С. Б. Вакарчук, Оценки значений n-поперечников классов аналитических функций в весовых пространствах $H_{2,\gamma}(D)$, *Матем. заметки*, 2020, том 108, выпуск 6, 803–822

DOI: 10.4213/mzm12598

Математические заметки

Том 108 выпуск 6 декабрь 2020

УДК 517.5

Оценки значений n-поперечников классов аналитических функций в весовых пространствах $H_{2,\gamma}(D)$

С. Б. Вакарчук

В односвязной ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$, имеющей спрямляемую жорданову границу ∂D, рассмотрены классы $H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi)$, $k \in \mathbb{N}$, состоящие из аналитических в D функций $f \in H_{2,\gamma}(D)$, для каждой из которых при любом $t \in (0,1)$ выполняется условие $\Omega_k(f,t) \leqslant \Phi(t)$. Здесь $\Omega_k(f)$ – обобщенный модуль непрерывности k-го порядка в $H_{2,\gamma}(D)$, а Φ – мажоранта. Для указанных классов найдены оценки сверху и снизу различных n-поперечников, а также верхние границы модулей коэффициентов Фурье. Получено ограничение на мажоранту Φ, при котором удается вычислить точные значения указанных экстремальных характеристик. В случае единичного круга аналогичные результаты найдены для классов аналитических функций, в определении которых помимо $\Omega_k(f)$ и Φ использованы композиции Адамара $\mathscr{D}(\mathscr{B}_m, f)$. Указаны конкретные реализации некоторых из полученных точных результатов.

Библиография: 32 названия.

Ключевые слова: весовая функция, ортогональная система полиномов, обобщенный модуль непрерывности, мажоранта, ряд Фурье, коэффициент Фурье, композиция Адамара, n-поперечник.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12598

1. Введение и постановка задачи

1.1. К настоящему времени уже получен целый ряд окончательных результатов, связанных с вычислением точных, точных порядковых или асимптотических значений различных n-поперечников классов функций комплексного переменного, аналитических в ограниченных односвязных областях комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (см., например, работы [1; гл. 3, § 3], [2; гл. 8], [3; пп. 7.5, 7.6], [4]–[5] и цитированную в них литературу). Здесь в первую очередь следует упомянуть работы Тихомирова, Бабенко, Тайкова, Пинкуса, Фаркова, Осипенко, Стесина, Фишера и Миччелли и других (см., например, [6]–[17]). В подавляющем большинстве случаев точные значения n-поперечников удалось найти для круга радиуса $R > 0$, т.е. $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

Исходя из направленности данной статьи, нас, в первую очередь, будут интересовать результаты, связанные с оценками значений n-поперечников классов аналитических в односвязной области функций, у которых характеристики гладкости (или нелинейные функционалы от них) мажорируются на некотором множестве положительной меры заданной функцией.

1.2. Напомним, что первый точный результат, связанный с вычислением значений колмогоровских n-поперечников d_n классов аналитических в U_1 функций, у которых производные r-го порядка принадлежат пространству Харди H_∞, был получен В. М. Тихомировым в 1960 г. Позднее, в 1967 г., этот результат был распространен Л. В. Тайковым на пространства Харди H_p, $1 \leqslant p < \infty$. При этом оценки сверху величины d_n в работах Тихомирова и Тайкова базировались на основополагающем результате К. И. Бабенко, а именно линейном методе аппроксимации рассматриваемых классов, а оценки снизу следовали из неравенства С. Н. Бернштейна для полиномов и полученной В. М. Тихомировым теоремы о поперечнике шара. Позднее эти результаты были распространены М. З. Двейриным на случай дробных производных Римана–Лиувилля порядка α. Дальнейшее их обобщение, связанное с вычислением точных значений n-поперечников классов голоморфных функций многих переменных с ограниченными дробными производными типа Римана–Лиувилля в симметричных областях трубчатого типа, было получено Фарковым [4]. Так же им были указаны оптимальные методы аппроксимации.

1.3. Значительное внимание в теории аппроксимации функций комплексного переменного уделяется вычислению точных значений различных n-поперечников классов аналитических в круге U_R функций, когда в определениях классов принимают участие различные характеристики гладкости и мажоранты. Первые точные результаты в этом направлении были получены Тайковым в 1977 г. [6] и Айнуллоевым и Тайковым в 1986 г. [7]. Они касались вычисления в метрике пространства Харди H_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, колмогоровских n-поперечников классов аналитических в U_1 функций, усредненные характеристики гладкости которых в H_p не превосходят заданной мажоранты. Отметим, что точные значения этих n-поперечников удалось вычислить лишь при достаточно жестких условиях на мажоранту Ψ. Так, например, в [6] условие на мажоранту Ψ имеет вид

$$\frac{\Psi(\lambda t)}{\Psi(t)} = \frac{\pi}{\pi - 2} \begin{cases} 1 - \dfrac{2\sin(\lambda\pi/2)}{(\pi\lambda)}, & 0 < \lambda \leqslant 2; \\ 2\left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right), & \lambda \geqslant 2, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $0 < t \leqslant \pi/2$. Чрезвычайно важным является доказательство того факта, что множество мажорант, удовлетворяющих требуемому условию, не пусто. В [6], в частности, было показано, что функция $\Psi(t) = t^{2/(\pi-2)}$ удовлетворяет (1.1). В дальнейшем в работах автора [13], [14] были найдены точные значения линейного и гельфандовского n-поперечников некоторых из рассмотренных в [6], [7] классов. Дальнейшую информацию о результатах подобного вида можно найти, например, в работах [5], [15].

1.4. В случае произвольной односвязной области D и невырожденного континуума K такого, что область $D \backslash K$ является двусвязной, В. Д. Ерохиным в 1968 г. были найдены асимптотические значения взятых в степенях $1/n$ колмогоровского и линейного n-поперечников класса A_∞ в метрике пространства $C(K)$. Здесь A_∞ – сужение единичного шара пространства Харди $H_\infty(D)$ на континуум K. Данный результат удалось получить благодаря построению нового базиса, который стал естественным обобщением базиса Фабера (см., например, [4; п. 1]). Обобщение базиса В. Д. Ерохина на многосвязный случай впоследствии было осуществлено Фарковым. Для ограниченной области D, граница которой состоит из $(m+1)$-й, $m \geqslant 0$, непересекающейся аналитической простой замкнутой кривой, Фишер и Миччелли (см., например, [3; п. 7.5, теорема 5.5]) получили соотношение, характеризующее асимптотическое поведение $1/n$-й степени колмогоровского n-поперечника класса A_∞ в $C(K)$, выраженное через емкость K в D (здесь $K \subset D$ – компактное подмножество). В случае $m = 0$ получаем соответствующий результат для ограниченной односвязной области D.

Отметим также статью Абилова, Абиловой и Керимова [16], в которой в пространстве $L_2(D, p(z))$, состоящем из комплекснозначных функций $f\colon D \to \mathbb{C}$, суммируемых с квадратом в области D с весом $p(z)$, были вычислены точные значения колмогоровских n-поперечников классов, в определении которых участвуют характеристики гладкости и мажоранты. О распространении этого результата на пространство $H_{2,\gamma}(D)$ и сопоставлении его с теоремой 1 данной статьи будет сказано в п. 3.3.

1.5. Данная статья продолжает указанную тематику и ее в определенном смысле можно рассматривать как распространение одного из результатов Григоряна, ученика А. В. Ефимова (см. [18; теорема 2 и следствие 1 из нее]) на случай аналитических функций комплексного переменного. Основными ее результатами являются теоремы 1, 3 и вытекающие из них следствия 1, 3 соответственно. Теорема 1 получена для произвольной ограниченной односвязной области D со спрямляемой жордановой границей и непрерывной в замкнутой области $\overline{D}$ весовой функцией γ, которая принимает положительные значения, а теорема 3 – для единичного круга при более жестких ограничениях на γ. Доказательства указанных теорем разбиты на две части, а именно – оценку сверху величины наилучшего полиномиального приближения классов функций, определенных при помощи характеристик гладкости, мажорант (теорема 1) и композиций Адамара (теорема 3), и оценку снизу бернштейновского n-поперечника b_n, основанную на классическом подходе, опирающемся на определение b_n и выбор в фиксированном подпространстве размерности $n+1$ шара подходящего радиуса, который бы принадлежал исследуемому классу (см., например, [2; гл. II, п. 1]). Вся используемая в статье информация о рассматриваемых в ней n-поперечниках, отличных от b_n, содержится в приведенном далее соотношении (3.1). В следствии 1 указаны точные значения различных n-поперечников классов аналитических в области D функций при достаточно слабом ограничении на мажоранту по сравнению, например, с (1.1). В следствии 3 при том же ограничении на мажоранту получены точные значения n-поперечников классов аналитических в U_1 функций, в определении которых, помимо прочего, использованы композиции Адамара, представляющие собой очень широкое обобщение понятия интегродифференцирования (см., например, [19; § 22, п. 3], [20], [9]).

