Е. А. Ровба, П. Г. Поцейко, О рациональной аппроксимации функций марковского вида частичными суммами рядов Фурье по одной системе Чебышева–Маркова, *Матем. заметки*, 2020, том 108, выпуск 4, 572–587

DOI: 10.4213/mzm12473

Математические заметки

Том 108 выпуск 4 октябрь 2020

УДК 517.5

О рациональной аппроксимации функций марковского вида частичными суммами рядов Фурье по одной системе Чебышева–Маркова

Е. А. Ровба, П. Г. Поцейко

Рассматриваются приближения на отрезке $[-1,1]$ функций, представляющих собой комбинацию классических функций Маркова, частичными суммами рядов Фурье по системе рациональных дробей Чебышева–Маркова. Устанавливаются поточечная и равномерная оценки приближений. В случае, когда производная меры слабо эквивалентна некоторой степенной функции, установлены асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений и оптимальное значение параметра, обеспечивающее наибольшую скорость приближений используемым методом. В случае четной кратности полюсов аппроксимирующей функции асимптотическая оценка точна. Приводятся примеры аппроксимаций индивидуальных функций.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: функция Маркова, частичные суммы ряда Фурье, дроби Чебышева–Маркова, асимптотические оценки, точные константы.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12473

Введение. Пусть μ – положительная борелевская мера с компактным носителем $F = \operatorname{supp}\mu \subset \mathbb{R}$. Преобразование Коши меры μ

$$\widehat{\mu}(z) = \int_F \frac{d\mu(t)}{t-z}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

называется *функцией Маркова*. Функция Маркова голоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$, и рациональная аппроксимация таких функций является хорошо известной классической задачей. Одной из первых работ, посвященных этой тематике, является статья Гончара [1]. Андерссон [2] нашел нижние порядковые оценки наилучших рациональных L_p-приближений $\widehat{\mu}(z)$ для $p \in (1,+\infty)$ в единичном круге и на отрезке, когда мера μ удовлетворяет следующим условиям:

$$\operatorname{supp}\mu = [1,a], \quad a > 1, \qquad d\mu(t) = \varphi(t)\,dt, \qquad \varphi(t) \asymp (t-1)^{\alpha}, \quad t \in [1,a], \quad \alpha > -\frac{1}{p}.$$

Пекарский [3] получил верхние порядковые оценки наилучших равномерных рациональных приближений функций Маркова при аналогичных условиях на меру μ.

Дальнейшее развитие данная проблематика нашла в работах многих авторов (см., например, [4]–[9]). Значительное число работ посвящено рациональным приближениям функций Маркова в различных пространствах при определенных условиях на меру μ. Прохоровым [6] исследованы рациональные аппроксимации функций Маркова на отрезках действительной оси.

Пекарским и Ровбой [8] изучены рациональные аппроксимации функций Маркова в единичном круге и на отрезке $[-1,1]$ посредством частичных сумм рядов Фурье по системам функций Такенака–Мальмквиста и системам Джрбашяна–Китбаляна соответственно. На основании интегрального представления приближений функции Маркова, полученной в указанной работе, позже Ровбой и Микуличем [9] найдены асимптотические оценки равномерных приближений указанными методами при фиксированном числе геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции.

В [10] авторами была построена одна система рациональных дробей Чебышева–Маркова с двумя геометрически различными комплексно-сопряженными мнимыми параметрами

$$M_n(x) = \cos n \arccos\biggl(x\sqrt{\frac{1+p^2}{1+p^2x^2}}\biggr), \qquad x \in [-1,1], \quad p \geqslant 0, \quad n = 0,1,\dots,$$

ортогональная с весом

$$\rho(x,p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{(1+p^2x^2)\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1,$$

на отрезке $[-1,1]$, т.е.

$$\int_{-1}^{1} M_n(x)M_m(x)\rho(x,p)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n,\ m,n = 0,1,2,\dots, \\ \dfrac{\pi}{2}, & m = n,\ m,n = 1,2,\dots, \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

Система $\{M_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ является естественным обобщением классической системы полиномов Чебышева первого рода и переходит в нее при $p=0$. В работе [10] изучены также аппроксимационные свойства соответствующих рядов Фурье

$$f(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n M_n(x), \qquad c_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)M_n(t)\rho(t,p)\,dt, \quad n = 0,1,\dots,$$

и их частичных сумм. В частности, справедлива

Теорема [10]. *Для частичных сумм ряда Фурье по системе рациональных дробей Чебышева–Маркова четной функции $f \in C[-1,1]$ имеет место представление*

$$s_{2n}(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v)\mathscr{D}_{2n}(u,v)\lambda(v)\,dv, \qquad x = \cos u, \tag{1}$$

где

$$\lambda(y) = \frac{1-\alpha^4}{1+2\alpha^2\cos 2y + \alpha^4}, \qquad \alpha \in [0,1), \tag{2}$$

$$\mathscr{D}_{2n}(u,v) = \frac{\sin\left[(2n+1)\varphi(u,v)\right]}{\sin\varphi(u,v)}, \qquad \varphi(u,v) = \int_u^v \lambda(y)\,dy, \qquad x = \cos u. \tag{3}$$

Частичная сумма $s_{2n}(f,x)$ является рациональной функцией порядка не выше $2n$ и имеет вид

$$s_{2n}(f,x)=\frac{q_{2n}(x)}{(1+p^2x^2)^n}, \qquad p\geqslant 0, \quad p=\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}, \quad n=0,1,\dots,$$

где $q_{2n}(x)$ – некоторый многочлен степени не выше $2n$, коэффициенты которого зависят от параметра p и функции f, причем

$$s_{2n}(1,x)\equiv 1.$$

Отметим, что выражение (3) является обобщением классического ядра Дирихле полиномиального ряда Фурье–Чебышева в случае четной функции f и переходит в него при $\alpha=0$.

