А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, А. Г. Коранчук, О конечных группах с формационно субнормальными нормализаторами силовских подгрупп, *Матем. заметки*, 2020, том 108, выпуск 5, 679–691

DOI: 10.4213/mzm12708

Математические заметки

Том 108 выпуск 5 ноябрь 2020

УДК 512.542

О конечных группах с формационно субнормальными нормализаторами силовских подгрупп

А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, А. Г. Коранчук

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Изучены свойства класса $\mathrm{w}^*\mathfrak{F}$ всех групп G, для которых $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и нормализаторы всех силовских подгрупп $\mathfrak{F}$-субнормальны в G. В частности, установлено, что такой класс является формацией, замкнутой относительно взятия холловых подгрупп. Найдены наследственные насыщенные формации $\mathfrak{F}$, совпадающие с $\mathrm{w}^*\mathfrak{F}$.

Библиография: 30 названий.

Ключевые слова: конечная группа, силовская подгруппа, силовский нормализатор, $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа, формация, наследственная насыщенная формация.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12708

1. Введение и постановка задачи. Рассматриваются только конечные группы. Хорошо известно, какую важную роль играют свойства нормализаторов неединичных примарных подгрупп (локальных подгрупп) при классификации конечных простых неабелевых групп. В последние годы локальные подгруппы активно используются при изучении непростых, в частности, разрешимых групп. В 1986 г. в работе [1] было установлено, что группа нильпотентна, если нормализаторы ее силовских подгрупп (кратко, силовские нормализаторы) нильпотентны. Группы со сверхразрешимыми силовскими нормализаторами изучались в работах [2]–[4]. Серия работ [5]–[8] посвящена исследованию групп, у которых силовские нормализаторы принадлежат насыщенной формации $\mathfrak{F}$.

В данной работе нас интересует следующий вопрос. Как свойства вложения силовских нормализаторов в группу влияют на строение всей группы?

Отметим следующие результаты. Группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда ее силовские нормализаторы совпадают с G. Согласно известной теореме Глаубермана [9], если в группе все силовские подгруппы самонормализуемы, то группа является p-группой для некоторого простого числа p.

Пусть H – подгруппа группы G. Рассмотрим цепь подгрупп

$$H = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \cdots \leqslant H_{n-1} \leqslant H_n = G. \tag{1.1}$$

Согласно [10] H называется $\mathbb{P}$-*субнормальной в* G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп (1.1) такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \dots, n$.

Согласно [11] H называется K-$\mathbb{P}$-*субнормальной в* G, если существует цепь подгрупп (1.1) такая, что либо H_{i-1} нормальна в H_i, либо $|H_i : H_{i-1}|$ есть простое число для любого $i = 1, \dots, n$.

В работе [12] Монахов и Княгина установили, что группа тогда и только тогда сверхразрешима, когда в ней все силовские нормализаторы $\mathbb{P}$-субнормальны.

Подгруппа H группы G называется *субмодулярной* в G [13], если существует цепь подгрупп (1.1) такая, что H_{i-1} – модулярная подгруппа в H_i для $i = 1, \dots, n$. Здесь *модулярная* в G [14] подгруппа – это модулярный элемент в решетке всех подгрупп группы G. В [15] изучен класс $s\mathfrak{U}$ всех сильно сверхразрешимых групп, т.е. всех сверхразрешимых групп, в которых любая силовская подгруппа субмодулярна. По [16; теорема 3.2], если в группе G нормализатор любой силовской подгруппы субмодулярен, то $G \in s\mathfrak{U}$.

Понятие субнормальности было обобщено Хоуксом в [17], Шеметковым в монографии [18] следующим образом.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*субнормальной* в G (обозначается H $\mathfrak{F}$-sn G), если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп (1.1) такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leqslant H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$.

В случае, когда $\mathfrak{F}$ совпадает с классом $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп, всякая $\mathfrak{N}$-субнормальная подгруппа является субнормальной, обратное утверждение в общем случае неверно. Однако в разрешимых группах эти понятия эквивалентны.

Еще одно обобщение субнормальности – понятие $\mathfrak{F}$-достижимой (K-$\mathfrak{F}$-субнормальной согласно [19; с. 236]), было предложено Кегелем [20].

Подгруппа H называется K-$\mathfrak{F}$-*субнормальной* в G (обозначается H K-$\mathfrak{F}$-sn G), если существует цепь подгрупп (1.1) такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $H_i^{\mathfrak{F}} \leqslant H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$.

Отметим, что в любой группе субнормальная подгруппа является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной обратное утверждение верно не всегда. Для случая $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ понятия субнормальной и K-$\mathfrak{N}$-субнормальной подгрупп эквивалентны. Если $\mathfrak{F}$ совпадает с классом $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп, то в любой разрешимой группе понятие $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы эквивалентно понятию $\mathfrak{U}$-субнормальной и K-$\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппы. В произвольной группе всякая $\mathfrak{U}$-субнормальная (K-$\mathfrak{U}$-субнормальная) подгруппа является $\mathbb{P}$-субнормальной (K-$\mathbb{P}$-субнормальной соответственно), обратное в общем случае неверно.

В монографии [19] нашли отражение результаты многочисленных работ, в которых были изучены свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных, K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп и их приложения.

В [21] было начато рассмотрение следующей общей задачи: как $\mathfrak{F}$-субнормальные (K-$\mathfrak{F}$-субнормальные) силовские подгруппы влияют на строение всей группы, где $\mathfrak{F}$ – непустая формация. В [22] исследовались классы $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$ всех групп G, у которых $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и в G для $p \in \pi \cap \pi(G)$ все силовские p-подгруппы являются $\mathfrak{F}$-субнормальными, соответственно K-$\mathfrak{F}$-субнормальными. В [23]–[26] такие классы групп были изучены для случая $\pi = \mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Интересное обобщение классов $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$ было получено в [27].

Отмеченные выше результаты привели к следующему определению.

Определение 1 [28]. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация групп. Подгруппа H группы G называется *сильно* K-$\mathfrak{F}$-*субнормальной* в G, если $N_G(H)$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G.