Отметим, что указанный ранее результат Григоряна [18] получил дальнейшее развитие в работах автора [21], [22] для функций действительного переменного, а теорему 1 данной статьи можно рассматривать как распространение теоремы 2 из [22] на случай аналитических функций комплексного переменного.

2. Необходимые понятия и определения

Приведем необходимые сведения, которые понадобятся далее.

2.1. Напомним следующий общий факт (см., например, [23; гл. 1, § 4, п. A]). Пусть H – гильбертово пространство и $\{g_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ – какая-либо ортонормированная система в H, $\{a_j(f)\}_{j\in\mathbb{Z}_+} = \{(f,g_j)\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ – коэффициенты Фурье элемента $f \in H$. Здесь символом (f,g_j) обозначено скалярное произведение элементов f и g_j. При решении задач теории аппроксимации в H важным является требование того, чтобы линейные комбинации элементов системы $\{g_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ были плотны в H, т.е. чтобы $\{g_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ была полной ортонормированной системой. В связи с этим имеет место такое утверждение.

Теорема A [23]. *Следующие условия равносильны*:

1) $\{g_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ *есть полная ортонормированная система в* H;
2) *соотношение* $\lim\{\|f-\sum_{j=0}^{n-1}a_j(f)g_j\|_H : n\to\infty\}=0$ *выполняется для каждого элемента* $f\in H$;
3) *равенство Парсеваля* $\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}|a_j(f)|^2=\|f\|_H^2$ *справедливо для произвольного элемента* $f\in H$.

Здесь $\|f\|_H=(f,f)^{1/2}$ есть норма $f\in H$, а равенство из пункта 3 называют еще уравнением замкнутости для элемента $f\in H$ по системе $\{g_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$.

2.2. Пусть односвязная область D, расположенная в конечной части комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограничена спрямляемой жордановой кривой ∂D. Напомним, что такая область является областью Каратеодори (см., например, [24; гл. V, § 4, п. 4.8]). Пусть определенная в D функция $\gamma(z)$ является измеримой, неотрицательной, суммируемой по площади области D и почти всюду отличной от нуля. Тогда при указанных условиях однозначно определяется система полиномов $\{K_j(z)\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, имеющих положительный старший коэффициент и ортонормированных по площади области D с весом $\gamma(z)$ (см., например, [25]), т.е.

$$\iint_D \gamma(z)K_n(z)\overline{K_m(z)}\,dx\,dy=\begin{cases}1, & \text{если } n=m,\\ 0, & \text{если } n\neq m,\end{cases}\qquad z=x+iy.$$

Отметим, что в связи с одной проблемой Г. Фройда, посвященной построению обобщенного ряда Тейлора в случае односвязной области, такие многочлены при $\gamma(z)\equiv 1$ впервые были рассмотрены Карлеманом в [26].

Всюду далее в пп. 2–4 полагаем, что весовая функция $\gamma(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и отлична в ней от нуля.

Через $H_{2,\gamma}(D)$ обозначим множество аналитических в области D функций f, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{2,\gamma}:=\|f\|_{H_{2,\gamma}(D)}=\left\{\iint_D \gamma(z)|f(z)|^2\,dx\,dy\right\}^{1/2}.$$

В случае $\gamma_*(z)\equiv 1$ полагаем $H_2(D):=H_{2,\gamma_*}(D)$. Отметим, что $H_{2,\gamma}(D)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением, определенным формулой

$$(f,g):=\iint_D \gamma(z)f(z)\overline{g(z)}\,dx\,dy,$$

где $f, g \in H_{2,\gamma}(D)$. Поскольку весовая функция γ ограничена в $\overline{D}$ сверху и снизу положительными постоянными, то этого, как указано в [27; гл. II, § 5], достаточно для полноты ортонормированной системы многочленов $\{K_j(z)\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ в метрике пространства $H_{2,\gamma}(D)$. Следовательно, согласно теореме A для произвольной функции $f \in H_{2,\gamma}(D)$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f-\sum_{j=0}^{n-1}a_j(f)K_j\right\|_{2,\gamma}=0, \tag{2.1}$$

где

$$a_j(f)=\iint_D \gamma(z)f(z)\overline{K_j(z)}\,dx\,dy. \tag{2.2}$$

Таким образом, любой функции $f \in H_{2,\gamma}(D)$ ставится в соответствие ее ряд Фурье, т.е.

$$f(z)\sim\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}a_j(f)K_j(z),$$

частные суммы

$$S_{n-1}(f,z):=\sum_{j=0}^{n-1}a_j(f)K_j(z),\qquad n\in\mathbb{N},$$

которого в силу равенства (2.1) сходятся к f в среднем в смысле метрики пространства $H_{2,\gamma}(D)$. При этом

$$\|f\|_{2,\gamma}^2=\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}|a_j(f)|^2. \tag{2.3}$$

Отметим, что из уравнения замкнутости (2.3) для произвольного элемента $f \in H_{2,\gamma}(D)$ по системе $\{K_j(z)\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ имеет место более сильное утверждение, а именно, *ряд* $\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}a_j(f)K_j(z)$ *сходится равномерно к* f *на каждом компактном множестве* $G\subset D$ (см., например, [28; гл. III, § 2, п. 5], [23; гл. I, § 4, п. B]).

2.3. Различные аспекты средних квадратичных приближений алгебраическими полиномами комплексного переменного рассматривались Севеллом, Келдышем, Мергеляном, Гончаровым, Смирновым, Лебедевым, Суетиным, Гайером, Осипенко и другими (см., например, [16], [17], [23], [25], [27]–[30]). Продолжая указанную тематику, обозначим через $E_n(f; H_{2,\gamma}(D))$, $n \in \mathbb{N}$, величину наилучшего приближения функции $f \in H_{2,\gamma}(D)$ полиномами степени не выше $n-1$ в метрике пространства $H_{2,\gamma}(D)$. На основании общих теорем об аппроксимации в гильбертовом пространстве (см., например, [25; гл. 2, § 2], [28; гл. III]) имеем

$$E_n(f;H_{2,\gamma}(D))=\|f-S_{n-1}(f)\|_{2,\gamma}=\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}\,(j\geqslant n)}|a_j(f)|^2\right\}^{1/2}. \tag{2.4}$$

Для произвольного множества $\mathfrak{N}\subset H_{2,\gamma}(D)$ полагаем

$$E_n(\mathfrak{N}):=\sup\{E_n(f;H_{2,\gamma}(D)) : f\in\mathfrak{N}\}.$$

2.4. Для получения содержательных результатов, связанных с оценкой сверху величин наилучших полиномиальных приближений $E_n(f; H_{2,\gamma}(D))$ важным моментом является удачный выбор характеристики гладкости функции в пространстве $H_{2,\gamma}(D)$. В нашем случае воспользуемся характеристикой гладкости, введенной Абиловым, Абиловой и Керимовым в работе [16].

Пусть

$$\mathscr{L}(\xi, \eta; h) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} K_j(\xi)\overline{K_j(\eta)}h^j, \tag{2.5}$$

где $h \in (0,1)$, $(\xi, \eta) \in D \times D \subset \mathbb{C}^2$. При этом равенство (2.5) следует понимать в смысле сходимости в среднем в пространстве $H_{2;\gamma,\gamma}(D \times D)$, которое состоит из аналитических в $D \times D$ функций $f(z_1, z_2)$, где $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2$, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{2;\gamma,\gamma} := \|f\|_{H_{2;\gamma,\gamma}(D\times D)} = \left\{ \iint_{D\times D} \gamma(z_1)\gamma(z_2)|f(z_1,z_2)|^2 \, d\sigma_1 \, d\sigma_2 \right\}^{1/2}.$$

Здесь $d\sigma_j = dx_j \, dy_j$, $j = 1, 2$, есть элемент площади в комплексной плоскости переменного $z_j = x_j + iy_j$.