Рассмотрим голоморфные функции, представимые в виде интеграла Стилтьеса с компактным носителем

$$\widehat{\sigma}(x)=\int_F\frac{t\,d\sigma(t)}{t^2+x^2}, \qquad F=\operatorname{supp}\sigma\subset[0,+\infty), \tag{4}$$

где $\sigma(t)$ – ограниченная неубывающая функция, принимающая бесконечно много различных значений. Предполагается также, что

$$\int_F\frac{d\sigma(t)}{t}<\infty. \tag{5}$$

Из (4) нетрудно получить, что

$$\widehat{\sigma}(x)=\frac{1}{2}\left[\int_F\frac{d\sigma(t)}{t+ix}+\int_F\frac{d\sigma(t)}{t-ix}\right], \qquad F=\operatorname{supp}\sigma\subset[0,+\infty),$$

где первое и второе слагаемые при указанных выше условиях на меру σ уже представляют собой классические функции Маркова. Из (4) очевидно, что $\widehat{\sigma}(x)$ функция четная на отрезке $[-1,1]$.

Представляет интерес исследовать приближения функции (4) на отрезке $[-1,1]$ частичными суммами (1) ряда Фурье по системе рациональных дробей Чебышева–Маркова.

В данной работе рассматриваются аппроксимации функций марковского вида (4) частичными суммами рационального ряда Фурье по одной системе рациональных дробей Чебышева–Маркова с двумя геометрически различными чисто мнимыми полюсами. Найдено интегральное представление приближений, а при условиях, когда $d\sigma(t)=\varphi(t)\,dt$ и $\varphi(t)\asymp t^\gamma$, $0<\gamma<2$, получена оценка поточечных приближений на отрезке $[-1,1]$, оценка равномерных приближений и асимптотическое выражение ее мажоранты, зависящее от параметра. Основываясь на этих результатах, вычислено значение параметра, при котором обеспечивается наилучшая скорость приближений. В качестве примера приводится представление некоторых индивидуальных функций интегралом (4) и соответствующая асимптотическая оценка их приближений.

Отметим, что выбор аппроксимируемой функции продиктован конструктивными особенностями используемого нами метода приближений. Во-первых, функция $\widehat{\sigma}(x)$ является четной. Во-вторых, она имеет особенность при $x=0$.

1. Интегральное представление приближений функций $\widehat{\sigma}(x)$. Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon_{2n}(x,\alpha) = \widehat{\sigma}(x) - s_{2n}(\widehat{\sigma}(x), x), \qquad x \in [-1,1], \tag{6}$$

$$\varepsilon_{2n}(\alpha) = \|\widehat{\sigma}(x) - s_{2n}(\widehat{\sigma}(x), x)\|_{C[-1,1]}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть мера σ удовлетворяет условию (5), а мера ν определяется соотношением*

$$d\nu(y) = \frac{4y^2}{1+y^2}\, d\sigma(\varphi(y)), \qquad 0 < y < 1, \tag{8}$$

где

$$\varphi(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - y\right).$$

Тогда для приближений (6) при $x \in [-1,1]$ имеет место равенство

$$\varepsilon_{2n}(x,\alpha) = (-1)^{n+1} \int \sqrt{\frac{1+2\alpha^2\cos 2u + \alpha^4}{1+2y^2\cos 2u + y^4}}\, \frac{y\cos\psi_n(x,y,\alpha)}{1-\alpha^2y^2}\, \chi_n(y)\, d\nu(y), \tag{9}$$

где

$$\psi_n(x,y,\alpha) = \arg\pi_n(\xi) + \arg\frac{(\xi^2+y^2)(\xi^2+\alpha^2)}{\xi^2}, \qquad \xi = e^{iu}, \qquad x = \cos u, \tag{10}$$

$$\pi_n(z) = \left(\frac{z^2+\alpha^2}{1+\alpha^2z^2}\right)^n, \quad \chi_n(y) = \left(\frac{y^2-\alpha^2}{1-\alpha^2y^2}\right)^n, \qquad \alpha \in [0,1). \tag{11}$$

Доказательство. Воспользовавшись точностью $s_{2n}(\,\cdot\,, x)$ на константах, из равенств (1) и (6) получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2n}(x,\alpha) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int \frac{t\,d\sigma(t)}{t^2+\cos^2 u} - \int \frac{t\,d\sigma(t)}{t^2+\cos^2 v}\right]\mathscr{D}_{2n}(u,v)\lambda(v)\,dv \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int t\frac{\cos^2 v - \cos^2 u}{(t^2+\cos^2 u)(t^2+\cos^2 v)}\,d\sigma(t)\right]\mathscr{D}_{2n}(u,v)\lambda(v)\,dv,\end{aligned}$$

где $\mathscr{D}_{2n}(u,v)$ из (3), $\lambda(v)$ из (2), $x = \cos u$. Применив теорему Фубини, в последнем соотношении поменяем порядок интегрирования. Тогда

$$\varepsilon_{2n}(x,\alpha) = \frac{1}{\pi}\int \frac{t}{t^2+\cos^2 u}\, I_n(x,t,\alpha)\, d\sigma(t), \tag{12}$$

где

$$I_n(x,t,\alpha) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 v - \cos^2 u}{t^2+\cos^2 v}\cdot \mathscr{D}_{2n}(u,v)\lambda(v)\,dv, \qquad x = \cos u. \tag{13}$$

Займемся преобразованием последнего интеграла. С этой целью выполним замену переменного по формуле $\zeta = e^{iv}$, $dv = d\zeta/i\zeta$, положив при этом $\xi = e^{iu}$. Тогда, учитывая, что

a) $\quad \cos^2 v - \cos^2 u = \dfrac{(\zeta^2-\xi^2)(\xi^2\zeta^2-1)}{4\xi^2\zeta^2};$

