) \right. \\ & \quad \left. + (\nabla \otimes \mathbf{f})^T \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dt} \odot \mathfrak{P}_\tau(\mathbf{S}(\tau)) \right\} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left\{ \sum_{j=\pm} \iint_{D_*^j(\tau)} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)}{\partial \tau} \odot \mathfrak{P}_0(d\mathbf{a}) \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Gamma \cap \{t\}} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}(\tau, l))}{\partial \tau} \odot \mathfrak{P}_\tau(dl) + \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{S})}{d\tau} \odot \mathfrak{P}_\tau(\mathbf{S}(\tau)) \right\} \equiv \mathfrak{J}. \end{aligned}$$

Применим лемму 1 к первому члену в  $\mathfrak{J}$ . Тогда, вспоминая обозначение  $[f] \equiv f^+ - f^-$ , имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &= \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left\{ \sum_{j=\pm} \frac{d}{d\tau} \iint_{D_*^j(\tau)} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \odot \mathfrak{P}_0(d\mathbf{a}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{d}{d\tau} \int_{\Gamma \cap \{t\}} \mathbf{f}(\mathbf{X}(\tau, l)) \odot \mathfrak{P}_\tau(dl) + \frac{d}{d\tau} \{ \mathbf{f}(\mathbf{S}) \odot \mathfrak{P}_\tau(\mathbf{S}(\tau)) \} \right\} \\ & \quad - \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left\{ \int_{\Gamma \cap \{t\}} \mathbf{f}(\mathbf{X}(\tau, l)) \odot \left( \left[ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial(\tau, l)} \odot \mathfrak{P}_0 \right] + \frac{\partial \mathfrak{P}_\tau}{\partial \tau} \right) dl \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{f}(\mathbf{S}) \odot \left( \frac{d}{d\tau} \mathfrak{P}_\tau(\mathbf{S}(\tau)) + \mathfrak{P}_\tau(\tau, l_1(\tau)) \dot{l}_1 - \mathfrak{P}_\tau(\tau, l_2(\tau)) \dot{l}_2 \right) \right\}. \end{aligned}$$

После выполнения операции интегрирования первый интеграл по времени в  $\mathfrak{J}$  как раз представляет собой левую часть в (2.1) определения 1. Поэтому второй интеграл по времени в  $\mathfrak{J}$  должен обращаться в нуль. Тогда вследствие произвольности



функции  $\mathbf{f}$  выполняются следующие равенства:

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial(\tau, l)} \odot \mathfrak{P}_0 \right] + \frac{\partial \mathfrak{P}_\tau}{\partial \tau} = 0, \tag{3.5}$$

$$\frac{d}{d\tau} \mathfrak{P}_\tau(\mathbf{S}(\tau)) + \mathfrak{P}_\tau(\tau, l_1(\tau)) \dot{l}_1 - \mathfrak{P}_\tau(\tau, l_2(\tau)) \dot{l}_2 = 0.$$

Вспоминая, что  $\mathfrak{P}_\tau = (\tilde{P}(\tau, l), \tilde{\mathbf{I}}(\tau, l))$  на  $\Gamma$ , из первого уравнения (3.5) получим соотношения на поверхности концентрации вещества в интегральной форме, которые, как показано в [12], эквивалентны (3.2).

Далее, во втором уравнении (3.5) на кривой концентрации вещества  $\mathfrak{P}_\tau(\mathbf{S}(\tau)) = (M(\tau), \mathbf{\Pi}(\tau)) = \mathfrak{P}_0(D^{\mathbf{S}}(\tau))$  по построению. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\frac{d}{d\tau} \mathfrak{P}_\tau(\mathbf{S}(\tau)) = \oint_{\partial D^{\mathbf{S}}(\tau)} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial(\theta, l)} \odot \mathfrak{P}_0 \dot{l}(\tau) d\theta,$$

где  $l(\tau)$  равно  $l_1(\tau)$  при интегрировании со стороны  $\Gamma_1$  и равно  $l_2(\tau)$  при интегрировании со стороны  $\Gamma_2$ . Принимая во внимание первое равенство (3.5), видим, что второе равенство (3.5) также выполнено.