Ясно, что в любой группе всякая сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной. Обратное утверждение неверно. В качестве примера можно рассмотреть группу $G = [N]S$, где S – симметрическая группа степени 3, N – точный неприводимый S-модуль над полем F_7 из 7 элементов. Силовская 3-подгруппа Q группы G, которая лежит в S, K-$\mathfrak{U}$-субнормальна в G. Это следует из сверхразрешимости фактор-группы G/N и подгруппы $H = NQ$, а также K-$\mathfrak{U}$-субнормальности H в G. Заметим, что сама группа‘G не является сверхразрешимой. Так как $N_G(Q) = S$ не $\mathfrak{U}$-субнормальна в G, подгруппа Q не является сильно K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G.

Определение 2. Для непустой формации $\mathfrak{F}$ обозначим через $\mathrm{w}^*\mathfrak{F}$ – класс всех групп G, у которых $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и всякая силовская подгруппа является сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G.

Проблема. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация.*

(1) *Как свойства класса* $\mathrm{w}^*\mathfrak{F}$ *зависят от соответствующих свойств* $\mathfrak{F}$? *В частности, при каких условиях класс* $\mathrm{w}^*\mathfrak{F}$ *также является насыщенной формацией*;

(2) *Найти* $\mathfrak{F}$, *для которых* $\mathrm{w}^*\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Настоящая работа посвящена исследованию ряда случаев данной проблемы.

2. Предварительные сведения. В работе используются стандартные обозначения и определения. Необходимые сведения из теории групп и теории формаций можно найти в монографиях [18], [19] и [29].

Через $\mathbb{P}$ обозначается множество всех простых чисел, π – подмножество из $\mathbb{P}$, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Пусть G – группа, $p \in \mathbb{P}$. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей $|G|$ порядка G, $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа G, $O_\pi(G)$ – наибольшая нормальная π-подгруппа G, $\mathrm{Syl}_p(G)$ – множество всех силовских p-подгрупп G, $\mathrm{Syl}(G)$ – множество всех силовских подгрупп группы G, $F(G)$ – подгруппа Фиттинга G, т.е. наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа G, $F_p(G)$ – p-нильпотентный радикал G, т.е. наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа G, Z_p – циклическая группа порядка p, 1 – единичная подгруппа (группа).

Через $l_p(G)$ обозначается p-длина p-разрешимой группы G; арифметическая длина разрешимой группы G есть $\mathrm{al}(G) = \mathrm{Max}\, l_p(G)$, где p пробегает все простые числа $p \in \pi(G)$; $\mathfrak{L}_a(n)$ – это класс всех разрешимых групп G с $\mathrm{al}(G) \leqslant n$; $\mathfrak{L}_a(1)$ – это класс всех разрешимых групп G с $\mathrm{al}(G) \leqslant 1$.

В следующей лемме собраны известные свойства силовских подгрупп.

Лемма 1. *Пусть G – группа и $p \in \mathbb{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *пусть $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $N \trianglelefteq G$. Тогда $P \cap N \in \mathrm{Syl}_p(N)$ и $PN/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$, кроме того $N_G(PN/N) = N_G(P)N/N$*;

(2) *если $H/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$ и $N \trianglelefteq G$, то $H/N = PN/N$ для некоторой $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$*;

(3) *если* $P \in \mathrm{Syl}(G)$ *и* $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$, *то*

$$P \cap N_1N_2 = (P \cap N_1)(P \cap N_2), \qquad PN_1 \cap PN_2 = P(N_1 \cap N_2);$$

(4) *если* $\pi(G) = \{p_1, \dots, p_r\}$ *и* $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ *для* $i = 1, \dots, r$, *то* $G = \langle P_1, \dots, P_r \rangle$.

Лемма 2 [29; лемма 1.2]. *Пусть* U, V *и* W *– подгруппы группы* G. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:
(1) $U \cap VW = (U \cap V)(U \cap W)$;
(2) $UV \cap UW = U(V \cap W)$.

Предложение 1. *Если* $P \in \mathrm{Syl}(G)$ *и* $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$, *то*

$$N_G(P) \cap N_1N_2 = (N_G(P) \cap N_1)(N_G(P) \cap N_2),$$
$$N_G(P)N_1 \cap N_G(P)N_2 = N_G(P)(N_1 \cap N_2).$$

Доказательство. Проведем индукцией по $|G|$. Пусть N_1 и N_2 нормальные подгруппы в G и $P \in \mathrm{Syl}(G)$. Допустим $N_1 \cap N_2 \neq 1$ и N – минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в $N_1 \cap N_2$. По индукции

$$N_{G/N}(PN/N) \cap N_1/N \cdot N_2/N = (N_{G/N}(PN/N) \cap N_1/N)(N_{G/N}(PN/N) \cap N_2/N).$$

По лемме 1 (1) $N_{G/N}(PN/N) = N_G(P)N/N$. Используя тождество Дедекинда, имеем

$$N_G(P)N/N \cap N_1N_2/N = (N_G(P) \cap N_1N_2)N/N,$$
$$N_G(P)N/N \cap N_i/N = (N_G(P) \cap N_i)N/N \qquad \text{для} \quad i = 1, 2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} N_G(P) \cap N_1N_2 &= N_G(P) \cap (N_G(P)N \cap N_1N_2) \\ &= N_G(P) \cap (N_G(P) \cap N_1)N \cdot (N_G(P) \cap N_2)N \\ &= (N_G(P) \cap N_1)(N_G(P) \cap N_2)(N_G(P) \cap N) \\ &= (N_G(P) \cap N_1)(N_G(P) \cap N_2). \end{aligned}$$

Пусть $N_1 \cap N_2 = 1$. Обозначим $T = N_G(P)N_1 \cap N_G(P)N_2$. Так как $PN_i \trianglelefteq N_G(P)N_i$, $i = 1, 2$, то $PN_1 \cap PN_2 \trianglelefteq T$. Из $N_1 \cap N_2 = 1$ и леммы 1(3) следует, что $PN_1 \cap PN_2 = P(N_1 \cap N_2) = P$. Итак, $P \trianglelefteq T$. Поэтому $T = N_G(P)$. Значит,

$$N_G(P)(N_1 \cap N_2) = N_G(P) = N_G(P)N_1 \cap N_G(P)N_2.$$

По лемме 2

$$N_G(P) \cap N_1N_2 = (N_G(P) \cap N_1)(N_G(P) \cap N_2).$$

Лемма 3 [18; лемма 3.9]. *Если* H/K *– главный фактор группы* G *и* $p \in \pi(H/K)$, *то* $G/C_G(H/K)$ *не содержит неединичных нормальных* p*-подгрупп, причем выполнено* $F_p(G) \leqslant C_G(H/K)$.