б) $t^2 + \cos^2 v = \dfrac{(\zeta^2 + h^2)(\zeta^2 + 1/h^2)}{4\zeta^2}, \qquad h = \sqrt{t^2+1} - t < 1, \quad t \in \operatorname{supp}\sigma;$

в) $\mathscr{D}_{2n}(u,v)\lambda(v) = \left[\dfrac{1+\alpha^2\xi^2}{1+\alpha^2\zeta^2} \cdot \dfrac{\pi_n(\zeta)}{\pi_n(\xi)} - \dfrac{\xi^2+\alpha^2}{\zeta^2+\alpha^2} \cdot \dfrac{\pi_n(\xi)}{\pi_n(\zeta)}\right] \dfrac{\zeta^2}{\zeta^2 - \xi^2},$

где $\pi_n(u)$ определена в (11), из равенства (13) получим

$$I_n(x,t,\alpha) = \frac{1}{i\xi^2}[(1+\alpha^2\xi^2)\overline{\pi_n(\xi)} I_1 - (\xi^2+\alpha^2)\pi_n(\xi) I_2], \quad \xi = e^{iu}, \tag{14}$$

где

$$I_1 = \int_C \frac{\xi^2\zeta^2 - 1}{(\zeta^2+h^2)(\zeta^2+1/h^2)} \left(\frac{\zeta^2+\alpha^2}{1+\alpha^2\zeta^2}\right)^n \frac{\zeta}{1+\alpha^2\zeta^2}\, d\zeta,$$
$$I_2 = \int_C \frac{\xi^2\zeta^2 - 1}{(\zeta^2+h^2)(\zeta^2+1/h^2)} \left(\frac{1+\alpha^2\zeta^2}{\zeta^2+\alpha^2}\right)^n \frac{\zeta}{\zeta^2+\alpha^2}\, d\zeta,$$

$C = \{\zeta : \zeta = e^{iv}, -\pi/2 \leqslant v \leqslant \pi/2\}$. Отметим, что контур интегрирования C есть правая полуокружность единичной окружности $|\zeta| = 1$, обходимая против часовой стрелки. Исследуем каждый из этих интегралов. Так, в интеграле I_1 подынтегральная функция

$$\varphi_1(\xi,\zeta) = \frac{\xi^2\zeta^2 - 1}{(\zeta^2+h^2)(\zeta^2+1/h^2)} \left(\frac{\zeta^2+\alpha^2}{1+\alpha^2\zeta^2}\right)^n \frac{\zeta}{1+\alpha^2\zeta^2}$$

на границе области $D = \{\zeta : |\zeta| < 1, \operatorname{Re}\zeta > 0\}$ имеет две особенности в точках $\pm ih$, являющиеся для нее простыми полюсами, находящимися на мнимой оси. Применяя интегральную теорему Коши в области, ограниченной контуром, состоящим из C, полуокружностей C_{ε_1} и C_{ε_2} достаточно малого радиуса ε_1 и ε_2 соответственно, огибающих соответственно точки ih и $-ih$ против часовой стрелки, т.е. $C_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} = \{\zeta : \zeta \pm ih = \varepsilon_{1,2}e^{i\varphi}, -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\}$ и отрезка мнимой оси от точки i до $-i$ с изъятыми диаметрами полуокружностей C_{ε_1} и C_{ε_2}, найдем

$$I_1 + \left(\int_i^{(h+\varepsilon_1)i} + \int_{C_{\varepsilon_1}} + \int_{(h-\varepsilon_1)i}^{(-h+\varepsilon_2)i} + \int_{C_{\varepsilon_2}} + \int_{(-h-\varepsilon_2)i}^{-i}\right)\varphi_1(\xi,\zeta)\, d\zeta = 0, \tag{15}$$

Рассмотрим интегралы по полуокружностям C_{ε_1} и C_{ε_2}. Выполнив в первом и втором из них замены $\zeta - ih = \varepsilon_1 e^{i\varphi}$ и $\zeta + ih = \varepsilon_2 e^{i\varphi}$ соответственно, будем иметь

$$\int_{C_{\varepsilon_1}} \varphi_1(\xi,\zeta)\, d\zeta = \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{\xi^2(ih+\varepsilon_1 e^{i\varphi})^2 - 1}{((ih+\varepsilon_1 e^{i\varphi})^2 + 1/h^2)(2ih+\varepsilon_1 e^{i\varphi})\varepsilon_1 e^{i\varphi}}$$
$$\times \left(\frac{(ih+\varepsilon_1 e^{i\varphi})^2+\alpha^2}{1+\alpha^2(ih+\varepsilon_1 e^{i\varphi})^2}\right)^n \frac{(ih+\varepsilon_1 e^{i\varphi}) i\varepsilon_1 e^{i\varphi}\, d\varphi}{1+\alpha^2(ih+\varepsilon_1 e^{i\varphi})^2},$$
$$\int_{C_{\varepsilon_2}} \varphi_1(\xi,\zeta)\, d\zeta = \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{\xi^2(-ih+\varepsilon_2 e^{i\varphi})^2 - 1}{((-ih+\varepsilon_2 e^{i\varphi})^2 + 1/h^2)(-2ih+\varepsilon_2 e^{i\varphi})\varepsilon_2 e^{i\varphi}}$$
$$\times \left(\frac{(-ih+\varepsilon_2 e^{i\varphi})^2+\alpha^2}{1+\alpha^2(-ih+\varepsilon_2 e^{i\varphi})^2}\right)^n \frac{(-ih+\varepsilon_2 e^{i\varphi}) i\varepsilon_2 e^{i\varphi}\, d\varphi}{1+\alpha^2(-ih+\varepsilon_2 e^{i\varphi})^2}.$$

Переходя в последних двух выражениях к пределу при $\varepsilon_{1,2} \to 0$ соответственно, находим, что

$$\left(\int_{C_{\varepsilon_1}} + \int_{C_{\varepsilon_2}}\right)\varphi_1(\xi,\zeta)\,d\zeta = i\pi\frac{h^2}{1-h^4}\frac{1+h^2\xi^2}{1-h^2\alpha^2}\,\pi_n(ih).$$