Таким образом, если меры (3.1) являются обобщенным решением задачи (1.1), (1.3), то необходимо выполнение соотношений (3.2), (3.3). Теорема доказана.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Аналогичными рассуждениями можно показать справедливость теоремы 1 и для случая конечного набора достаточно гладких поверхностей и кривых концентрации вещества, которые расположены так, что любая кривая концентрации вещества является пересечением двух или более поверхностей концентрации вещества.

В следующем пункте приведем иллюстративный пример, демонстрирующий важность условия (3.3).

**4. Пример, иллюстрирующий возникновение иерархии особенностей.** Рассмотрим такие начальные данные (1.3), которые постоянны в каждом квадранте начальной плоскости  $\mathbf{a}$ . А именно, занумеруем квадранты стандартным образом при помощи индекса  $i = 1, 2, 3, 4$ , и этим же индексом будем отмечать значения соответствующих начальных данных. Пусть  $u > 0, v > 0, 0 < \varrho < R$  и

$$\begin{aligned} u_1 = u_4 = -u, \quad u_2 = u_3 = u, \quad v_1 = v_2 = -v, \quad v_3 = v_4 = v, \\ \varrho_i = \varrho, \quad i \neq 4, \quad \varrho_4 = R. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Обозначим

$$\lambda \equiv \frac{\sqrt{R} - \sqrt{\varrho}}{\sqrt{R} + \sqrt{\varrho}}, \quad \theta \equiv \frac{2\sqrt{\varrho}}{\sqrt{R} + \sqrt{\varrho}}, \quad \Theta \equiv \frac{2\sqrt{R}}{\sqrt{R} + \sqrt{\varrho}}.$$

**ТЕОРЕМА 2.** 1) Для начальных данных (4.1) меры (индекс  $t$  опустим)  $P, \mathbf{I}$ :

$$P = \varrho d\mathbf{x}, \quad \mathbf{I} = (-uP, -vP) \quad \text{при} \quad x > 0, \quad y > \lambda vt;$$

$$\begin{aligned}
P &= \varrho dx, \quad \mathbf{I} = (uP, -vP) \quad \text{при} \quad -\lambda ut < x < 0, \quad y > \lambda vt \quad \text{и} \quad x < -\lambda ut, \quad y > 0; \\
P &= \varrho dx, \quad \mathbf{I} = (uP, vP) \quad \text{при} \quad x < -\lambda ut, \quad y < 0; \\
P &= R dx, \quad \mathbf{I} = (-uP, vP) \quad \text{при} \quad x > -\lambda ut, \quad y < \lambda vt; \\
P &= 2\varrho ut dy \quad \text{на прямой} \quad \Gamma_{1-2}: x = 0, \quad y > \lambda vt; \\
P &= 2\varrho vt dx \quad \text{на прямой} \quad \Gamma_{2-3}: x < -\lambda ut, \quad y = 0; \\
P &= 2\sqrt{\varrho R} vt dx \quad \text{на прямой} \quad \Gamma_{1-4,2-4}: x > -\lambda ut, \quad y = \lambda vt; \\
P &= 2\sqrt{\varrho R} ut dy \quad \text{на прямой} \quad \Gamma_{2-4,3-4}: x = -\lambda ut, \quad y < \lambda vt
\end{aligned}$$

не являются обобщенным решением задачи (1.1), (4.1), хотя соотношения (3.2) выполнены.