Согласно [16] в качестве оператора обобщенного сдвига рассмотрим оператор

$$F_h(f, z) := \iint_D \gamma(\zeta) f(\zeta) \mathscr{L}(z, \zeta; 1-h) \, dx \, dy, \qquad \zeta = x + iy, \tag{2.6}$$

где $z \in \mathbb{C}$. Перечислим некоторые свойства оператора (2.6): для любых $f_1, f_2 \in H_{2,\gamma}(D)$ имеем

$$F_h(f_1 + f_2, z) = F_h(f_1, z) + F_h(f_2, z),$$
$$F_h(\lambda f, z) = \lambda F_h(f, z), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad \|F_h(f)\|_{2,\gamma} \leqslant \|f\|_{2,\gamma},$$
$$F_h(K_j, z) = (1-h)^j K_j(z), \quad j \in \mathbb{N},$$
$$\|F_h(f) - f\|_{2,\gamma} \to 0, \quad h \to 0+, \qquad \|F_h(f) - f\|_{2,\gamma} \to \|f\|_{2,\gamma}, \quad h \to 1-.$$

Для произвольной функции $f \in H_{2,\gamma}(D)$ запишем обобщенные конечные разности первого и высших порядков

$$\Delta_h^1(f, z) := F_h(f, z) - f(z), \tag{2.7}$$

$$\Delta_h^k(f, z) := \Delta_h^1(\Delta_h^{k-1}(f), z) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} F_{h,j}(f, z), \qquad k = 2, 3, \ldots, \tag{2.8}$$

где $F_{h,0}(f, z) \equiv f(z)$, $F_{h,j}(f, z) := F_h(F_{h,j-1}(f), z)$ для $j \in \mathbb{N}$.

Как и в [16], величину

$$\Omega_k(f, t) := \sup\{\|\Delta_h^k(f)\|_{2,\gamma} : 0 < h \leqslant t\}, \qquad 0 < t < 1, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.9}$$

будем называть *обобщенным модулем непрерывности k-го порядка* функции $f \in H_{2,\gamma}(D)$. Используя перечисленные выше свойства оператора обобщенного сдвига F_h и соотношение (2.9), запишем следующие свойства рассматриваемой характеристики гладкости:

$$\Omega_k(f, t) \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to 0+;$$

$\Omega_k(f,t)$ является неубывающей функцией от t; если $f_1, f_2 \in H_{2,\gamma}(D)$, то

$$\Omega_k(f_1+f_2,t) \leqslant \Omega_k(f_1,t)+\Omega_k(f_2,t);$$

также $\Omega_k(f,t) \leqslant 2^k\|f\|_{2,\gamma}$.

3. Оценки значений n-поперечников некоторых классов аналитических функций в пространстве $H_{2,\gamma}(D)$

3.1. Напомним определения n-поперечников, которые будем рассматривать далее. Пусть $\mathbb{B}$ – единичный шар в пространстве $H_{2,\gamma}(D)$, $L_n \subset H_{2,\gamma}(D)$ – n-мерное подпространство, $L^n \subset H_{2,\gamma}(D)$ – подпространство коразмерности n; пусть $\Lambda\colon H_{2,\gamma}(D) \to L_n$ есть непрерывный линейный оператор, $\Lambda^\perp\colon H_{2,\gamma}(D) \to L_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования, $\{\sigma_j\}_{j=0}^{n-1}$ есть ортонормированная система функций в пространстве $H_{2,\gamma}(D)$, $\mathfrak{N}$ – выпуклое центрально-симметричное множество из $H_{2,\gamma}(D)$. Тогда величины

$$\begin{aligned}
&b_n(\mathfrak{N};H_{2,\gamma}(D)) = \sup\{\sup\{\varepsilon>0:\varepsilon\mathbb{B}\cap L_{n+1}\subset\mathfrak{N}\}:L_{n+1}\subset H_{2,\gamma}(D)\},\\
&d_n(\mathfrak{N};H_{2,\gamma}(D)) = \inf\bigl\{\sup\{\inf\{\|f-\varphi\|_{2,\gamma}:\varphi\in L_n\}:f\in\mathfrak{N}\}:L_n\subset H_{2,\gamma}(D)\bigr\},\\
&\delta_n(\mathfrak{N};H_{2,\gamma}(D))\\
&\qquad= \inf\bigl\{\inf\{\sup\{\|f-\Lambda(f)\|_{2,\gamma}:f\in\mathfrak{N}\}:\Lambda H_{2,\gamma}(D)\subset L_n\}:L_n\subset H_{2,\gamma}(D)\bigr\},\\
&d^n(\mathfrak{N};H_{2,\gamma}(D)) = \inf\{\inf\{\|f\|_{2,\gamma}:f\in\mathfrak{N}\cap L^n\}:L^n\subset H_{2,\gamma}(D)\},\\
&\Pi_n(\mathfrak{N};H_{2,\gamma}(D))\\
&\qquad= \inf\bigl\{\inf\{\sup\{\|f-\Lambda^\perp(f)\|_{2,\gamma}:f\in\mathfrak{N}\}:\Lambda^\perp H_{2,\gamma}(D)\subset L_n\}:L_n\subset H_{2,\gamma}(D)\bigr\},\\
&\varphi_n(\mathfrak{N};H_{2,\gamma}(D)) = \inf\biggl\{\sup\biggl\{\biggl\|f-\sum_{j=0}^{n-1}(f,\sigma_j)\sigma_j\biggr\|_{2,\gamma}:f\in\mathfrak{N}\biggr\}:\{\sigma\}_{j=0}^{n-1}\subset H_{2,\gamma}(D)\biggr\}
\end{aligned}$$

называются соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *линейным*, *гельфандовским*, *проекционным n-поперечниками* множества $\mathfrak{N}$ в пространстве $H_{2,\gamma}(D)$, а величина φ_n – *ортопоперечник* (или *Фурье-поперечник*) множества $\mathfrak{N}\subset H_{2,\gamma}(D)$ в $H_{2,\gamma}(D)$.

Поскольку $H_{2,\gamma}(D)$ с введенным в нем указанным ранее способом скалярным произведением является гильбертовым пространством, то между перечисленными n-поперечниками выполняются следующие соотношения (см. [31; гл. 4, § 4.4, п. 4.4.1], а относительно n-поперечника φ_n см. [32; p. 50]):

$$\begin{aligned}
b_n(\mathfrak{N};H_{2,\gamma}(D)) \leqslant d^n(\mathfrak{N};H_{2,\gamma}(D)) \leqslant d_n(\mathfrak{N};H_{2,\gamma}(D)) &= \Pi_n(\mathfrak{N};H_{2,\gamma}(D))\\
= \delta_n(\mathfrak{N};H_{2,\gamma}(D)) = \varphi_n(\mathfrak{N};H_{2,\gamma}(D)) &\leqslant E_n(\mathfrak{N}).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

3.2. Пусть Φ есть непрерывная, возрастающая на отрезке $[0,1]$ функция такая, что $\Phi(0)=0$. Всюду далее ее будем называть *мажорантой*.

Символом $H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi)$, $k\in\mathbb{N}$, обозначим классы, состоящие из функций $f\in H_{2,\gamma}(D)$, которые удовлетворяют неравенству $\Omega_k(f,t)\leqslant\Phi(t)$ для любого значения аргумента $t\in(0,1)$.

Теорема 1. *Пусть D – односвязная ограниченная область, граница которой является жордановой кривой; весовая функция γ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и принимает положительные значения; $n, k \in \mathbb{N}$ и функция Φ является мажорантой. Тогда имеет место следующее соотношение:*

$$\frac{1}{n^k}\inf_{0<t<1}\frac{\Phi(t)}{t^k} \leqslant q_n(H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi);H_{2,\gamma}(D)) \leqslant E_n(H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi)) \leqslant \frac{1}{n^k}\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{\Phi(t)}{t^k}, \tag{3.2}$$

где $q_n(H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi);H_{2,\gamma}(D))$ – любой из рассмотренных ранее n-поперечников.