С учетом последнего равенства в (15) получим

$$I_1 = \int_{-i}^{i}\varphi_1(\xi,\zeta)\,d\zeta - i\pi\frac{h^2}{1-h^4}\frac{1+h^2\xi^2}{1-h^2\alpha^2}\,\pi_n(ih).$$

Замечая далее, что подынтегральная функция в интеграле справа является нечетной по переменной интегрирования, а сам интеграл имеет симметричные относительно нуля пределы интегрирования, заключаем, что он равен нулю. Следовательно,

$$I_1 = -i\pi\frac{h^2}{1-h^4}\frac{1+h^2\xi^2}{1-h^2\alpha^2}\,\pi_n(ih), \qquad h = \sqrt{t^2+1} - t < 1, \quad t \in \operatorname{supp}\sigma. \tag{16}$$

Теперь займемся интегралом I_2. Его подынтегральная функция

$$\varphi_2(\xi,\zeta) = \frac{\xi^2\zeta^2 - 1}{(\zeta^2+h^2)(\zeta^2+1/h^2)}\left(\frac{1+\alpha^2\zeta^2}{\zeta^2+\alpha^2}\right)^n\frac{\zeta}{\zeta^2+\alpha^2}$$

в области $D = \{\zeta : |\zeta| > 1, \operatorname{Re}\zeta > 0\}$ имеет на мнимой оси особые точки $\pm i(1/h)$, являющиеся простыми полюсами, а на бесконечности нуль не ниже второго порядка.

Применяя интегральную теорему Коши в области D, ограниченной контуром, состоящим из отрезков мнимой оси от точки $+i\infty$ до i и от $-i$ до $-i\infty$ с изъятыми диаметрами полуокружностей C_{ε_1} и C_{ε_2} бесконечно малого радиуса ε_1 и ε_2 соответственно, огибающих соответственно точки $i(1/h)$ и $-i(1/h)$ против часовой стрелки, т.е. $C_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} = \{\zeta : \zeta \pm i(1/h) = \varepsilon_{1,2}e^{i\varphi},\ \pi/2 \leqslant \varphi \leqslant -\pi/2\}$ и полуокружности C, двигаясь так, что область D остается слева, найдем

$$\int_{+i\infty}^{(1/h+\varepsilon_1)i} + \int_{C_{\varepsilon_1}} + \int_{(1/h-\varepsilon_1)i}^{i} - I_2 + \int_{-i}^{(-1/h+\varepsilon_2)i} + \int_{C_{\varepsilon_2}} + \int_{(-1/h-\varepsilon_2)i}^{-i\infty} = 0, \tag{17}$$

где $C_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} = \{\zeta : \zeta \pm i(1/h) = \varepsilon_{1,2}e^{i\varphi},\ \pi/2 \leqslant \varphi \leqslant -\pi/2\}$ соответственно. Используя рассуждения, которые мы применяли в случае с интегралом I_1, получим, что

$$\left(\int_{C_{\varepsilon_1}} + \int_{C_{\varepsilon_2}}\right)\varphi_2(\xi,\zeta)\,d\zeta = i\pi\frac{h^2}{1-h^4}\frac{\xi^2+h^2}{1-h^2\alpha^2}\,\pi_n(ih).$$

Подставляя последнее соотношение в (17), и затем переходя к пределу при $\varepsilon_{1,2} \to 0$ в соответствующих интегралах, будем иметь

$$I_2 = \left(\int_{+i\infty}^{i} + \int_{-i}^{-i\infty}\right)\varphi_2(\xi,\zeta)\,d\zeta + i\pi\frac{h^2}{1-h^4}\frac{\xi^2+h^2}{1-h^2\alpha^2}\,\pi_n(ih).$$

В интегралах справа выполним замену переменного $\zeta \mapsto 1/\zeta$. Тогда

$$I_2 = \int_{-i}^{i}\frac{\xi^2-\zeta^2}{(\zeta^2+h^2)(\zeta^2+1/h^2)}\left(\frac{\zeta^2+\alpha^2}{1+\alpha^2\zeta^2}\right)^n\frac{\zeta}{1+\alpha^2\zeta^2}\,d\zeta + i\pi\frac{h^2}{1-h^4}\frac{\xi^2+h^2}{1-h^2\alpha^2}\,\pi_n(ih).$$

Рассуждая аналогично, как и в случае с I_1, заключаем, что интеграл справа равен нулю, а значит,

$$I_2 = i\pi \frac{h^2}{1-h^4} \frac{\xi^2+h^2}{1-h^2\alpha^2} \pi_n(ih), \qquad h = \sqrt{t^2+1}-t < 1, \quad t \in \operatorname{supp}\sigma. \tag{18}$$

Подставив теперь (16) и (18) в (14), получим

$$I_n(x,t,\alpha) = (-1)^{n+1}\pi \frac{h^2}{1-h^4} \times \left[\frac{(1+\alpha^2\xi^2)(1+h^2\xi^2)\overline{\pi_n(\xi)}}{\xi^2} + \frac{(\xi^2+\alpha^2)(\xi^2+h^2)\pi_n(\xi)}{\xi^2} \right] \frac{\chi_n(h)}{1-h^2\alpha^2}, \tag{19}$$

где $\chi_n(h)$ из (11), $h = \sqrt{t^2+1}-t$, $t \in \operatorname{supp}\sigma$, $x = \cos u$. Заметим, что выражения, находящиеся в квадратных скобках равенства (19), взаимно комплексно сопряжены. Следовательно, их сумма является действительнозначной. Отыщем ее.