Лемма 4 [29; предложение A.4.13]. (a) *Характеристически простая группа является прямым произведением подгрупп, которые изоморфны некоторой простой группе.*

(b) *Пусть группа* $G = G_1 \times \dots \times G_n$ *с неабелевыми простыми группами* G_i. *Подгруппа* S *субнормальна в* G *тогда и только тогда, когда* S *есть прямое произведение подмножества факторов* G_i.

Будем использовать следующие обозначения: $\mathfrak{G}$ – класс всех групп, $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп, $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп, $\mathfrak{N}^2$ – класс всех метанильпотентных групп, $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ – класс всех групп с нильпотентным коммутантом.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Через $\pi(\mathfrak{X})$ обозначается множество всех простых делителей порядков групп, принадлежащих $\mathfrak{X}$. *Минимальной не $\mathfrak{X}$-группой* называется группа G такая, что любая собственная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{X}$, а $G \notin \mathfrak{X}$. Группа Шмидта – это минимальная не $\mathfrak{N}$-группа.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если

1) $\mathfrak{F}$ – гомоморф, т.е. из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$ всегда следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$;
2) из $N_i \trianglelefteq G$ и $G/N_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$, всегда следует, что $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *наследственной*, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит все ее подгруппы. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается *$\mathfrak{F}$-корадикал* группы G, т.е. наименьшая нормальная подгруппа из G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Функция $f\colon \mathbb{P} \to \{\text{формации}\}$ называется *локальным экраном*. Формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной*, если существует локальный экран f такой, что $\mathfrak{F}$ состоит из всех групп G, у которых $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого главного фактора H/K и каждого $p \in \pi(H/K)$.

Экран f формации $\mathfrak{F}$ называется *внутренним*, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого простого p. Внутренний экран f формации $\mathfrak{F}$ называется *максимальным внутренним*, если для любого ее внутреннего экрана h имеет место включение $h(p) \subseteq f(p)$ для любого простого p.

Лемма 5 [18; лемма 4.5]. *Пусть f – локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.*

Лемма 6 [18; теорема 4.7]. *Пусть f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является наследственной формацией, когда $f(p)$ – наследственная формация для любого простого p.*

Приведем известные свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных и K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, H и K – подгруппы группы G и выполнено $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *если H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G), то HN/N $\mathfrak{F}$-sn G/N (HN/N K-$\mathfrak{F}$-sn G/N)*;
(2) *если $N \leqslant H$ и H/N $\mathfrak{F}$-sn G/N (H/N K-$\mathfrak{F}$-sn G/N), то H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G)*;
(3) *если H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G), то HN $\mathfrak{F}$-sn G (HN K-$\mathfrak{F}$-sn G)*;
(4) *если H $\mathfrak{F}$-sn K (H K-$\mathfrak{F}$-sn K) и K $\mathfrak{F}$-sn G (K K-$\mathfrak{F}$-sn G), то H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G)*;
(5) *если все композиционные факторы G принадлежат $\mathfrak{F}$, то всякая субнормальная подгруппа G является $\mathfrak{F}$-субнормальной*;
(6) *пусть p – простое число и G – p-группа; если $Z_p \in \mathfrak{F}$, то в G все подгруппы являются $\mathfrak{F}$-субнормальными.*

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация, $H \leqslant G$ и $M \leqslant G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *если H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G), то $H \cap M$ $\mathfrak{F}$-sn M ($H \cap M$ K-$\mathfrak{F}$-sn M)*;

(2) *если* H $\mathfrak{F}$-sn G *и* M $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G *и* M K-$\mathfrak{F}$-sn G), *то* $H \cap M$ $\mathfrak{F}$-sn G ($H \cap M$ K-$\mathfrak{F}$-sn G);
(3) *если* $G^{\mathfrak{F}} \leqslant H$, *то* H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G);
(4) *если* H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G), *то* H^x $\mathfrak{F}$-sn G (H^x K-$\mathfrak{F}$-sn G) *для любого* $x \in G$.

Лемма 9 [18; теорема 15.10]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *насыщенная формация*, G – *группа с нильпотентным* $\mathfrak{F}$-*корадикалом. Пусть* H *и* M – *такие подгруппы из* G, *что* $H \in \mathfrak{F}$, $H \leqslant M$, $HF(G) = G$. *Если* H $\mathfrak{F}$-sn M, *то* $M \in \mathfrak{F}$.

3. Свойства класса групп $\mathrm{w}^*\mathfrak{F}$. Напомним, что класс групп

$$\mathrm{w}^*\mathfrak{F} = (G \mid \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F}), \text{ любая силовская подгруппа } G \text{ сильно K-}\mathfrak{F}\text{-субнормальна}).$$

Покажем, что в общем случае $\mathrm{w}^*\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^3$ – формация всех разрешимых групп, чья нильпотентная длина не превосходит 3. Обозначим $M = S_4$, где S_4 – симметрическая группа степени 4. Известно, что существует точный неприводимый M-модуль U над полем F_3 из 3 элементов. Рассмотрим полупрямое произведение $G = [U]M$. Заметим, что нильпотентная длина G равна 4 и $\pi(G) = \{2, 3\}$. Так как S_4 является минимальной не $\mathfrak{N}^2$-группой, то G – минимальная не $\mathfrak{N}^3$-группа. Отметим также, что G не является дисперсивной и метанильпотентной группой. Нетрудно видеть, что в G нормализаторы силовских подгрупп являются $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами, но сама группа G не принадлежит $\mathfrak{F}$.