Доказательство. Как отмечалось выше (см., например, (2.1)), для произвольной функции $f \in H_{2,\gamma}(D)$ в смысле сходимости в метрике пространства $H_{2,\gamma}(D)$ имеет место равенство

$$f(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} a_j(f)K_j(z),$$

где коэффициенты Фурье вычисляются по формуле (2.2). Тогда на основании (2.5), (2.6) и ортонормированности системы полиномов $\{K_j(z)\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ в $H_{2,\gamma}(D)$ в указанном здесь смысле выполняется равенство

$$F_h(f,z) = \iint_D \gamma(\zeta)f(\zeta)\biggl\{\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} K_j(z)\overline{K_j(\zeta)}(1-h)^j\biggr\}\,dx\,dy = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+}(1-h)^j a_j(f)K_j(z). \tag{3.3}$$

Используя метод математической индукции, для обобщенных конечных разностей k-го порядка (2.7), (2.8) получаем

$$\Delta_h^k(f,z) = \sum_{j\in\mathbb{N}}\{(1-h)^j-1\}^k a_j(f)K_j(z), \qquad k\in\mathbb{N}, \tag{3.4}$$

где равенство понимается в смысле сходимости в метрике пространства $H_{2,\gamma}(D)$. В силу полноты ортонормированной системы $\{K_j(z)\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ в $H_{2,\gamma}(D)$ и на основании (2.3) и (3.4) имеем

$$\|\Delta_h^k(f)\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}}\{1-(1-h)^j\}^{2k}|a_j(f)|^2. \tag{3.5}$$

Используя определение обобщенного модуля непрерывности k-го порядка (2.9) и равенство (3.5), запишем

$$\Omega_k^2(f,t) = \sum_{j\in\mathbb{N}}\{1-(1-t)^j\}^{2k}|a_j(f)|^2, \qquad 0<t<1, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Рассмотрим далее соотношение (2.4), исходя из которого заключаем, что для произвольного значения $m \in \mathbb{Z}_+$ существует такое единственное значение $\varepsilon_{m,f} \geqslant 0$, зависящее от $f \in H_{2,\gamma}(D)$ и от m, для которого справедливо равенство

$$E_n^2(f;H_{2,\gamma}(D)) = \sum_{j=n}^{n+m}|a_j(f)|^2 + \varepsilon_{m,f}. \tag{3.7}$$

Если функция f не является полиномом, то $\{\varepsilon_{m,f}\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ будет невозрастающей последовательностью положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$\lim_{m\to\infty}\varepsilon_{m,f}=0. \tag{3.8}$$

В случае, когда f есть полином l-й степени, $l>n$, с отличным от нуля коэффициентом при старшей степени z, то из (3.7) следует, что в невозрастающей последовательности $\{\varepsilon_{m,f}\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ первые $l-n$ элементов будут положительными числами, а все остальные элементы – нулями. В ходе дальнейших исследований мы не будем разделять эти два случая, поскольку ход доказательства для каждого из них один и тот же.

Рассмотрим произвольную монотонно убывающую последовательность чисел $\{u_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ из интервала $(0,1)$, для которой нуль является предельной точкой. Исходя из (3.6), запишем

$$\sum_{j=n}^{n+m}|a_j(f)|^2\leqslant\frac{1}{\{1-(1-u_m)^n\}^{2k}}\sum_{j=n}^{n+m}\{1-(1-u_m)^j\}^{2k}|a_j(f)|^2\leqslant\frac{\Omega_k^2(f,u_m)}{\{1-(1-u_m)^n\}^{2k}}\,. \tag{3.9}$$

Для более компактной формы записи знаменателя в правой части соотношения (3.9) отметим, что имеет место следующее равенство:

$$1-b^n=(1-b)\psi_n(b),\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{3.10}$$

где

$$\psi_n(b):=\begin{cases}1, & \text{если } n=1,\\ 1+b, & \text{если } n=2,\\ 1+b+\dots+b^{n-1}, & \text{если } n=3,4,\dots\,.\end{cases} \tag{3.11}$$

Полагая $b=1-u_m$ и используя (3.10), перепишем соотношение (3.9) в виде

$$\sum_{j=n}^{n+m}|a_j(f)|^2\leqslant\frac{\Omega_k^2(f,u_m)}{u_m^{2k}\psi_n^{2k}(1-u_m)}\,. \tag{3.12}$$

Для произвольной функции $f\in H_{2,\gamma}(D)$ из (3.7) и (3.12) получаем

$$E_n^2(f;H_{2,\gamma}(D))\leqslant\frac{\Omega_k^2(f,u_m)}{u_m^{2k}\psi_n^{2k}(1-u_m)}+\varepsilon_{m,f}. \tag{3.13}$$

Переходя в правой части (3.13) к верхнему пределу при $m\to\infty$ и учитывая (3.8) и вид (3.11), где $b=1-u_m$, для произвольной функции $f\in H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi)$ имеем

$$\begin{aligned}E_n^2(f;H_{2,\gamma}(D))&\leqslant\varlimsup_{m\to\infty}\left\{\frac{1}{\psi_n^{2k}(1-u_m)}\cdot\frac{\Omega_k^2(f,u_m)}{u_m^{2k}}+\varepsilon_{m,f}\right\}\\&\leqslant\left\{\lim_{t\to0+}\frac{1}{\psi_n^{2k}(1-t)}\right\}\left\{\varlimsup_{t\to0+}\frac{\Omega_k^2(f,t)}{t^{2k}}\right\}\leqslant\frac{1}{n^{2k}}\varlimsup_{t\to0+}\frac{\Phi^2(t)}{t^{2k}}\,.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Используя соотношения (3.1) и (3.14), запишем оценку сверху

$$E_n(H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi))\leqslant\frac{1}{n^k}\varlimsup_{t\to0+}\frac{\Phi(t)}{t^k}\,. \tag{3.15}$$

Исходя из (3.1), для получения оценок снизу рассматриваемых экстремальных характеристик оптимизационного содержания класса $H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi)$ достаточно оценить снизу бернштейновский n-поперечник. Для этого в подпространстве полиномов $\mathscr{P}_n$ степени, не превосходящей n, рассмотрим шар $\sigma_{n+1}(\widetilde{\rho}\,)$ радиуса

$$\widetilde{\rho} := \frac{1}{n^k} \inf_{0<t<1} \frac{\Phi(t)}{t^k}\,, \tag{3.16}$$

т.е.

$$\sigma_{n+1}(\widetilde{\rho}\,) := \widetilde{\rho}\,\mathbb{B}\cap\mathscr{P}_n = \{p_n\in\mathscr{P}_n : \|p_n\|_{2,\gamma}\leqslant\widetilde{\rho}\,\}, \qquad \dim\mathscr{P}_n = n+1.$$

Покажем, что этот шар принадлежит классу $H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi)$. Для произвольного полинома $p_n\in\sigma_{n+1}(\widetilde{\rho}\,)$ и любого значения $v\in(0,1)$ на основании (2.3), (3.6), (3.10) и (3.11), где $b=1-v$, а также (3.16) получаем

$$\begin{aligned}\Omega_k(p_n,v) &= \biggl\{\sum_{j=1}^{n}(1-(1-v)^j)^{2k}|a_j(p_n)|^2\biggr\}^{1/2} \leqslant \{1-(1-v)^n\}^k\biggl\{\sum_{j=1}^{n}|a_j(p_n)|^2\biggr\}^{1/2}\\ &\leqslant v^k\psi_n^k(1-v)\|p_n\|_{2,\gamma}\leqslant v^k n^k\widetilde{\rho} = v^k \inf_{0<t<1}\frac{\Phi(t)}{t^k}\,.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Полагая в правой части соотношения (3.17) $t=v$, имеем

$$\Omega_k(p_n,v)\leqslant\Phi(v),$$

где $0<v<1$ – произвольное значение. Следовательно, $\sigma_{n+1}(\widetilde{\rho}\,)\subset H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi)$.