Рассмотрим, к примеру, второе слагаемое. Выполнив необходимые преобразования, находим, что

$$\frac{(\xi^2+\alpha^2)(\xi^2+h^2)\pi_n(\xi)}{\xi^2} = \sqrt{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}\,\sqrt{1+2h^2\cos 2u+h^4}\,\exp[i\psi_n(x,t,\alpha)],$$

где

$$\psi_n(x,t,\alpha) = \arg\pi_n(\xi) + \arg\frac{(\xi^2+\alpha^2)(\xi^2+h^2)}{\xi^2}, \qquad \xi = e^{iu}, \quad x = \cos u. \tag{20}$$

Тогда равенство (19) примет вид

$$I_n(x,t,\alpha) = (-1)^{n+1}2\pi \frac{h^2}{1-h^4} \sqrt{(1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4)(1+2h^2\cos 2u+h^4)} \times \frac{\cos\psi_n(x,t,\alpha)\chi_n(h)}{1-h^2\alpha^2}.$$

Заметим, что $1/h^2 - h^2 = 1/(4t\sqrt{t^2+1}\,)$. Подставив последнее соотношение в (12), получим

$$\varepsilon_{2n}(x,\alpha) = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \int \frac{\sqrt{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}\,\sqrt{1+2h^2\cos 2u+h^4}}{(t^2+\cos^2 u)(1-\alpha^2h^2)\sqrt{t^2+1}} \times \cos\psi_n(x,t,\alpha)\chi_n(h)\,d\mu(t).$$

В интеграле справа положим $y = \sqrt{t^2+1}-t = h$. Тогда $t = \varphi(y) = (1-y^2)/(2y)$, и

$$\varepsilon_{2n}(x,\alpha) = (-1)^{n+1} \int \sqrt{\frac{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}{1+2y^2\cos 2u+y^4}}\,\frac{y\cos\psi_n(x,y,\alpha)}{1-\alpha^2y^2}\,\frac{4y^2\chi_n(y)}{1+y^2}\,d\sigma(\varphi(y)),$$

где $\chi_n(y)$ определяется в (11), $\psi_n(x,y,\alpha)$ из (10). Теперь, чтобы прийти к равенству (9), достаточно в последнем интеграле воспользоваться соотношением (8). Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 равномерно при $x \in [-1,1]$, $x = \cos u$, справедливо неравенство*

$$|\varepsilon_{2n}(x,\alpha)| \leqslant \varepsilon_{2n}(\alpha) \leqslant \left\| \int_{\operatorname{supp}\nu} \sqrt{\frac{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}{1+2y^2\cos 2u+y^4}} |\chi_n(y)| \frac{y\,d\nu(y)}{1-\alpha^2y^2} \right\|_{C[-1,1]},$$

где $\varepsilon_{2n}(\alpha)$ из (7).

2. Об оценке приближений функций $\widehat{\sigma}(x)$. При исследовании приближений функций Маркова часто рассматривается случай, когда производная меры $\mu(t)$ слабо эквивалентна степенной функции. Такой случай изучается нами далее.

Теорема 2. *Пусть $\operatorname{supp}\nu \in [a,1]$, $0 \leqslant a < 1$, $d\sigma(t) = \varphi(t)\,dt$ и $\varphi(t) \asymp t^\gamma$, $0 < \gamma < 2$. Тогда в условиях теоремы 1 для приближений функции $\widehat{\sigma}(x)$ на отрезке $[-1,1]$ частичными суммами (6) справедливы следующие оценки:*

1) *оценка поточечных приближений*

$$|\varepsilon_{2n}(x,\alpha)| \leqslant \frac{1}{2^{\gamma-1}} \int_a^1 \sqrt{\frac{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}{1+2t^2\cos 2u+t^4}}\, \frac{(1-t^2)^\gamma}{t^{\gamma-1}} \frac{|\chi_n(t)|\,dt}{1-\alpha^2t^2}, \qquad x = \cos u, \tag{21}$$

2) *оценка равномерных приближений*

$$\varepsilon_{2n}(\alpha) \leqslant \varepsilon^*_{2n}(\alpha), \tag{22}$$

где

$$\varepsilon^*_{2n}(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\gamma-1}}[I_1(\alpha,n)+I_2(\alpha,n)], & 0 \leqslant a < \alpha < 1, \\ \dfrac{1-\alpha^2}{2^{\gamma-1}} \displaystyle\int_a^1 \left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{\gamma-1} \chi_n(t) \frac{dt}{1-\alpha^2t^2}, & 0 \leqslant \alpha \leqslant a < 1, \end{cases} \tag{23}$$

$$I_1(\alpha,n) = (1-\alpha^2) \int_\alpha^1 \left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{\gamma-1} \chi_n(t)\, \frac{dt}{1-\alpha^2t^2},$$

$$I_2(\alpha,n) = (1+\alpha^2) \int_a^\alpha \frac{1-t^2}{1+t^2} \left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{\gamma-1} |\chi_n(t)|\, \frac{dt}{1-\alpha^2t^2},$$

Неравенство (21) является точным в том смысле, что если полюсы аппроксимирующей функции имеют четную кратность, то равенство достигается в точке $x = 0$, а также на концах отрезка.