2) В квадранте  $\{x < 0, y > 0\}$  существует два однопараметрических семейства решений системы уравнений (3.2), которые имеют автомодельную форму

$$s \equiv \frac{l}{t}, \quad \chi = tX(s), \quad \gamma = tY(s), \quad P = tm(s) \quad (4.2)$$

и которые будут обозначаться индексами “ $\sharp$ ” и “ $\flat$ ”, такие, что

$$\begin{aligned}
X^\sharp &= 0, \quad Y^\sharp = \lambda v, \quad 2\varrho u dY^\sharp + 2\sqrt{\varrho R} v dX^\sharp = m^\sharp ds \quad \text{при} \quad s = s^\sharp, \\
X^\flat &= -\lambda u, \quad Y^\flat = 0, \quad 2\varrho v dX^\flat + 2\sqrt{\varrho R} u dY^\flat = m^\flat ds \quad \text{при} \quad s = s^\flat,
\end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $s^\sharp, s^\flat$  – некоторые фиксированные значения параметра  $s$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** В ходе доказательства будет установлено, что рассматриваемые решения будут зависеть только от  $s/s^\sharp$  или от  $s/s^\flat$ , так что конкретные значения величин  $s^\sharp$  и  $s^\flat$  несущественны.

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.** При помощи результатов теоремы 2 задача поиска обобщенного решения системы 1.1 с начальными данными 4.1, допускающего формирование иерархии особенностей, может быть переформулирована следующим образом. Найти пересечение поверхностей (4.9) (см. далее в доказательстве) и подобрать параметры  $A_3^p$ ,  $p = \sharp, \flat$  так, чтобы выполнялось расширение (3.3) обобщения соотношений Ренкина–Гюгонио (3.3).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.** Докажем утверждение 1). Выполнение соотношений (3.2) проверяется непосредственно. Поскольку для начальных данных (4.1) характеристики являются прямыми линиями с постоянным наклоном в каждом квадранте, то легко видеть, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t^{-1}(\Gamma_{1-2}) &= \{|a| \leq ut, b \geq \Theta vt\}, \\
\mathcal{L}_t^{-1}(\Gamma_{1-4,2-4}, x > 0) &= \{a \geq ut, -\theta vt \leq b \leq \Theta vt\}.
\end{aligned}$$

Найдем множество

$$A \equiv \mathcal{L}_t^{-1}(\Gamma_{1-4,2-4}, -\lambda ut < x < 0).$$

Траектории на поверхности  $\Gamma_{1-4,2-4}$ , которые начинаются в точках  $(a, 0)$ ,  $0 < a < ut$ , имеет вид  $x = a - u\tau$ ,  $y = \lambda v\tau$  при  $0 < \tau < a/u$  и  $x = -\lambda u\tau$ ,  $y = \lambda v\tau$  при  $a/u < \tau < t$ .

По этим траекториям происходит концентрация вещества на поверхности  $\Gamma_{1-4,2-4}$ ,  $-\lambda ut < x < 0$ . Проследивая характеристики, приходящие в точки данной поверхности, получим, что  $A$  равно объединению трех треугольников с вершинами

$$\{(0, 0); (ut, -\theta vt); (ut, \Theta vt)\}, \quad \{(0, 0); (ut, -\theta vt); (\theta ut, -\theta vt)\}, \\ \{(0, 0); (-ut, \Theta vt); (-\Theta ut, \Theta vt)\}.$$

Однако рассмотренные области, с которых вещество концентрируется на поверхностях, а именно,  $\mathcal{L}_t^{-1}(\Gamma_{1-2})$ ,  $\mathcal{L}_t^{-1}(\Gamma_{1-4,2-4}, x > 0)$  и  $A$  окружают еще один треугольник с вершинами  $\{(0, 0); (-ut, \Theta vt); (ut, \Theta vt)\}$ . Тогда с этого последнего треугольника вещество должно концентрироваться на кривой с ненулевым импульсом  $J$  в соответствии с (3.3). Однако в этом случае сечения плоскостями  $t = \text{const}$  данной кривой и поверхности  $\Gamma_{1-4,2-4}$  движутся в разных направлениях, т.е. нарушается структура теоремы 1. Таким образом, данная конфигурация существовать не может.