Определение 3. Класс групп $\mathfrak{F}$ будем называть S_H-замкнутым, если из $G \in \mathfrak{F}$ следует, что в G любая холлова подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$.

Теорема 1. (1) *Если* $\mathfrak{F}$ – *непустая формация, то справедливы следующие утверждения*:
a) $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathrm{w}^*\mathfrak{F}$;
b) $\mathrm{w}^*\mathfrak{F}$ – *гомоморф*;
c) $\mathrm{w}^*\mathfrak{H} \subseteq \mathrm{w}^*\mathfrak{F}$ *всякий раз, как* $\mathfrak{H}$ – *формация и* $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

(2) *Если* $\mathfrak{F}$ – *непустая наследственная формация, то справедливы следующие утверждения*:
d) $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}^*\mathfrak{F}$;
e) $\mathrm{w}^*\mathfrak{F}$ – S_H-*замкнутая формация*;
f) $\mathrm{w}^*\mathfrak{F} = \mathrm{w}^*(\mathrm{w}^*\mathfrak{F})$.

Доказательство. (1) Предположим, что $\mathfrak{F}$ – непустая формация.

a) Пусть $G \in \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}$. Тогда $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Так как $N_G(P) = G$ для любой $P \in \mathrm{Syl}(G)$, из определения сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы следует, что $G \in \mathrm{w}^*\mathfrak{F}$.

b) Пусть $G \in \mathrm{w}^*\mathfrak{F}$, $N \trianglelefteq G$ и $p \in \pi(G/N)$. Рассмотрим $H/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$. По лемме 1 (2) имеем $H/N = PN/N$ для некоторой силовской p-подгруппы P группы G. Из $G \in \mathrm{w}^*\mathfrak{F}$ следует, что $N_G(P)$ $\mathfrak{F}$-sn G. Тогда по леммам 1 (1) и 7 (1)

$$N_{G/N}(H/N) = N_G(P)N/N \ \mathfrak{F}\text{-sn } G/N.$$

Отсюда и из $\pi(G/N) \subseteq \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ получаем, что $G/N \in \mathrm{w}^*\mathfrak{F}$. Итак, $\mathrm{w}^*\mathfrak{F}$ – гомоморф.

c) Пусть $\mathfrak{H}$ – формация, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ и $G \in \mathrm{w}^*\mathfrak{H}$. Тогда $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{H}) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Любая $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$, где $q \in \pi(G)$, является сильно K-$\mathfrak{H}$-субнормальной в G. Если выполнено $N_G(Q) = G$, то $N_G(Q)$ $\mathfrak{F}$-sn G. Если существует максимальная цепь подгрупп

$$N_G(Q) = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$$

такая, что $H_i^{\mathfrak{H}} \leqslant H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$, то из $H_i/H_i^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leqslant H_i^{\mathfrak{H}} \leqslant H_{i-1}$. Значит, $N_G(Q)$ $\mathfrak{F}$-sn G. Итак, $\mathrm{w}^*\mathfrak{H} \subseteq \mathrm{w}^*\mathfrak{F}$.

(2) Предположим сейчас, что $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация.

d) Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} = 1 \leqslant N_G(P)$ для любой $P \in \mathrm{Syl}(G)$. Из леммы 8 (3) следует, что $N_G(P)$ $\mathfrak{F}$-sn G. Поэтому $G \in \mathrm{w}^*\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}^*\mathfrak{F}$.

e) Рассмотрим группу $G \in \mathrm{w}^*\mathfrak{F}$ и произвольную холлову подгруппу H из G. Тогда $\pi(H) \subseteq \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Пусть $q \in \pi(H)$ и S – любая силовская q-подгруппа из H. Так как $S \in \mathrm{Syl}_q(G)$, имеем $N_G(S)$ $\mathfrak{F}$-sn G. По лемме 8 (1) $N_H(S) = (N_G(S) \cap H)$ $\mathfrak{F}$-sn H. Значит, $H \in \mathrm{w}^*\mathfrak{F}$, т.е. $\mathrm{w}^*\mathfrak{F}$ является S_H-замкнутым.

Ввиду доказанного в (1), b) $\mathrm{w}^*\mathfrak{F}$ – гомоморф.

Покажем, что $\mathrm{w}^*\mathfrak{F}$ замкнут относительно подпрямых произведений. Пусть G – группа наименьшего порядка такая, что в G существуют нормальные подгруппы N_1 и N_2, для которых

$$G/N_1 \in \mathrm{w}^*\mathfrak{F}, \qquad G/N_2 \in \mathrm{w}^*\mathfrak{F}, \qquad G/N_1 \cap N_2 \notin \mathrm{w}^*\mathfrak{F}.$$

Заметим, что из $\pi(G/N_i) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, $i = 1, 2$, следует, что $\pi(G/N_1 \cap N_2) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $N_1 \cap N_2 = 1$. Рассмотрим произвольную силовскую p-подгруппу R группы G, где $p \in \pi(G)$. Так как RN_i/N_i – силовская p-подгруппа в G/N_i и $G/N_i \in \mathrm{w}^*\mathfrak{F}$, то $N_{G/N_i}(RN_i/N_i)$ $\mathfrak{F}$-sn G/N_i, $i = 1, 2$. По леммам 1 (1) и 7 (2) имеем $N_G(R)N_i$ $\mathfrak{F}$-sn G, $i = 1, 2$. По лемме 8 (2) выполнено $N_G(R)N_1 \cap N_G(R)N_2$ $\mathfrak{F}$-sn G. Отсюда и из предложения 1 заключаем, что

$$N_G(R)N_1 \cap N_G(R)N_2 = N_G(R)(N_1 \cap N_2) = N_G(R) \ \mathfrak{F}\text{-sn } G.$$

Это противоречит выбору G. Итак, $\mathrm{w}^*\mathfrak{F}$ замкнут относительно подпрямых произведений.