Доказательство. Из (8) и (9) следует, что в случае $d\sigma(t) = \varphi(t)\,dt$ и $\varphi(t) \asymp t^\gamma$, $0 < \gamma < 2$, естественно рассматривать приближения (6) в виде

$$\varepsilon_{2n}(x,\alpha) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{\gamma-1}} \int_a^1 \sqrt{\frac{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}{1+2t^2\cos 2u+t^4}}\, \frac{(1-t^2)^\gamma}{t^{\gamma-1}} \frac{\cos\psi_n(x,t,\alpha)}{1-\alpha^2t^2}\, \chi_n(t)\,dt, \tag{24}$$

где $\psi_n(x,t,\alpha)$ определено в (10), $\xi = e^{iu}$, $x = \cos u$. Теперь для того, чтобы получить оценку (21), достаточно в последнем соотношении воспользоваться неравенством $|\cos\psi_n(x,t,\alpha)| \leqslant 1$. Для доказательства точности оценки (21) исследуем правую часть (24) при $x = 0$, что соответствует значению параметра $u = \pi/2$. Учитывая, что при этом будет $\xi^2 = -1$ и, следовательно, $\psi(0, t, \alpha) = -(n+1)\pi$, находим

$$\varepsilon_{2n}(0, \alpha) = \frac{1-\alpha^2}{2^{\gamma-1}} \int_a^1 \left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{\gamma-1} \chi_n(t) \, \frac{dt}{1-\alpha^2 t^2} \,. \tag{25}$$

Нетрудно проверить, что последнее выражение совпадает с правой частью (21) при $x = 0$ и четных n. Аналогичным образом устанавливается точность оценки (21) при $x = \pm 1$.

Докажем справедливость оценки (22). Учитывая, что $\cos 2u = 2x^2 - 1$, из (21) находим

$$|\varepsilon_{2n}(x, \alpha)| \leqslant \frac{1-\alpha^2}{2^{\gamma-1}} \int_a^1 \nu(x) \left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{\gamma-1} \frac{|\chi_n(t)|}{1-\alpha^2 t^2} \, dt, \qquad \nu(x) = \sqrt{\frac{1+A^2x^2}{1+T^2x^2}} \,, \tag{26}$$

где $A = 2\alpha/(1-\alpha^2)$, $T = 2t/(1-t^2)$. Исследуем функцию $\nu(x)$. Поскольку

$$\nu'(x = \frac{x(A^2 - T^2)}{\sqrt{(1+A^2x^2)(1+T^2x^2)^3}} \,,$$

то при $a < t < \alpha$ функция $\nu(x)$ возрастает, а значит, достигает максимального значения при $x = 1$, что соответствует значению параметра $u = 0$. В то же время при $\alpha < t < 1$ функция $\nu(x)$ убывает, и, значит, максимальное ее значение будет уже при $x = 0$, что соответствует значению параметра $u = \pi/2$. Тогда, разбивая интеграл в правой части (26) на два интеграла по промежуткам $[a, \alpha]$ и $[\alpha, 1]$, и применяя затем рассуждения, сказанные выше, придем к неравенству (22).

Если же значение параметра α удовлетворяет условию $0 \leqslant \alpha \leqslant a < 1$, то функция $\nu(x)$ будет убывать на всем отрезке $[a, 1]$ и приходим ко второму случаю в соотношении (23). Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Из оценки (26) следует, что ограничения на параметр γ, $0 < \gamma < 2$, обусловлены возможностью параметра a принимать нулевое значение. Если отказаться от этого условия, то ограничение $\gamma < 2$ можно снять.

Рассмотрим здесь также полиномиальный случай. Положив в соотношениях (21) и (22) значение $\alpha = 0$, получим оценку поточечных и равномерных приближений функции (4) частичными суммами ряда Фурье по системе многочленов Чебышева первого рода на отрезке $[-1, 1]$ при условии, что мера удовлетворяет условиям в формулировке теоремы 2. Имеем, соответственно,

$$|\varepsilon_{2n}(x)| \leqslant \frac{1}{2^{\gamma-1}} \int_a^1 \frac{(1-t^2)^{\gamma-1}}{\sqrt{1+2t^2\cos 2u + t^4}} \, t^{2n-\gamma-1} \, dt, \qquad x = \cos u, \quad x \in [-1, 1],$$

$$\varepsilon_{2n} = \varepsilon_{2n}(0) = \frac{1}{2^{\gamma-1}} \int_a^1 \left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{\gamma-1} t^{2n} \, dt, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Отметим, что даже допустив возможность параметра a принимать нулевое значение, интегралы в последних соотношениях в отличие от рационального случая существуют при любом значении параметра $\gamma > 0$ при выполнении условия $n + 1 > \gamma/2$.

Представляет интерес исследовать асимптотическое поведение интеграла (27) при $n \to \infty$ когда параметр $\gamma \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$. Воспользуемся методом Лапласа [15]–[17]. Представим последний интеграл в виде

$$\varepsilon_{2n} = \frac{1}{2^{\gamma-1}} \int_a^1 \left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{\gamma-1} e^{2nS(t)}\, dt, \qquad S(t) = \ln t.$$

Функция $S(t)$ возрастает при $t \in (0,1)$ поскольку $S'(t) = 1/t > 0$ и, значит, достигает максимального значения при $t = 1$. Используя разложение $S(t) = t - 1 + o(t-1)$, справедливое при $t \to 1$, а также учитывая, что

$$f(t) = \left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{\gamma-1} = 2^{\gamma-1}(1-t)^{\gamma-1} + o((1-t)^{\gamma-1}), \qquad t \to 1,$$

находим, что при малом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$

$$\varepsilon_{2n} \sim \int_{1-\varepsilon}^1 (1-t)^{\gamma-1} e^{2(t-1)n}\, dt.$$

Выполнив в последнем интеграле замену $2(1-t)n \mapsto t$, окончательно получим

$$\varepsilon_{2n} \sim \frac{1}{(2n)^\gamma} \int_0^{2n\varepsilon} t^{\gamma-1} e^{-t}\, dt \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{(2n)^\gamma}, \qquad n \to \infty,$$

где $\Gamma(\gamma)$ – гамма-функция Эйлера.

Последнее соотношение есть асимптотическая оценка равномерных приближений функции (4) при условиях на меру в формулировке теоремы 2 частичными суммами ряда Фурье по системе полиномов Чебышева первого рода. Значение этой оценки в том, что здесь имеются точные константы.