Теперь рассмотрим утверждение 2). Опять же будем опускать индекс  $t$  при обозначении мер. Легко видеть, что при постоянных  $\varrho^\pm$ ,  $\mathbf{u}^\pm$  система (3.2) имеет первый интеграл

$$P\{u^+v^- - u^-v^+ + [v]U - [u]V\} = C(l). \tag{4.4}$$

Поскольку в начальный момент времени все меры предполагаются абсолютно непрерывными по отношению к обычной мере Лебега, то можно считать, что  $C(l) \equiv 0$ . Нам необходимо решить (3.2) в случае  $\varrho^+ = \varrho$ ,  $\mathbf{u}^+ = (u, -v)$ ,  $\varrho^- = R$ ,  $\mathbf{u}^- = (-u, v)$ . В этом случае (3.2) вместе с (4.4), учитывая, что  $P > 0$ , принимают вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial \chi}{\partial l}(v\sigma - V\Delta) + \frac{\partial \gamma}{\partial l}(u\sigma + U\Delta), \\ \frac{\partial(PU)}{\partial t} = \frac{\partial \chi}{\partial l}u(V\sigma - v\Delta) - \frac{\partial \gamma}{\partial l}u(U\sigma + u\Delta), \tag{4.5} \\ vU + uV = 0,$$

где  $\sigma \equiv R + \varrho$ ,  $\Delta \equiv R - \varrho$ . Исключим  $V$  из первых двух уравнений (4.5) при помощи третьего уравнения. Тогда вместо первых двух уравнений (4.5) получим

$$u \frac{\partial P}{\partial t} = \left( v \frac{\partial \chi}{\partial l} + u \frac{\partial \gamma}{\partial l} \right) (u\sigma + U\Delta), \\ \frac{\partial(PU)}{\partial t} = - \left( v \frac{\partial \chi}{\partial l} + u \frac{\partial \gamma}{\partial l} \right) (U\sigma + u\Delta), \tag{4.6}$$

Умножая первое уравнение (4.6) на  $\sigma$ , а второе – на  $\Delta$  и складывая, приходим к системе

$$u \frac{\partial P}{\partial t} = \left( v \frac{\partial \chi}{\partial l} + u \frac{\partial \gamma}{\partial l} \right) (u\sigma + U\Delta), \\ \sigma u \frac{\partial P}{\partial t} + \Delta \frac{\partial(PU)}{\partial t} = 4\varrho Ru \left( v \frac{\partial \chi}{\partial l} + u \frac{\partial \gamma}{\partial l} \right).$$

Далее перейдем к автомодельному виду (4.2), аналогично тому, как это было сделано, например, в [9], [27]. Тогда вместо (4.4) получим следующую систему уравнений

(“штрих” обозначает дифференцирование по  $s$ ):

$$\begin{aligned} u(m - sm') &= C_0(u\sigma + \Delta(X - sX')), \\ \sigma u(m - sm') + \Delta\{m(X - sX') - s(m(X - sX'))'\} &= 4C_0u\varrho R, \\ vX + uY &= C_0s, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где  $s^\sharp C_0^\sharp = \lambda uv$ ,  $s^b C_0^b = -\lambda uv$ . Далее будем иметь в виду, что все произвольные константы вида  $C_k$ ,  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , могут различаться для решений “ $\sharp$ ” и “ $b$ ”, что при необходимости будет отмечено появлением соответствующего индекса. Деля первые два уравнения (4.7) на  $-s^2$ , выделим полную производную и придем к соотношениям

$$\begin{aligned} um &= C_0(u\sigma + \Delta X) + C_1s, \\ m(\sigma u + \Delta(X - sX')) &= 4C_0u\varrho R + C_2s, \end{aligned} \quad (4.8)$$

откуда легко получить следующее представление для функции  $X(s)$ :

$$(\Delta X + \sigma u + A_1s)^2 = g(s) \equiv 4\varrho Ru^2 + 2A_2us + 2A_3s^2, \quad (4.9)$$

при этом  $A_k \equiv C_k/C_0$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