f) Обозначим $\mathfrak{X} = \mathrm{w}^*\mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Тогда $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. По доказанному в (2), d) имеем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Поэтому $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{X})$. Пусть $q \in \pi(G)$ и Q – любая силовская q-подгруппа из G. Из $G \in \mathfrak{X}$ следует, что $N_G(Q)$ $\mathfrak{F}$-sn G. Допустим, что $N_G(Q) \neq G$. Тогда существует максимальная цепь подгрупп

$$N_G(Q) = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$$

такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leqslant H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$. По доказанному в (2) п. e) $\mathfrak{X}$ – формация. Поэтому из $H_i/H_i^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ следует, что $H_i^{\mathfrak{X}} \leqslant H_i^{\mathfrak{F}} \leqslant H_{i-1}$. Это означает, что $N_G(Q)$ $\mathfrak{X}$-sn G. Если $N_G(Q) = G$, то $N_G(Q)$ $\mathfrak{X}$-sn G. Итак, $G \in \mathrm{w}^*\mathfrak{X}$ и доказано включение $\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{w}^*\mathfrak{X}$.

Предположим, что $\mathfrak{X} \neq \mathrm{w}^*\mathfrak{X}$. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathrm{w}^*\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}$. Тогда $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{X}) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Так как $G \notin \mathfrak{X}$, в G найдется силовская p-подгруппа P

такая, что $N_G(P)$ не является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G. Тогда $N_G(P) \neq G$. Так как $G \in \mathrm{w}^*\mathfrak{X}$, существует максимальная цепь подгрупп

$$N_G(P) = H_0 < H_1 < \cdots < H_{n-1} < H_n = G$$

такая, что $H_i^{\mathfrak{X}} \leqslant H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$. Из $N_G(P) = N_{H_i}(P)$, $N_{H_i}(P)H_i^{\mathfrak{X}} \leqslant H_{i-1}$ и $H_i/H_i^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$ следует, что

$$N_{H_i}(P)H_i^{\mathfrak{X}}/H_i^{\mathfrak{X}} = N_{H_i/H_i^{\mathfrak{X}}}(PH_i^{\mathfrak{X}}/H_i^{\mathfrak{X}})\ \mathfrak{F}\text{-sn}\ H_i/H_i^{\mathfrak{X}}.$$

По лемме 7 (2) имеем $N_{H_i}(P)H_i^{\mathfrak{X}}$ $\mathfrak{F}$-sn H_i, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому $H_n^{\mathfrak{X}} = G^{\mathfrak{X}} \nsubseteq N_G(P)$. Заметим, что $N_G(P)$ $\mathfrak{F}$-sn H_1, так как $H_1^{\mathfrak{X}} \leqslant H_0 = N_G(P)$ и $N_G(P)H_1^{\mathfrak{X}}$ $\mathfrak{F}$-sn H_1. Значит, $n \neq 1$. Ввиду того, что $N_G(P)H_2^{\mathfrak{X}} \leqslant H_1$, по лемме 8 (1)

$$N_G(P) = N_G(P) \cap N_G(P)H_2^{\mathfrak{X}}\ \mathfrak{F}\text{-sn}\ N_G(P)H_2^{\mathfrak{X}}.$$

Из $N_G(P)H_2^{\mathfrak{X}}$ $\mathfrak{F}$-sn H_2 заключаем, что $N_G(P)$ $\mathfrak{F}$-sn H_2. Итак, можно считать, что $n \geqslant 3$ и $N_G(P)$ $\mathfrak{F}$-sn H_{n-1}. Поскольку $N_G(P)H_n^{\mathfrak{X}} \leqslant H_{n-1}$, ввиду леммы 8 (1)

$$N_G(P) = N_G(P) \cap N_G(P)H_n^{\mathfrak{X}}\ \mathfrak{F}\text{-sn}\ N_G(P)H_n^{\mathfrak{X}}.$$

Из $N_G(P)H_n^{\mathfrak{X}}$ $\mathfrak{F}$-sn $H_n = G$ следует, что $N_G(P)$ $\mathfrak{F}$-sn G. Получили противоречие. Значит, $\mathfrak{X} = \mathrm{w}^*\mathfrak{X}$.

4. Формации $\mathfrak{F}$, для которых $\mathrm{w}^*\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$**.** Настоящий раздел посвящен исследованию (2) проблемы.

Лемма 10. (1) *Класс $\mathfrak{L}_a(1)$ всех разрешимых групп, арифметическая длина которых не превосходит* 1, *является наследственной насыщенной формацией Фиттинга.*

(2) *Пусть G – разрешимая группа и $\Phi(G) = 1$. Тогда и только тогда G является минимальной не $\mathfrak{L}_a(1)$-группой, когда справедливы следующие утверждения*:

1) $|G| = p^\alpha q^\beta$, $l_p(G) = 1$, $l_q(G) = 2$, $l(G) = 3$;
2) *группа G имеет точно три класса максимальных подгрупп, чьи представители имеют следующее строение*: $G_p \leftthreetimes G_q^*$ *– группа Шмидта*, $F(G) \leftthreetimes G_p$ *и* $G_q \leftthreetimes \Phi(G_p)$, *где* $G_q = F(G) \leftthreetimes G_q^*$.

Доказательство. Утверждение (1) следует из того, что $\mathfrak{L}_a(1) = \bigcap \mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ по всем $p \in \mathbb{P}$.

Утверждение (2) – это лемма 4.1 из [30].

Лемма 11. *Если G – бипримарная группа, арифметическая длина которой не превосходит* 1, *то G метанильпотентна.*

Доказательство. Пусть G – контрпример минимального порядка к утверждению леммы. Так как $\mathfrak{N}^2$ является наследственной насыщенной формацией, то $G = NM$, где N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, N – абелева p-группа p – некоторое простое число, M максимальна в G и является группой Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой. Так как $O_p(M) = 1$, то p-длина G равна 2. Получили противоречие с тем, что $G \in \mathfrak{L}_a(1)$.