3. Асимптотика мажоранты равномерных приближений функций $\widehat{\sigma}(x)$. Выше нами были найдены оценки поточечных и равномерных приближений функций (4) частичными суммами (1) при определенных условиях на меру $\sigma(t)$, $t \in \operatorname{supp} \sigma$. Представляет интерес нахождение асимптотического выражения правой части оценки (22) при $n \to \infty$. Справедлива

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда при $n \to \infty$ для величины $\varepsilon^*_{2n}(\alpha)$, определяемой соотношением (23), справедливы следующие асимптотические равенства*:

$$\varepsilon^*_{2n}(\alpha) \sim \begin{cases} \left(\dfrac{\beta}{2n}\right)^\gamma \Gamma(\gamma) + \dfrac{A^\gamma}{2} \dfrac{A-\beta}{\beta n(\sqrt{1-A^2})^\gamma} \left(\dfrac{A-\beta}{A+\beta}\right)^n, & 0 \leqslant a \leqslant \alpha < 1, \\ \left(\dfrac{\beta}{2n}\right)^\gamma \Gamma(\gamma), & 0 \leqslant \alpha \leqslant a < 1, \end{cases} \tag{28}$$

где $\beta = (1-\alpha^2)/(1+\alpha^2)$, $\alpha \in [0,1)$, $A = (1-a^2)/(1+a^2)$.

Доказательство. Докажем вначале первое утверждение в (28). Будем искать асимптотику $\varepsilon^*_{2n}(\alpha)$, если значение параметра α удовлетворяет условию $0 \leqslant a \leqslant$

$\alpha < 1$. Для решения поставленной задачи в интегралах $I_1(\alpha, n)$ и $I_2(\alpha, n)$ выполним замену переменной по формуле

$$t^2 = \frac{1-u}{1+u}, \qquad dt = -\frac{du}{(1+u)\sqrt{1-u^2}}.$$

Тогда

$$I_1(\alpha, n) = 2^{\gamma-1}\beta \int_0^{\beta} \frac{u^{\gamma-1}}{(1-u^2)^{\gamma/2}} \left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^n \frac{du}{\beta+u},$$

$$I_2(\alpha, n) = 2^{\gamma-1} \int_{\beta}^{A} \frac{u^{\gamma}}{(1-u^2)^{\gamma/2}} \left(\frac{u-\beta}{\beta+u}\right)^n \frac{du}{\beta+u}, \qquad A = \frac{1-a^2}{1+a^2}.$$

Исследуем асимптотическое поведение при $n \to \infty$ каждого из интегралов. Для реализации поставленной задачи воспользуемся методом Лапласа [15]–[17]. Рассмотрим интеграл $I_1(\alpha, n)$. Перепишем его в виде

$$I_1(\alpha, n) = 2^{\gamma-1}\beta \int_0^{\beta} \frac{u^{\gamma-1}}{(1-u^2)^{\gamma/2}}\, e^{nS(u)}\, \frac{du}{\beta+u}, \qquad S(u) = \ln\frac{\beta-u}{\beta+u}.$$

Функция $S(u)$, $0 < u < \beta$, $0 < \beta < 1$, убывает на отрезке $[0, \beta]$, поскольку $S'(u) = -2\beta/(\beta^2 - u^2) < 0$, а значит, имеет имеет строгий максимум в точке $u = 0$. Используя разложение $S(u) = -2u/\beta + o(u)$, справедливое при $u \to 0$, а также учитывая асимптотическое равенство

$$\frac{u^{\gamma-1}}{(1-u^2)^{\gamma/2}(\beta+u)} \sim \frac{u^{\gamma-1}}{\beta}, \qquad u \to 0,$$

находим, что при малом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$

$$I_1(\alpha, n) \sim 2^{\gamma-1} \int_0^{\varepsilon} u^{\gamma-1} e^{-2un/\beta}\, du.$$

В последнем интеграле выполним замену переменной по формуле $2un/\beta \mapsto u$. Тогда

$$I_1(\alpha, n) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{n}\right)^{\gamma} \int_0^{2n\varepsilon/\beta} u^{\gamma-1} e^{-u}\, du \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{n}\right)^{\gamma} \Gamma(\gamma), \qquad n \to \infty, \tag{29}$$

где $\Gamma(\gamma)$ – гамма-функция Эйлера.

Займемся теперь интегралом $I_2(\alpha, n)$. Замена $u = \cos\theta$ приведет его к виду

$$I_2(\alpha, n) = 2^{\gamma-1} \int_{\arccos A}^{\arccos\beta} \frac{\cos^{\gamma}\theta \sin^{1-\gamma}\theta}{\beta + \cos\theta}\, e^{nS(\theta)}\, d\theta, \qquad S(\theta) = \ln\frac{\cos\theta - \beta}{\cos\theta + \beta}.$$

Функция $S(\theta)$, $0 < \theta < \arccos\beta$, $0 < \beta < 1$, убывает на отрезке $[\arccos A, \arccos\beta]$, поскольку $S'(\theta) = -2\beta\sin\theta/(\cos^2\theta - \beta^2) < 0$, а значит, имеет имеет строгий максимум в точке $\theta = \arccos A$. Используя разложения

$$\frac{\cos^{\gamma}\theta \sin^{1-\gamma}\theta}{\beta + \cos\theta} = \frac{A^{\gamma}(\sqrt{1-A^2}\,)^{1-\gamma}}{\beta + A} + O(\theta - \arccos A),$$

$$S(\theta) = \ln\frac{A-\beta}{A+\beta} - 2\beta\frac{\sqrt{1-A^2}}{A^2-\beta^2}(\theta - \arccos A) + o((\theta - \arccos A)),$$

справедливые при $\theta \to \arccos A$, находим, что при малом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$

$$I_2(\alpha, n) \sim \frac{2^{\gamma-1} A^\gamma (\sqrt{1-A^2}\,)^{1-\gamma}}{\beta + A} \left(\frac{A-\beta}{A+\beta}\right)^n \int_{\arccos A}^{\arccos A + \varepsilon} e^{\psi(\theta,\beta,a)}\, d\theta,$$