Теперь учтем условия (4.3) и соотношение  $vX' + uY' = C_0$ , следующее из последней формулы (4.7). Тогда вместе с формулами (4.8) получим

$$\begin{aligned} \varrho C_0^\sharp + v(X^\sharp)'(\sqrt{\varrho R} - \varrho) &= \frac{m^\sharp}{2}, \\ u(mC_0^{-1})^\sharp &= u\sigma + A_1^\sharp s^\sharp, \\ (mC_0^{-1})^\sharp(u\sigma - \Delta s^\sharp(X^\sharp)') &= 4u\varrho R + A_2^\sharp s^\sharp \end{aligned} \quad (4.10)$$

и

$$\begin{aligned} \sqrt{\varrho R} C_0^b + v(X^b)'(\varrho - \sqrt{\varrho R}) &= \frac{m^b}{2}, \\ u(mC_0^{-1})^b &= 2u\sqrt{\varrho R} + A_1^b s^b, \\ (mC_0^{-1})^b(2u\sqrt{\varrho R} - \Delta s^b(X^b)') &= 4u\varrho R + A_2^b s^b. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Из условий на  $X^p(s^p)$ ,  $p = \sharp, b$ , см. (4.3), имеем

$$(u\sigma + A_1^\sharp s^\sharp)^2 \equiv (B_1^\sharp)^2 = g(s^\sharp), \quad (2u\sqrt{\varrho R} + A_1^b s^b)^2 \equiv (B_1^b)^2 = g(s^b). \quad (4.12)$$

Далее, для того, чтобы получающиеся решения зависели только от  $s/s^p$ ,  $p = \sharp, b$  необходимо следующее. Из соотношений (4.3) величины  $m^p s^p$  зависят только от параметров начальных данных (4.1). Соотношения (4.9) диктуют, что зависимости такого же характера есть у величин  $A_i^p s^p$ ,  $i = 1, 2$  и  $A_3^p (s^p)^2$ . Легко видеть, что если выразить  $s^p(X^p)'$  из, например, первых уравнений (4.10), (4.11), то оставшиеся уравнения и соотношение (4.12) будут совместимы с указанными требованиями.

Теперь из уравнений (4.10), (4.11) можно получить соотношение, связывающее  $B_1^p$  и  $A_2^p$ , которое оказывается одним и тем же для  $p = \sharp, b$

$$(B_1^p)^2(\sqrt{R} - \sqrt{\varrho}) - 2u\sqrt{\varrho R}(\sqrt{R} + \sqrt{\varrho}) + 2\sqrt{\varrho}(4u^2\varrho R + A_2^p s^p u) = 0. \quad (4.13)$$

Соотношения (4.12), (4.13) оставляют свободным один параметр, например,  $A_3^p$ , который можно использовать для того, чтобы удовлетворить условию (3.3). Теорема доказана.

В заключение с иллюстративной целью приведем пример численного расчета, показывающий возможность системы типа (1.1) моделировать крупномасштабную структуру Вселенной. Об этом вопросе с физической точки зрения см., например, [21].

На рис. 1 приведен расчет Н. В. Ключнева обобщенных решений системы (1.1) на основе подхода [28] и авторской реализации приближенной динамики прилипания. Для расчета была использована следующая модельная постановка, связанная с астрофизическим содержанием. В качестве модельного начального поля плотности  $\varrho_0 = \varrho(\mathbf{x}, 0)$  была взята гауссова случайная величина  $N(1, 0.3)$ , т.е. имеющая нормальное распределение с математическим ожиданием 1 и дисперсией 0.3. Крайние значения этого распределения были “обрезаны” так, чтобы  $\varrho_0 \in [0, 2]$ . Компоненты модельного начального поля скорости  $(u_0, v_0)$  удовлетворяли следующей системе уравнений

$$\begin{cases} u_0 = -\phi_x, \\ v_0 = -\phi_y, \\ \Delta\phi = 4\pi G(\varrho_0 - \bar{\varrho}_0), \end{cases} \quad (4.14)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная, а  $\bar{\varrho}_0$  означает среднее по области значение начального поля плотности. Граничные условия полагались периодическими. Рис. 1 демонстрирует возникновение и эволюцию двумерной структуры, состоящей из кластеров – крупных точек, соединенных одномерными нитями, которые в данном расчете представлены последовательностями точек меньшего размера. С течением времени число нитей сокращается, а число и размер крупных точек растет.