Лемма 12. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация и G – разрешимая группа, арифметическая длина которой не превосходит* $1, G \neq N_G(P)$ *и* $N_G(P) \in \mathfrak{F}$ *для любой* $P \in \mathrm{Syl}(G)$. *Тогда* $G \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть G – контрпример минимального порядка к утверждению леммы. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа из G. Если выполнено $G/N \neq N_{G/N}(H/N)$ для любой $H/N \in \mathrm{Syl}(G/N)$, то $G/N \in \mathfrak{F}$ по выбору G. Если $G/N = N_{G/N}(H/N)$ для некоторой $H/N \in \mathrm{Syl}_q(G/N)$, то $H/N = QN/N$ для некоторой $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ и $G = N_G(Q)N$. Отсюда $G/N \cong N_G(Q)/(N_G(Q) \cap N) \in \mathfrak{F}$. Если K – минимальная нормальная подгруппа из G и $K \neq N$, то $G/K \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – формация, имеем $G/N \cap K \cong G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Следовательно, N – единственная минимальная нормальная подгруппа из G. Ввиду разрешимости G заключаем, что N – p-группа. Из единственности N следует, что $F(G)$ является p-группой. Из условия следует, что $\pi(G) \geqslant 2$. Если $F(G) \neq P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, то $p \in \pi(G/F(G))$. Получили противоречие с тем, что арифметическая длина G не превосходит 1. Значит, $F(G) = P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $G = N_G(P)$. Это противоречие завершает доказательство леммы.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}_a(1)$. Тогда и только тогда группа G принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и в G любая силовская подгруппа является сильно* K-$\mathfrak{F}$-*субнормальной.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть группа $G \in \mathfrak{F}$. По условию $\mathfrak{F}$ – наследственная формация. Тогда по лемме 8 (3) в G любая подгруппа является $\mathfrak{F}$-субнормальной, в частности, $N_G(S)$ для любой силовской подгруппы S группы G. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть группа G – контрпример минимального порядка и N – минимальная нормальная подгруппа G.

Если $G = N$, то G – простая группа в силу минимальности N. Если $G \cong Z_p$, то из $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Предположим, что G – это простая неабелева группа и $p \in \pi(G)$. Пусть $G_p \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Тогда $N_G(G_p) \neq G$. Из $G \notin \mathfrak{F}$ следует, что $G^{\mathfrak{F}} = G$. По условию $N_G(G_p)$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной в G. Тогда найдется максимальная в G подгруппа M такая, что $N_G(G_p) \subseteq M$ и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$. Получили противоречие.

Пусть $N \neq G$. Так как в G/N любая силовская q-подгруппа $H/N = QN/N$ для некоторой $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$, $N_{G/N}(H/N) = N_G(Q)N/N$ и $N_G(Q)$ $\mathfrak{F}$-sn G, имеем $N_{G/N}(H/N)$ $\mathfrak{F}$-sn G/N. Следовательно, для G/N все условия теоремы выполняются. Ввиду выбора G получаем, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Если K – минимальная нормальная подгруппа G и $K \neq N$, то $G/K \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – формация, то

$$G/N \cap K \cong G \in \mathfrak{F}.$$

Получили противоречие с выбором G. Следовательно, G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N. Если $\Phi(G) \neq 1$, то из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ и насыщенности $\mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Снова получили противоречие с выбором G. Поэтому $\Phi(G) = 1$. В этом случае $N = G^{\mathfrak{F}}$ и существует максимальная подгруппа M в G такая, что $G = NM$. Рассмотрим следующие случаи.

1) N – неабелева группа. Пусть $p \in \pi(N)$ и $G_p \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Тогда $N_G(G_p) \neq G$. В противном случае $G_p \trianglelefteq G$ и $N \subseteq G_p$, так как N – единственная минимальная

нормальная подгруппа в G. Но тогда N – абелева группа. Противоречие с предположением.

Рассмотрим $N_G(G_p)N$. Если $N_G(G_p)N = G$, то из $\mathfrak{F}$-субнормальности $N_G(G_p)$ в G получаем, что найдется максимальная подгруппа W в G такая, что $N_G(G_p) \subseteq W$ и $N = G^{\mathfrak{F}} \subseteq W$. Откуда следует, что $G = N_G(G_p)N \subseteq W \neq G$. Противоречие.

Пусть теперь $N_G(G_p)N \neq G$. Заметим, что

$$G_p \cap N = N_p \in \mathrm{Syl}_p(N), \qquad N_p = G_p \cap N \trianglelefteq N_G(G_p) \cap N.$$

Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация и $N_G(G_p)$ $\mathfrak{F}$-sn G, по лемме 8 (1) имеем $N_G(G_p) \cap N$ $\mathfrak{F}$-sn N. Ввиду того, что N – минимальная нормальная подгруппа в G, имеем, либо $N^{\mathfrak{F}} = 1$, либо $N^{\mathfrak{F}} = N$.

Случай $N^{\mathfrak{F}} = 1$ невозможен, так как N неабелева, а $\mathfrak{F}$ состоит из разрешимых групп. Поэтому $N^{\mathfrak{F}} = N$. По лемме 4 (a) группа N является прямым произведением изоморфных простых неабелевых групп. Так как $N_G(G_p) \cap N$ $\mathfrak{F}$-sn N, заключаем, что либо $N_G(G_p) \cap N = N$, либо $N_G(G_p) \cap N \neq N$. Если $N_G(G_p) \cap N = N$, то $N_p = G_p \cap N \trianglelefteq N$. Тогда по лемме 4 (b) группа N_p есть прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп из N. Получили противоречие. Пусть $N_G(G_p) \cap N \neq N$. Тогда в N найдется максимальная подгруппа M такая, что $N_G(G_p) \cap N \leqslant M$ и $N^{\mathfrak{F}} \leqslant M$. Получили противоречие $N = N^{\mathfrak{F}} \leqslant M \neq N$.

2) N – абелева p-группа, p – некоторое простое число. Из включений $G/N \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ и $N \in \mathfrak{S}$ следует, что G разрешима. Из единственности N и $\Phi(G) = 1$ получаем, что $G = N \rtimes M$, где $G^{\mathfrak{F}} = N = C_G(N) = F(G)$ и M – максимальная подгруппа G, причем $M \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}_a(1)$.