Используя определение бернштейновского n-поперечника и (3.16), получаем оценку снизу

$$b_n(H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi);H_{2,\gamma}(D)) \geqslant b_n(\sigma_{n+1}(\widetilde{\rho}\,);H_{2,\gamma}(D)) \geqslant \frac{1}{n^k}\inf_{0<t<1}\frac{\Phi(t)}{t^k}\,. \tag{3.18}$$

Требуемое соотношение (3.2) вытекает из формул (3.1), (3.15) и (3.18). Теорема 1 доказана.

Из данной теоремы получаем важное следствие.

Следствие 1. *Пусть при выполнении всех условий теоремы 1 мажоранта Φ удовлетворяет ограничению*

$$\inf_{0<t<1}\frac{\Phi(t)}{t^k} = \varlimsup_{t\to0+}\frac{\Phi(t)}{t^k}\,. \tag{3.19}$$

Тогда для произвольного $n\in\mathbb{N}$ справедливы равенства

$$q_n(H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi);H_{2,\gamma}(D)) = E_n(H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi)) = \frac{1}{n^k}\inf_{0<t<1}\frac{\Phi(t)}{t^k}\,, \tag{3.20}$$

где $q_n(H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi);H_{2,\gamma}(D))$ – любой из перечисленных ранее n-поперечников.

3.3. Полученный в следствии 1 результат (3.20) имеет достаточно общий характер и представляет по нашему мнению определенный интерес, поскольку в пространстве $H_{2,\gamma}(D)$ найдены точные значения различных n-поперечников классов аналитических в области D функций, определенных при помощи обобщенных характеристик гладкости Ω_k, $k \in \mathbb{N}$, и мажорант Φ, удовлетворяющих не слишком “жесткому” ограничению (3.19). При этом на область D кроме ограниченности, односвязности и жордановости ее границы никаких условий не налагается.

В виде замечания отметим, что полученные в работе [16] результаты определенным образом можно перефразировать и для пространств $H_{2,\gamma}(D)$. Тогда в рамках принятых нами обозначений теорему 3 из [16] следует сформулировать для классов

$$H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi,t) := \{f \in H_{2,\gamma}(D) : \Omega_k(f,t) \leqslant \Phi(t)\},$$

где $k \in \mathbb{N}$, а $t \in (0,1)$ есть произвольно выбранное и зафиксированное числовое значение (при этом ход доказательства теоремы практически не меняется). То, что именно такие классы нужно рассматривать, следует из выбора в [16] радиуса

$$\rho = \frac{\Phi(t)}{(1-(1-t)^n)^k} \tag{3.21}$$

шара в $(n+1)$-мерном подпространстве полиномов при оценке снизу колмогоровского n-поперечника. Учитывая сказанное, имеем

$$d_n(H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi,t);H_{2,\gamma}(D)) = \frac{\Phi(t)}{\{1-(1-t)^n\}^k}\,.$$

Поскольку $H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi) \subset H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi,t)$, где $k \in \mathbb{N}$, $t \in (0,1)$, то, естественно, что получение оценки снизу величины $d_n(H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi,t);H_{2,\gamma}(D))$ при помощи установленной Тихомировым теоремы о поперечнике шара (см., например, [1], [31]), которая эквивалентна неравенству $b_n \leqslant d_n$, не требует ввиду (3.21) никаких ограничений на мажоранту Φ, в отличие от рассматриваемых нами в следствии 1 классов $H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi)$, $k \in \mathbb{N}$.

4. Оценки верхних граней коэффициентов Фурье на классах аналитических функций $H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi)$, $k \in \mathbb{N}$

Вопросы вычисления верхних граней коэффициентов Фурье на различных классах функций действительного переменного рассматривались, например, в работах А. В. Ефимова, А. Ф. Тимана, Н. П. Корнейчука, В. И. Бердышева, С. Милорадовича, С. А. Теляковского и других. Проблема нахождения верхних граней модулей коэффициентов Тейлора на классах аналитических в единичном круге функций исследовалась, например, в работах [5], [15]. С нашей точки зрения указанная тематика представляет определенный интерес и для модулей коэффициентов Фурье в рассматриваемом здесь случае.

Теорема 2. *Пусть $n,k \in \mathbb{N}$ и выполнены все условия теоремы 1. Тогда имеет место следующее соотношение*:

$$\frac{1}{n^k}\inf_{0<t<1}\frac{\Phi(t)}{t^k} \leqslant \sup_{f\in H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi)}|a_n(f)| \leqslant \frac{1}{n^k}\varlimsup_{t\to 0+}\frac{\Phi(t)}{t^k}\,. \tag{4.1}$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in H_{2,\gamma}(D)$ на основании (2.4) имеем

$$|a_n(f)| \leqslant E_n(f; H_{2,\gamma}(D)).$$

Используя данное неравенство и правую часть соотношения (3.2), получаем оценку сверху

$$\sup_{f \in H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi)} |a_n(f)| \leqslant E_n(H_{2,\gamma}(D,\Omega_k,\Phi)) \leqslant \frac{1}{n^k} \varlimsup_{t\to 0+} \frac{\Phi(t)}{t^k}. \tag{4.2}$$

Для нахождения оценки снизу рассмотрим функцию $\widetilde{f}(z) := \widetilde{\rho} K_n(z)$, где величина $\widetilde{\rho}$ определяется формулой (3.16). Поскольку, в силу ортонормированности системы полиномов $\{K_j(z)\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ в $H_{2,\gamma}(D)$ имеем $\|\widetilde{f}\|_{2,\gamma} = \widetilde{\rho}\|K_n\|_{2,\gamma} = \widetilde{\rho}$, то очевидно, что $\widetilde{f}$ является элементом шара $\sigma_{n+1}(\widetilde{\rho})$, рассмотренного в ходе доказательства теоремы 1. Учитывая, что $\sigma_{n+1}(\widetilde{\rho}) \subset H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi)$, запишем

$$\sup_{f \in H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi)} |a_n(f)| \geqslant \sup_{f\in\sigma_{n+1}(\widetilde{\rho})} |a_n(f)| \geqslant |a_n(\widetilde{f})| = \frac{1}{n^k} \inf_{0<t<1} \frac{\Phi(t)}{t^k}. \tag{4.3}$$

Требуемое соотношение (4.1) получаем на основании формул (4.2) и (4.3), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Следствие 2. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, выполнены все условия теоремы 1 и мажоранта Φ удовлетворяет ограничению (3.19). Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi)} |a_n(f)| = \frac{1}{n^k} \inf_{0<t<1} \frac{\Phi(t)}{t^k}. \tag{4.4}$$

5. Оценки n-поперечников и верхних граней модулей коэффициентов Фурье на классах аналитических в единичном круге функций, определенных при помощи обобщенных модулей непрерывности и композиций Адамара

В данном разделе полагаем, что область D является единичным кругом в $\mathbb{C}$, т.е. $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, а весовая функция γ неотрицательна, измерима, суммируема по площади D и почти всюду отлична от нуля.

5.1. В простейшем случае, когда весовая функция $\gamma(z) \equiv 1$, система многочленов

$$\left\{ K_j(z) = \sqrt{\frac{j+1}{\pi}}\, z^j \right\}_{j\in\mathbb{Z}_+} \tag{5.1}$$

является ортонормированной в пространстве $H_{2,\gamma}(D)$ (см., например, [28; гл. III, § 1, п. 4], [30; гл. V, п. 63]). В данном случае можно указать явное выражение для функции $\mathscr{L}(\xi,\eta;h)$, заданной формулой (2.5). Действительно, учитывая, что

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} (j+1) z^j = \frac{1}{(1-z)^2}, \qquad |z| < 1,$$

из (2.5) получаем

$$\mathscr{L}(\xi,\eta;h)=\frac{1}{\pi}\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}(j+1)(\xi\overline{\eta}h)^2=\frac{1}{\pi(1-\xi\overline{\eta}h)^2}\,,\qquad |\xi\overline{\eta}h|<1.$$

Всюду далее в данном пункте будем рассматривать многочлены, ортогональные по площади единичного круга D с радиально-симметричным весом (см., например, [25; гл. IV, § 2]). Пусть весовая функция γ постоянна на каждой окружности $|z|=\rho<1$, т.е. имеет вид $\gamma(z)=\gamma(\rho)$. Тогда система полиномов

$$\left\{K_j(z)=\frac{1}{\sqrt{\Gamma_{jj}}}\,z^j\right\}_{j\in\mathbb{Z}_+},\tag{5.2}$$

где

$$\Gamma_{jj}:=2\pi\int_0^1\gamma(\rho)\rho^{2j+1}\,d\rho,\tag{5.3}$$

является ортонормированной в пространстве $H_{2,\gamma}(D)$. При этом величины Γ_{jj} для любой суммируемой функции γ стремятся к нулю при $j\to\infty$. Согласно теореме 1 из [28; гл. III, § 2, п. 5] для указанной ранее весовой функции γ система (5.2) является замкнутой в пространстве $H_{2,\gamma}(D)$. Исходя из теоремы A, заключаем, что она также будет полной в $H_{2,\gamma}(D)$.