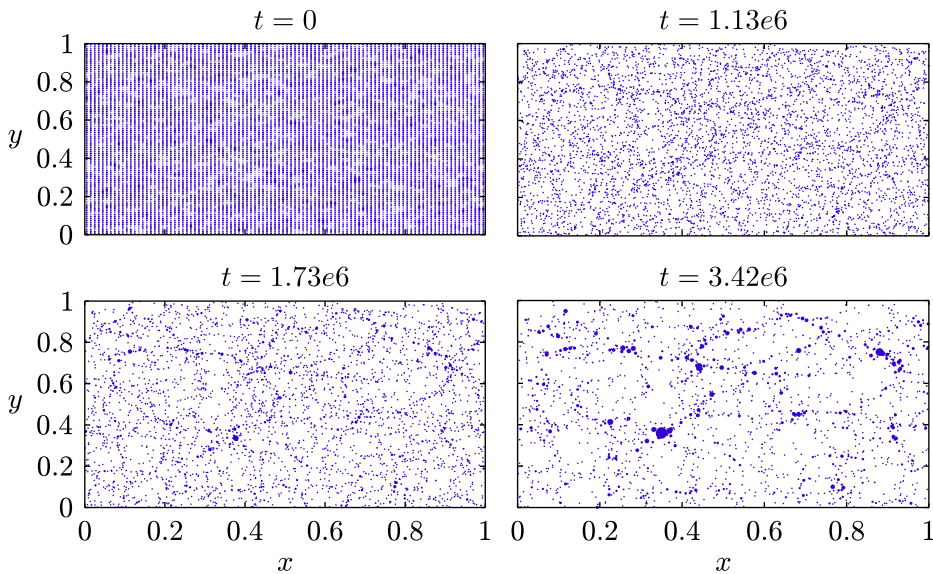


Рис. 1. Дискретное распределение вещества при расчете методом динамики прилипания в разные моменты времени.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Н. Крайко, “О поверхностях разрыва в среде, лишенной собственного давления”, *Прикладная математика и механика*, **43**:3 (1979), 500–510.
- [2] F. Bouchut, “On zero-pressure gas dynamics”, *Advances in Kinetic Theory and Computing*, Ser. Adv. Math. Appl. Sci., **22**, ed. B. Perthame, World Sci., Singapore, 1994, 171–190.
- [3] В. И. Ю. Г. Рыков, Я. Г. Синай, “Вариационный принцип Лакса–Олейник для некоторых одномерных систем квазилинейных уравнений”, *УМН*, **50**:1 (301) (1995), 193–194.
- [4] E. Grenier, “Existence globale pour la système des gaz sans pression”, *C. R. Acad. Sci. Ser. I. Math.*, **321**:2 (1995), 171–174.
- [5] W. E, Yu. G. Rykov, Ya. G. Sinai, “Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in ashesion particle dynamics”, *Comm. Math. Phys.*, **177** (1996), 349–380.
- [6] F. Huang, Z. Wang, “Well posedness for pressureless flow”, *Comm. Math. Phys.*, **222**:1 (2001), 117–146.
- [7] J. Li, G. Warnecke, “Generalized characteristics and the uniqueness of entropy solutions to zero-pressure gas dynamics”, *Adv. Differential Equations*, **8**:8 (2003), 961–1004.
- [8] R. Hynd, “A trajectory map for the pressureless Euler equations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **373**:10 (2020), 6777–6815.
- [9] J. Li, T. Zhang, S. L. Yang, *The Two-Dimensional Riemann Problem in Gas Dynamics*, Longman, London, 1998.
- [10] J. F. Colombeau, *Elementary Introduction to New Generalized Functions*, North-Holland Math. Stud., **113**, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [11] Ю. Г. Рыков, “Особенности типа ударных волн в среде без давления, решения в смысле теории меры и в смысле Коломбо”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 1998, 030.
- [12] Yu. G. Rykov, “On the nonhamiltonian character of shocks in 2-D pressureless gas”, *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8)*, **5** (2002), 55–78.
- [13] Ю. Г. Рыков, “Вариационный принцип для двумерной системы уравнений газовой динамики без давления”, *УМН*, **51**:1 (307) (1996), 165–166.
- [14] J. Li, H. Yang, “Delta-shock waves as limits of vanishing viscosity for multidimensional zero-pressure gas dynamics”, *Quart. Appl. Math.*, **59** (2001), 315–342.
- [15] В. М. Шелкович, “Сингулярные решения систем законов сохранения типа  $\delta$ - и  $\delta'$ -ударных волн и процессы переноса и концентрации”, *УМН*, **63**:3 (381) (2008), 73–146.