Предположим, что M нильпотентна. По лемме 3 выполнено $O_p(M) = 1$, поэтому $\{p\} \cap \pi(M) = \varnothing$. Отсюда следует, что в M имеется нормальная силовская q-подгруппа M_q для некоторого $q \in \pi(M)$ и $q \neq p$. Поэтому $M_q = G_q$ является силовской q-подгруппой группы G. Тогда в силу единственности N следует, что $N_G(G_q) \neq G$. Так как M – максимальная подгруппа G и $M \subseteq N_G(G_q)$, то $M = N_G(G_q)$. Но это противоречит тому, что $N_G(G_q)$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G.

Будем считать, что M ненильпотентна. Пусть $\pi(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, где $p_1 = p$. Рассмотрим следующие случаи.

i) Пусть $n = 2$. Тогда $p \in \pi(M)$. По лемме 3 имеем $O_p(M) = 1$. Так как $M \in \mathfrak{L}_a(1)$, подгруппа $M \in \mathfrak{N}^2$ по лемме 11. Поэтому $M/F(M)$ нильпотентна. Заметим, что $F(M)$ – p_2-группа. Если $Q \in \mathrm{Syl}_{p_2}(M)$, то Q является нормальной подгруппой в M, кроме того $Q \in \mathrm{Syl}_{p_2}(G)$ и $N_G(Q) = M$. По условию $N_G(Q) = M$ $\mathfrak{F}$-sn G. Поэтому $N = G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$ и $G = NM \subseteq M$. Получили противоречие.

ii) Пусть $n \geqslant 3$. Покажем, что N – силовская p-подгруппа группы G. По теореме Холла $G = G_1G_2 \cdots G_n$, где $G_1, G_2, \dots, G_n$ – попарно перестановочные силовские p_1-, p_2-, …, p_n-подгруппы из G соответственно. Пусть $A_i = G_1G_i$, где $i \neq 1$. Так как

$$|A_i| < |G|, \qquad N_G(G_1) \cap A_i = N_{A_i}(G_1)\ \mathfrak{F}\text{-sn}\ A_i, \qquad N_G(G_i) \cap A_i = N_{A_i}(G_i)\ \mathfrak{F}\text{-sn}\ A_i,$$

то $A_i \in \mathfrak{F}$. Из бипримарности A_i по лемме 11 имеем $A_i \in \mathfrak{N}^2$. Заметим, что $N \subseteq A_i$. Так как $N = C_G(N)$ и $p_1 = p$, имеем $F(A_i)$ – p-группа. Из $A_i \in \mathfrak{N}^2$ следует, что

$A_i/F(A_i) \in \mathfrak{N}$. Тогда $G_1/F(A_i) \trianglelefteq A_i/F(A_i)$. Откуда $G_1 \trianglelefteq A_i$. Значит, $G_i \subseteq A_i \subseteq N_G(G_1)$. Тогда $G \subseteq N_G(G_1)$ и $G_1 \trianglelefteq G$.

Из $G_1 \cap M \trianglelefteq M$ и $O_p(M) = 1$ следует, что $G_1 \cap M = 1$. Итак, $G_1 = N \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Тогда M является p'-холловой подгруппой группы G. Рассмотрим $i \in \{2, \dots, n\}$ и любую $S \in \mathrm{Syl}_{p_i}(M)$. Тогда $S \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ и $N_G(S) \neq M$. Заметим, что $N_G(S) \neq G$ поскольку $N = C_G(N)$ и N – p-группа, $p \neq p_i$.

Покажем, что $N_G(S) \in \mathfrak{F}$. Предположим сначала, что $N_G(S) \cap N = 1$. Тогда из $G/N \in \mathfrak{F}$ и наследственности $\mathfrak{F}$ следует, что

$$N_G(S)N/N \cong N_G(S)/N_G(S) \cap N \cong N_G(S) \in \mathfrak{F}.$$

Пусть $N_G(S) \cap N = D \neq 1$. Тогда выполнено $D \trianglelefteq N_G(S)$, $S \trianglelefteq N_G(S)$, откуда $S \times D \trianglelefteq N_G(S)$ и $N_G(S) = (S \times D) \rtimes R$, где R – $\{p_1, p_i\}'$-холлова подгруппа из $N_G(S)$. Ввиду разрешимости G по теореме Холла $SR \leqslant M^x$ для некоторого $x \in G$ и найдется $\{p_i\}'$-холлова подгруппа H из G такая, что $DR \leqslant H$. Из $\mathrm{Syl}(H) \subseteq \mathrm{Syl}(G)$ следует, что $N_G(L)$ $\mathfrak{F}$-sn G для любой $L \in \mathrm{Syl}(H)$. По лемме 8 (1)

$$N_H(L) = N_G(L) \cap H \ \mathfrak{F}\text{-sn } H.$$

По выбору G подгруппа $H \in \mathfrak{F}$. Отметим, что $M^x \cong M \in \mathfrak{F}$. Ввиду наследственности $\mathfrak{F}$ имеем $N_G(S)/D \cong SR \in \mathfrak{F}$ и $N_G(S)/S \cong DR \in \mathfrak{F}$. Тогда $N_G(S)/S \cap D \cong N_G(S) \in \mathfrak{F}$.