В случае, когда $\gamma(z)\equiv 1$, из (5.2)–(5.3) получаем полную ортонормированную по площади единичного круга D систему полиномов (5.1).

Если, в частности, $\gamma(\rho)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha\in(0,1)$ и такая, что $\gamma(1)=1$, то имеет место асимптотическое представление

$$\left\{K_j(z)=\sqrt{\frac{j+1}{\pi}}\left(1+O\left(\frac{1}{j^\alpha}\right)\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}_+}.$$

Для весовой функции $\gamma(z)=1-|z|^{2m}$, $m\in\mathbb{N}$, $|z|<1$, имеем согласно (5.3) и (5.2)

$$\Gamma_{jj}=2\pi\int_0^1(1-\rho^{2m})\rho^{2j+1}\,d\rho=\frac{\pi m}{(j+1)(j+m+1)}\,,\qquad j\in\mathbb{Z}_+,$$

и

$$\left\{K_j(z)=\sqrt{\frac{(j+1)(j+m+1)}{\pi m}}\,z^j\right\}_{j\in\mathbb{Z}_+}.$$

5.2. Пусть $m\in\mathbb{Z}_+$ и функция

$$\mathscr{B}_m(z)=\sum_{j\in\mathbb{Z}_+(j\geqslant m)}\beta_jz^j,\tag{5.4}$$

где $\beta_j\neq 0$ для всех $j=m,m+1,\dots$, является аналитической в единичном круге D и такой, что

$$\lim_{j\to\infty}|\beta_j|^{1/j}=1.\tag{5.5}$$

Каждой аналитической в D функции

$$f(z)=\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}c_j(f)z^j,\tag{5.6}$$

где $c_j(f) = f^{(j)}(0)/j!$, $j \in \mathbb{Z}_+$, есть ее коэффициенты Тейлора ($f^{(0)}(0) = f(0)$), поставим в соответствие функцию

$$\mathscr{D}(\mathscr{B}_m, f; z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+(j\geqslant m)} \beta_j c_j(f) z^j, \tag{5.7}$$

которую называют *композицией* (или *произведением*) *Адамара функций* (5.4) и (5.6) (см., например, [19; гл. IV, § 22, п. 3], [20]). Отметим, что композиция Адамара (5.7) представляет собой широкое обобщение понятия интегродифференцирования. В частности, если

$$\lim_{j\to\infty} \beta_j = \infty, \tag{5.8}$$

то имеем обобщение операции дифференцирования. В силу (5.5) радиусы сходимости степенных рядов (5.6) и (5.7) совпадают.

Приведем далее несколько примеров композиций Адамара. Пусть в формуле (5.4) имеем $m = 0$; $\{\widetilde{\beta}_j = \Gamma(1+\alpha+j)/\Gamma(1+j)\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, где $\Gamma(z)$, $\operatorname{Re} z > 0$, есть гамма-функция; $\alpha > 0$. Тогда, используя (5.7), получаем дробную производную Римана–Лиувилля порядка α функции $z^\alpha f(z)$ [19; гл. IV, § 22, п. 3], т.е.

$$\mathscr{D}(\widetilde{B}_0^\alpha, f; z) = \mathscr{D}_0^{(\alpha)}(z^\alpha f(z)) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \frac{\Gamma(1+\alpha+j)}{\Gamma(1+j)} c_j(f) z^j. \tag{5.9}$$

Полагая, в частности, в (5.9) $\alpha = r$, где $r \in \mathbb{N}$, и вводя обозначение $\lambda_{j,r} := (j+r)!/j!$, $j \in \mathbb{Z}_+$, имеем

$$\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{B}_0^r}, f; z) = \frac{d^r(z^r f(z))}{dz^r} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \lambda_{j,r} c_j(f) z^j, \qquad |z| < 1.$$

Пусть в (5.4) $m = 1$ и $\{\widehat{\beta}_j = (ij)^\alpha\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\alpha > 0$. Тогда композиция Адамара (5.7) представляет собой производную Вейля порядка α аналитической функции $f(z) = f(\rho\exp(it))$ по аргументу t комплексного числа z [19; гл. IV, § 19, п. 1], т.е.

$$\mathscr{D}(\widehat{\mathscr{B}_1^\alpha}, f; z) = \mathscr{D}_+^{(\alpha)}(f(z)) = \sum_{j\in\mathbb{N}} (ij)^\alpha c_j(f) z^j. \tag{5.10}$$

Если в (5.10) имеем $\alpha = r$, где $r \in \mathbb{N}$, то

$$\mathscr{D}(\widehat{\mathscr{B}_1^r}, f; z) = \frac{\partial^r f(\rho\exp(it))}{\partial t^r} = \sum_{j\in\mathbb{N}} (ij)^r c_j(f) z^j. \tag{5.11}$$

Отметим, что в ряде работ (см., например, [6], [7], [13]) при определении классов аналитических в единичном круге функций использовались их производные r-го порядка по аргументу t комплексного переменного z вида (5.11).

5.3. Символом $H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m))$, $m \in \mathbb{Z}_+$, обозначим классы, состоящие из функций $f \in H_{2,\gamma}(D)$, для которых их композиции Адамара (5.7) принадлежат пространству $H_{2,\gamma}(D)$. При этом аналитическая в D функция (5.4) удовлетворяет условиям (5.5) и (5.8).

Через $H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m); \Omega_k, \Phi)$, $k \in \mathbb{N}$, обозначим классы функций f из пространства $H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m))$, для которых их композиции Адамара (5.7) удовлетворяют условию $\Omega_k(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m, f); t) \leqslant \Phi(t)$ при любых значениях $t \in (0,1)$.

Теорема 3. *Пусть D – единичный круг; определенная в D неотрицательная, измеримая весовая функция $\gamma(z)=\gamma(\rho)$, $|z|=\rho<1$, суммируема по площади D и почти всюду отлична от нуля; $m\in\mathbb{Z}_+$; $k\in\mathbb{N}$; числовая последовательность из модулей коэффициентов Тейлора функции $\mathscr{B}_m$ (5.4) является возрастающей. Тогда для любого натурального числа $n\geqslant m$ выполняется следующее соотношение:*

$$\frac{1}{|\beta_n|n^k}\inf_{0<t<1}\frac{\Phi(t)}{t^k}\leqslant q_n(H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m);\Omega_k,\Phi);H_{2,\gamma}(D))$$
$$\leqslant E_n(H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m);\Omega_k,\Phi))\leqslant\frac{1}{|\beta_n|n^k}\varlimsup_{t\to0+}\frac{\Phi(t)}{t^k},\tag{5.12}$$

где $q_n(H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m);\Omega_k,\Phi);H_{2,\gamma}(D))$ есть любой из рассмотренных ранее n-поперечников.