- [16] S. Albeverio, O. S. Rozanova, V. M. Shelkovich, *Transport and Concentration Processes in the Multidimensional Zero-Pressure Gas Dynamics Model With Energy Conservation Law*, 2011, arXiv: 1101.5815.
- [17] Ю. Г. Рыков, “Решения с распадом вещества в системе уравнений газовой динамики без давления”, *Матем. заметки*, **108**:3 (2020), 477–480.
- [18] N. V. Klyushnev, Yu. G. Rykov, “Non-conventional and conventional solutions for one-dimensional pressureless gas”, *Lobachevskii J. Math.*, **42**:11 (2021), 2615–2625.
- [19] K. Khanin, A. Sobolevski, “Particle dynamics inside shocks in Hamilton–Jacobi equations”, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **368**:1916 (2010), 1579–1593.
- [20] K. Khanin, A. Sobolevski, “On dynamics of Lagrangian trajectories for Hamilton–Jacobi equations”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **219**:2 (2016), 861–885.
- [21] С. Н. Гурбатов, А. И. Саичев, С. Ф. Шандарин, “Крупномасштабная структура Вселенной. Приближение Зельдовича и модель слипания”, *УФН*, **182**:3 (2012), 233–261.
- [22] M. Sever, “An existence theorem in the large for zero-pressure gas dynamics”, *Differential Integral Equations*, **14**:9 (2001), 1077–1092.
- [23] A. Bressan, T. Nguyen, “Non-existence and non-uniqueness for multidimensional sticky particle systems”, *Kinet. Relat. Models*, **7**:2 (2014), 205–218.

- [24] S. Bianchini, S. Daneri, *On the Sticky Particle Solutions to the Multi-Dimensional Pressureless Euler Equations*, 2020, arXiv: 2004.06557.
- [25] А. И. Аптекарев, Ю. Г. Рыков, “Вариационный принцип для многомерных законов сохранения и среды без давления”, *УМН*, **74**:6 (450) (2019), 159–160.
- [26] А. И. Аптекарев, Ю. Г. Рыков, “Детализация механизма образования особенностей в системе уравнений газовой динамики без давления”, *Докл. РАН*, **484**:6 (2019), 655–658.
- [27] Y. Pang, “The Riemann problem for the two-dimensional zero-pressure Euler equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **472**:2 (2019), 2034–2074.
- [28] A. Chertock, A. Kurganov, Yu. Rykov, “A new sticky particle method for pressureless gas dynamics”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **45**:6 (2007), 2408–2441.

**А. И. Аптекарев**

Институт прикладной математики  
им. М.В. Келдыша Российской академии наук,  
г. Москва  
*E-mail*: [aptekaa@keldysh.ru](mailto:aptekaa@keldysh.ru)

Поступило

17.05.2022

Принято к публикации

20.05.2022

**Ю. Г. Рыков**

Институт прикладной математики  
им. М.В. Келдыша Российской академии наук,  
г. Москва  
*E-mail*: [yu-rykov@yandex.ru](mailto:yu-rykov@yandex.ru)