Покажем, что $T = NN_G(S) \in \mathfrak{F}$. Так как $N_G(S)$ $\mathfrak{F}$-sn G и $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, по лемме 8 (1) имеем $N_G(S)$ $\mathfrak{F}$-sn T. По лемме 9 $T \in \mathfrak{F}$. Пусть h – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Из $T \in \mathfrak{F}$ по лемме 5 следует, что $T/F_p(T) \in h(p)$. Так как $N \leqslant F_p(T)$ и $N = C_G(N)$, имеем $O_{p'}(T) = 1$ и $N = F_p(T)$. Поэтому $T/N \in h(p)$. Отсюда

$$N_G(S)N/N \cong N_G(S)/N_G(S) \cap N \in h(p).$$

Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, по лемме 6 $h(p)$ – наследственная формация. Тогда

$$(N_G(S) \cap M)N/N \cong N_G(S) \cap M/N_G(S) \cap N \cap M \cong N_G(S) \cap M \in h(p).$$

Заметим, что $N_G(S) \cap M = N_M(S)$. Следовательно, $N_M(S) \in h(p)$. Ввиду леммы 12 заключаем, что $M \in h(p)$. Тогда $G/F_p(G) \cong M \in h(p)$. По лемме 5 группа $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Следствие 1 [12]. *Если нормализатор любой силовской подгруппы группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой в G, то G сверхразрешима.*

Следствие 2 [28]. *Тогда и только тогда $G \in \mathfrak{N}^2$, когда нормализатор любой силовской подгруппы группы G является $\mathfrak{N}^2$-субнормальной подгруппой в G.*

Следствие 3 [28]. *Тогда и только тогда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, когда нормализатор любой силовской подгруппы группы G является $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-субнормальной подгруппой в G.*

Следствие 4. *Тогда и только тогда $G \in \mathfrak{L}_a(1)$, когда нормализатор любой силовской подгруппы группы G является $\mathfrak{L}_a(1)$-субнормальной подгруппой в G.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] M. G. Bianchi, A. Gillio Berta Mayri, P. Hauck, “On finite soluble groups with nilpotent Sylow normalizers”, *Arch. Math. (Basel)*, **47**:3 (1986), 193–197.

[2] V. Fedri, L. Serena, “Finite soluble groups with supersoluble Sylow normalizers”, *Arch. Math. (Basel)*, **50**:1 (1988), 11–18.

[3] R. A. Bryce, V. Fedri, L. Serena, “Bounds on the Fitting length of finite soluble groups with supersoluble Sylow normalizers”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **44**:1 (1991), 19–31.

[4] А. Баллестер-Болинше, Л. А. Шеметков, “О нормализаторах силовских подгрупп в конечных группах”, *Сиб. матем. журн.*, **40**:1 (1999), 3–5.

[5] A. D’Aniello, C. De Vivo, G. Giordano, “Saturated formations and Sylow normalizers”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **69**:1 (2004), 25–33.

[6] A. D’Aniello, C. De Vivo, G. Giordano, M. D. Pérez-Ramos, “Saturated formations closed under Sylow normalizers”, *Comm. Algebra.*, **33**:8 (2005), 2801–2808.

[7] L. Kazarin, A. Martínez-Pastor, M. D. Pérez-Ramos, “On the Sylow graph of a group and Sylow normalizers”, *Israel J. Math.*, **186** (2011), 251–271.

[8] L. Kazarin, A. Martínez-Pastor, M. D. Pérez-Ramos, “On Sylow normalizers of finite groups”, *J. Algebra Appl.*, **13**:3 (2014), 1350116.

[9] G. Glaubermann, “Prime-power factor groups of finite groups. II”, *Math. Z.*, **117** (1970), 46–56.

[10] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, “О конечных группах сверхразрешимого типа”, *Сиб. матем. журн.*, **51**:6 (2010), 1270–1281.

[11] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, “О K-$\mathbb{P}$-субнормальных подгруппах конечных групп”, *Матем. заметки*, **95**:4 (2014), 517–528.

[12] V. N. Kniahina, V. S. Monakhov, “On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups”, *Int. J. Group Theory*, **2**:4 (2013), 21–29.

[13] I. Zimmermann, “Submodular subgroups in finite groups”, *Math. Z.*, **202**:4 (1989), 545–557.

[14] R. Schmidt, *Subgroup Lattices of Groups*, De Gruyter Exp. in Math., **14**, Walter de Gruyter, Berlin, 1994.

[15] В. А. Васильев, “Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами”, *Сиб. матем. журн.*, **56**:6 (2015), 1277–1288.

[16] В. А. Васильев, “О влиянии субмодулярных подгрупп на строение конечных групп”, *Весн. Вiцебск. дзярж. ун-та.*, **91**:2 (2016), 17–21.

[17] T. Hawkes, “On formation subgroups of a finite soluble group”, *J. London Math. Soc.*, **44** (1969), 243–250.

[18] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Наука, М., 1978.

[19] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, *Classes of Finite Groups*, Springer, Dordrecht, 2006.

[20] O. H. Kegel, “Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten”, *Arch. Math. (Basel)*, **30**:3 (1978), 225–228.

[21] А. Ф. Васильев, “О влиянии примарных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп на строение группы”, *Вопросы алгебры*, 1995, № 8, 31–39.

[22] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, А. С. Вегера, “Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп”, *Сиб. матем. журн.*, **57**:2 (2016), 259–275.

[23] Т. И. Васильева, А. И. Прокопенко, “Конечные группы с формационно субнормальными подгруппами”, *Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук*, 2006, № 3, 25–30.

[24] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, “О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами”, *ПФМТ*, 2011, № 4 (9), 86–91.

[25] А. С. Вегера, “О локальных свойствах формации всех групп с K-$\mathfrak{F}$-субнормальными силовскими подгруппами”, *ПФМТ*, 2014, № 3 (20), 53–57.

[26] В. С. Монахов, И. Л. Сохор, “Конечные группы с формационно субнормальными примарными подгруппами”, *Сиб. матем. журн.*, **58**:4 (2017), 851–863.

[27] V. I. Murashka, "Finite groups with given sets of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups", *Asian-Eur. J. Math.*, **13**:4 (2019), 2050073.

[28] А. Ф. Васильев, "Конечные группы с сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальными силовскими подгруппами", *ПФМТ*, 2018, № 4 (37), 66–71.

[29] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, De Gruyter Exp. in Math., **4**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[30] V. N. Semenchuk, "Minimal non $\mathfrak{F}$-subgroups", *Algebra and Logik*, **18**:3 (1979), 348–382.

А. Ф. Васильев
Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины, Республика Беларусь
E-mail: formation56@mail.ru

Поступило
07.04.2020
Принято к публикации
15.04.2020

Т. И. Васильева
Белорусский государственный университет
транспорта
E-mail: tivasilyeva@mail.ru

А. Г. Коранчук
Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины, Республика Беларусь
E-mail: melchenkonastya@mail.ru