Доказательство. Пусть f – произвольная функция из класса $H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m))$. Используя ее разложение в ряд Тейлора (5.6) и формулу (5.2), запишем

$$f(z)=\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sqrt{\Gamma_{jj}}c_j(f)K_j(z),\qquad |z|<1.\tag{5.13}$$

По сути, (5.13) является разложением функции f в ряд Фурье по полной ортонормированной по площади единичного круга D с весом γ системе многочленов $\{K_j(z)\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$. Поскольку такое разложение единственно, то для коэффициентов Фурье $a_j(f)$, $j\in\mathbb{Z}_+$, функции f из (5.13) получаем

$$a_j(f)=\sqrt{\Gamma_{jj}}c_j(f).\tag{5.14}$$

Исходя из (5.7) и (5.2), имеем

$$\mathscr{D}(\mathscr{B}_m,f;z)=\sum_{j\in\mathbb{Z}_+(j\geqslant m)}\beta_j\sqrt{\Gamma_{jj}}c_j(f)K_j(z),\qquad |z|<1.$$

Поскольку в данном случае $a_j(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m,f))=\beta_j\sqrt{\Gamma_{jj}}c_j(f)$, где $j=m,m+1,\dots$, то с учетом (5.14) запишем

$$a_j(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m,f))=\beta_j a_j(f),\qquad j=m,m+1,\dots.\tag{5.15}$$

Используя (2.4) и (5.15), для произвольной функции $f\in H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m))$ при $n\geqslant m$ имеем

$$E_n^2(f;H_{2,\gamma}(\mathscr{D}))=\sum_{j\in\mathbb{Z}_+(j\geqslant n)}|a_j(f)|^2=\sum_{j\in\mathbb{Z}_+(j\geqslant n)}\frac{|a_j(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m,f))|^2}{|\beta_j|^2}.$$

Учитывая, что $\{|\beta_j|\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\,j\geqslant m}$ есть возрастающая последовательность, из данного соотношения и (2.4) получаем

$$E_n(f;H_{2,\gamma}(D))\leqslant\frac{1}{|\beta_n|}E_n(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m,f);H_{2,\gamma}(D)),\qquad n\geqslant m.\tag{5.16}$$

Проводя, далее, для $E_n^2(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m,f);H_{2,\gamma}(D))$ такие же рассуждения, как и для $E_n^2(f;H_{2,\gamma}(D))$ при доказательстве теоремы 1, и используя формулы (3.6), (3.10), (3.11), (5.16), а также применяя определение класса $H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m);\Omega_k,\Phi)$, запишем оценку сверху

$$E_n(H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m);\Omega_k,\Phi)) \leqslant \frac{1}{|\beta_n|n^k}\varlimsup_{t\to 0+}\frac{\Phi(t)}{t^k}, \qquad n\geqslant m. \tag{5.17}$$

Для получение оценки снизу рассмотрим в подпространстве $\mathscr{P}_n$ следующий шар:

$$\sigma_{n+1}(\rho_*) := \rho_*\mathbb{B}\cap\mathscr{P}_n = \{p_n\in\mathscr{P}_n : \|p_n\|_{2,\gamma}\leqslant\rho_*\},$$

где

$$\rho_* := \frac{1}{|\beta_n|n^k}\inf_{0<t<1}\frac{\Phi(t)}{t^k}. \tag{5.18}$$

Используя (3.6), (3.10)–(3.11), (5.15) и (5.18), для произвольного значения $v\in(0,1)$ и любого полинома $p_n\in\sigma_{n+1}(\rho_*)$ при $n\geqslant m$ запишем

$$\begin{aligned}\Omega_k(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m,p_n);v) &= \biggl\{\sum_{j=m}^{n}(1-(1-v)^j)^{2k}|\beta_j|^2|a_j(p_n)|^2\biggr\}^{1/2}\\ &\leqslant \{1-(1-v)^n\}^k|\beta_n|\cdot\|p_n\|_{2,\gamma} = |\beta_n|v^k\psi_n^k(1-v)\|p_n\|_{2,\gamma}\\ &\leqslant |\beta_n|n^kv^k\rho_* = v^k\inf_{0<t<1}\frac{\Phi(t)}{t^k}.\end{aligned} \tag{5.19}$$

Полагая в правой части соотношения (5.19) $t=v$, получаем неравенство

$$\Omega_k(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m,p_n);v)\leqslant\Phi(v),$$

справедливое для любого $0<v<1$. Следовательно, $\sigma_{n+1}(\rho_*)\subset H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m);\Omega_k,\Phi)$. Тогда на основании определения бернштейновского n-поперечника запишем оценку снизу

$$\begin{aligned}&b_n(H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m);\Omega_k,\Phi);H_{2,\gamma}(D))\\ &\qquad\geqslant b_n(\sigma_{n+1}(\rho_*);H_{2,\gamma}(D))\geqslant\frac{1}{|\beta_n|n^k}\inf_{0<t<1}\frac{\Phi(t)}{t^k}.\end{aligned} \tag{5.20}$$

Требуемый результат (5.12) получаем из формул (3.1), (5.17) и (5.20). Теорема 3 доказана.

Следствие 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 3 и имеет место ограничение (3.19). Тогда для любого натурального числа $n\geqslant m$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned}&q_n(H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m);\Omega_k,\Phi);H_{2,\gamma}(D))\\ &\qquad= E_n(H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m);\Omega_k,\Phi)) = \frac{1}{|\beta_n|n^k}\inf_{0<t<1}\frac{\Phi(t)}{t^k}.\end{aligned} \tag{5.21}$$

5.4. Как уже отмечалось, определенный интерес вызывают исследования, связанные с оценкой значений модулей коэффициентов Фурье на различных классах аналитических функций. Следующее утверждение продолжает эту тематику.

Теорема 4. *Пусть $k \in \mathbb{N}$; $m \in \mathbb{Z}_+$ и имеют место условия теоремы 3. Тогда для произвольного натурального числа $n \geqslant m$ справедливо следующее соотношение*:

$$\frac{1}{|\beta_n| n^k} \inf_{0<t<1} \frac{\Phi(t)}{t^k} \leqslant \sup_{f \in H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m);\Omega_k,\Phi)} |a_n(f)| \leqslant \frac{1}{|\beta_n| n^k} \varlimsup_{t\to 0+} \frac{\Phi(t)}{t^k}.$$

Доказательство данной теоремы не приводится, поскольку оно, в общих чертах, аналогично доказательству теоремы 2 с той лишь разницей, что в ходе его реализации необходим ряд сведений, использованных при получении теоремы 3.

Следствие 4. *Пусть выполнены все условия теоремы 4 и мажоранта Φ удовлетворяет ограничению (3.19). Тогда для любого $n \geqslant m$, $n \in \mathbb{N}$, имеет место равенство*

$$\sup_{f \in H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\mathscr{B}_m);\Omega_k,\Phi)} |a_n(f)| = \frac{1}{|\beta_n| n^k} \varlimsup_{t\to 0+} \frac{\Phi(t)}{t^k}. \tag{5.22}$$

6. Примеры конкретизации некоторых точных результатов

Обозначим через $C_0([0,1])$ класс непрерывных на отрезке $[0,1]$ вещественных функций μ, каждая из которых является неубывающей и такой, что $\mu(0) > 0$. Для произвольного класса аналитических функций $\mathfrak{N} \subset H_{2,\gamma}(D)$ под $q_n(\mathfrak{N}; H_{2,\gamma}(D))$ понимаем любой из перечисленных в п. 3.1 n-поперечников.

6.1. Рассмотрим семейство мажорант

$$\Phi_{0,k}(\mu,t) := t^k \mu(t), \qquad k \in \mathbb{N}, \quad \mu \in C_0([0,1]).$$

Если $\mu_*(t) \equiv 1$, то полагаем $\Phi_{0,k}(t) := \Phi_{0,k}(\mu_*,t)$. Очевидно, что для каждой из указанных мажорант ограничение (3.19) выполнено, поскольку

$$\inf_{0<t<1} \frac{\Phi_{0,k}(\mu,t)}{t^k} = \varlimsup_{t\to 0+} \frac{\Phi_{0,k}(\mu,t)}{t^k} = \mu(0). \tag{6.1}$$

Тогда, исходя из (3.20), (4.4) и (6.1), имеем

$$\begin{aligned} q_n(H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi_{0,k}(\mu)); H_{2,\gamma}(D)) &= E_n(H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi_{0,k}(\mu))) \\ &= \sup\{|a_n(f)| : f \in H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi_{0,k}(\mu))\} = \frac{\mu(0)}{n^k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Пусть теперь D – единичный круг и для аналитических в D функций рассматриваются производные Римана–Лиувилля (5.9) порядка $\alpha > 0$. Тогда из (5.21), (5.22) и (6.1) для любого $n \in \mathbb{N}$ получаем

$$\begin{aligned} q_n(H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{B}_0^\alpha});\Omega_k,\Phi_{0,k}(\mu)); H_{2,\gamma}(D)) &= E_n(H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{B}_0^\alpha});\Omega_k,\Phi_{0,k}(\mu))) \\ &= \sup\{|a_n(f)| : f \in H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{B}_0^\alpha});\Omega_k,\Phi_{0,k}(\mu))\} = \frac{\Gamma(1+n)\mu(0)}{\Gamma(1+\alpha+n) n^k}. \end{aligned}$$

6.2. Рассмотрим следующее семейство мажорант:

$$\Phi_{1,k}(\mu,t) := (\sigma^{\beta t}-1)^k\mu(t),$$

где $k\in\mathbb{N}$, $\sigma\in(1,\infty)$ и $\beta\in(0,\infty)$ суть произвольные константы, $\mu\in C_0([0,1])$. Полагаем $\Phi_{1,k}(t):=\Phi_{1,k}(\mu_*,t)$. Поскольку ограничение (3.19) для мажорант $\Phi_{1,k}(\mu)$ также выполняется, т.е.

$$\inf_{0<t<1}\frac{\Phi_{1,k}(\mu,t)}{t^k}=\overline{\lim_{t\to0+}}\frac{\Phi_{1,k}(\mu,t)}{t^k}=(\beta\ln\sigma)^k\mu(0), \tag{6.2}$$

то из (3.20), (4.4) и (6.2) следуют равенства

$$\begin{aligned} &q_n(H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi_{1,k}(\mu));H_{2,\gamma}(D))=E_n(H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi_{1,k}(\mu)))\\ &\quad=\sup\{|a_n(f)|: f\in H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi_{1,k}(\mu))\}=\left(\frac{\beta\ln\sigma}{n}\right)^k\mu(0),\qquad n\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Если же D – единичный круг и для аналитических в D функций рассматриваются производные Вейля (5.10) порядка $\alpha>0$, то на основании (5.21), (5.22) и (6.2) запишем

$$\begin{aligned} &q_n(H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\widehat{\mathscr{B}_1^\alpha});\Omega_k,\Phi_{1,k}(\mu));H_{2,\gamma}(D))=E_n(H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\widehat{\mathscr{B}_1^\alpha});\Omega_k,\Phi_{1,k}(\mu)))\\ &\quad=\sup\{|a_n(f)|: f\in H_{2,\gamma}(\mathscr{D}(\widehat{\mathscr{B}_1^\alpha});\Omega_k,\Phi_{1,k}(\mu))\}=\frac{(\beta\ln\sigma)^k}{n^{k+\alpha}}\mu(0),\qquad n\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

6.3. В завершение рассмотрим еще одно семейство мажорант

$$\Phi_{2,k}(\mu,t):=((1+t)^k-1)^k\mu(t),\qquad k\in\mathbb{N},\quad \mu\in C_0([0,1]).$$

Так же полагаем $\Phi_{2,k}(t):=\Phi_{2,k}(\mu_*,t)$. Учитывая, что

$$\inf_{0<t<1}\frac{\Phi_{2,k}(\mu,t)}{t^k}=\overline{\lim_{t\to0+}}\frac{\Phi_{2,k}(\mu,t)}{t^k}=k^k\mu(0), \tag{6.3}$$

на основании (3.20), (4.4) и (6.3) можно записать точные значения для рассматриваемых в этой статье экстремальных характеристик классов $H_{2,\gamma}(D;\Omega_k,\Phi_{2,k}(\mu))$. Если воспользоваться формулами (5.21), (5.22) и (6.3), то аналогичного рода окончательные результаты несложно получить и для классов аналитических в единичном круге функций, когда в их формировании принимают участие композиции Адамара.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. М. Тихомиров, “Теория приближений”, *Анализ – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **14**, ВИНИТИ, М., 1987, 103–260.

[2] A. Pinkus, *n-Widths in Approximation Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[3] S. D. Fisher, *Function Theory on Planar Domains. A Second Course in Complex Analyses*, John Wiley & Sons, New York, 2007.

[4] Ю. А. Фарков, “О наилучшем линейном приближении голоморфных функций”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **19**:5 (2014), 185–212.

[5] С. Б. Вакарчук, М. Ш. Шабозов, “О поперечниках классов функций, аналитических в круге”, *Матем. сб.*, **201**:8 (2010), 3–22.

[6] Л. В. Тайков, “Поперечники некоторых классов аналитических функций”, *Матем. заметки*, **22**:2 (1977), 285–295.

[7] Н. Айнуллоев, Л. В. Тайков, “Наилучшее приближение в смысле А. Н. Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций”, *Матем. заметки*, **40**:3 (1986), 341–351.

[8] В. П. Захарюта, Н. И. Скиба, “Оценки n-поперечников некоторых классов функций, аналитических на римановых поверхностях”, *Матем. заметки*, **19**:6 (1976), 899–911.

[9] М. З. Двейрин, “Задачи наилучшего приближения классов функций, аналитических в единичном круге”, *Теория приближения функций*, Наука, М., 1977, 129–132.

[10] О. Г. Парфенов, “Поперечники одного класса аналитических функций”, *Матем. сб.*, **117(159)**:2 (1982), 279–285.

[11] Ю. А. Фарков, “Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$”, *УМН*, **45**:5 (275) (1990), 197–198.

[12] К. Ю. Осипенко, М. И. Стесин, “О поперечниках класса Харди H_2 в n-мерном шаре”, *УМН*, **45**:5 (275) (1990), 193–194.

[13] С. Б. Вакарчук, “Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения”, *Матем. заметки*, **72**:5 (2002), 665–669.

[14] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, “О наилучших линейных методах приближения функций классов Л. В. Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geqslant 1$, $0 < \rho \leqslant 1$”, *Матем. заметки*, **85**:3 (2009), 323–329.

[15] М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов, “Наилучшие методы приближения и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве $H_{q,\rho}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $0 < \rho \leqslant 1$”, *Сиб. матем. журн.*, **57**:2 (2016), 469–478.

[16] В. А. Абилов, Ф. В. Абилова, М. К. Керимов, “Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве $L_2(D, p(z))$”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:6 (2010), 999–1004.

[17] М. Ш. Шабозов, М. С. Саидусайнов, “Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n-поперечников”, *Матем. заметки*, **103**:4 (2018), 617–631.

[18] Ю. И. Григорян, “Поперечники некоторых множеств в функциональных пространствах”, *УМН*, **30**:3 (183) (1975), 161–162.

[19] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987.

[20] J. T. Scheik, “Polynomial approximation of functions analytic in a disk”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17**:6 (1966), 1238–1243.

[21] С. Б. Вакарчук, “Об оценках в $L_2(\mathbb{R})$ средних ν-поперечников классов функций, определенных при помощи обобщенного модуля непрерывности $\omega_{\mathcal{M}}$”, *Матем. заметки*, **106**:2 (2019), 198–211.

[22] С. Б. Вакарчук, “О приближении классическими ортогональными полиномами с весом в пространствах $L_{2,\gamma}(a, b)$ и о поперечниках функциональных классов”, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, № 12, 37–51.

[23] Д. Гайер, *Лекции по теории аппроксимации в комплексной области*, Мир, М., 1986.

[24] А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*. Т. 2. *Дальнейшее построение теории*, Наука, М., 1968.

[25] П. К. Суетин, “Многочлены, ортогональные по площади, и многочлены Бибербаха”, Тр. МИАН СССР, **100**, 1971, 3–90.

[26] T. Carleman, “Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen”, *Ark. Mat. Astron. Fys.*, **17**:9 (1923), 1–30.

[27] С. Н. Мергелян, “О полноте систем аналитических функций”, *УМН*, **8**:4 (56) (1953), 3–63.

[28] В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев, *Конструктивная теория функций комплексного переменного*, Наука, М.–Л., 1964.

[29] M. Keldych, “Sur l’approximation en moyenne par polynômes des fonctions d’une variable complexe”, *Матем. сб.*, **16 (58)**:1 (1945), 1–20.

[30] В. Л. Гончаров, *Теория интерполирования и приближения функций*, ГИТТЛ, М., 1954.

[31] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1976.

[32] V. N. Temlyakov, *Approximation of Periodic Functions*, Nova Sci. Publ., Commack, NY, 1993.

С. Б. Вакарчук
Днепропетровский университет
им. Альфреда Нобеля
E-mail: sbvakarchuk@gmail.com

Поступило
30.10.2019
После доработки
03.09.2020
Принята к публикации
09.09.2020