где $\psi(\theta, \beta, a) = -2\beta n\sqrt{1-A^2}\,(\theta - \arccos A)/(A^2-\beta^2)$. Положив в последнем интеграле $\theta - \arccos A \mapsto \theta$, а затем выполнив замену $2\beta n\theta\sqrt{1-A^2}/(A^2-\beta^2) \mapsto \theta$, получим

$$I_2(\alpha, n) \sim \left(\frac{A-\beta}{A+\beta}\right)^n \frac{2^{\gamma-2} A^\gamma (A-\beta)}{\beta n (\sqrt{1-A^2}\,)^\gamma} \int_0^{\varphi(n,\varepsilon)} e^{-\theta}\, d\theta,$$

где $\varphi(n, \varepsilon) = 2\beta n\sqrt{1-A^2}\,\varepsilon/(A^2-\beta^2) \to +\infty$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что

$$I_2(\alpha, n) \sim \frac{2^{\gamma-2} A^\gamma (A-\beta)}{\beta n (\sqrt{1-A^2}\,)^\gamma} \left(\frac{A-\beta}{A+\beta}\right)^n, \qquad n \to \infty. \tag{30}$$

Подставляя (29) и (30) в (22), приходим к первой асимптотике в соотношении (28).

Второе асимптотическое равенство в (28) устанавливается аналогичным образом. Теорема 3 доказана.

Представляет интерес минимизировать правую часть соотношения (28) посредством выбора оптимального для этой задачи параметра $\beta = \beta^*$, другими словами, искать оценку наилучшего равномерного приближения функций (4) в условиях на меру $\sigma(t)$ частичными суммами рационального ряда Фурье (4). Положим

$$\varepsilon_{2n} = \inf_{\alpha \in [0,1)} \varepsilon_{2n}(\alpha), \qquad \varepsilon^*_{2n} = \inf_{\alpha \in [0,1)} \varepsilon^*_{2n}(\alpha).$$

Теорема 4. *В условиях теоремы 2 справедливы соотношения*

1) $\varepsilon^*_{2n} \sim (A\gamma/2)^\gamma \Gamma(\gamma)(\ln n/n^2)^\gamma$, $n \to \infty$,

2) $\varepsilon_{2n} \sim \varepsilon^*_{2n}$, $n \to \infty$, n *– четное.*

Доказательство. Докажем вначале первое утверждение теоремы. Для этого в соотношении (28) положим

$$\beta^* = \frac{A\gamma \ln n}{n}\,. \tag{31}$$

В этом случае

$$\varepsilon^*_{2n}(\alpha^*) = \left(\frac{A\gamma}{2}\right)^\gamma \Gamma(\gamma) \left(\frac{\ln n}{n^2}\right)^\gamma + o\biggl(\left(\frac{A\gamma}{2}\right)^\gamma \Gamma(\gamma) \left(\frac{\ln n}{n^2}\right)^\gamma\biggr), \qquad n \to \infty, \tag{32}$$

где $\alpha^* = \sqrt{(1-\beta^*)/(1+\beta^*)}$. Покажем, что именно при $\beta = \beta^*$ выражение $\varepsilon^*_{2n}(\alpha)$ имеет асимптотически минимальное значение. Зафиксируем $\delta > 0$. С одной стороны, при $\beta^+ = (\gamma + \delta)\ln n/n$, $\alpha^+ = \sqrt{(1-\beta^+)/(1+\beta^+)}$ и достаточно больших n в соотношении (28) найдем

$$\begin{aligned}\varepsilon^*_{2n}(\alpha^+) &= \left(\frac{A(\gamma+\delta)}{2}\right)^\gamma \Gamma(\gamma) \left(\frac{\ln n}{n^2}\right)^\gamma + o\biggl(\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)^\gamma\biggr) \\ &= \left(\frac{A\gamma}{2}\right)^\gamma \Gamma(\gamma) \left(\frac{\ln n}{n^2}\right)^\gamma \left(1 + \frac{\delta}{\gamma}\right)^\gamma + o\biggl(\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)^\gamma\biggr), \qquad n \to \infty.\end{aligned}$$

Из последнего соотношения следует, что при достаточно больших n будет

$$\varepsilon_{2n}^*(\alpha^+) > \varepsilon_{2n}^*(\alpha^*). \tag{33}$$

С другой стороны, при $\beta^- = A(\gamma-\delta)\ln(n)/n$ исследуем второе слагаемое в (28). Имеем

$$\eta(\gamma,n) = \frac{A^\gamma}{2}\frac{A-\beta}{\beta n(\sqrt{1-A^2})^\gamma}\left(\frac{A-\beta}{A+\beta}\right)^n\bigg|_{\beta=\beta^-} \sim \frac{C_{1,\gamma}}{n^{2(\gamma-\delta)}\ln n}, \qquad n\to\infty,$$

где $C_{1,\gamma}$ – величина, зависящая от γ и не зависящая от n. Отсюда находим, что

$$\frac{\varepsilon_{2n}^*(\alpha^*)}{\eta(\gamma,n)} = C_{2,\gamma}\frac{(\ln n)^\gamma}{n^{2\delta}} + C_{3,\gamma}\frac{1}{n^{2\delta}} \to 0, \qquad n\to\infty,$$

где $C_{2,\gamma}$ и $C_{3,\gamma}$ – величины, также зависящие от γ и не зависящие от n. Последнее соотношение означает, что

$$\varepsilon_{2n}^*(\alpha^*) = o(\eta(\gamma,n)), \qquad n\to\infty.$$

И, следовательно, при $\beta=\beta^-$ второе слагаемое в (28) достаточно велико при $n\to\infty$, а, значит, при достаточно больших n будет

$$\varepsilon_{2n}^*(\alpha^-) > \varepsilon_{2n}^*(\alpha^*). \tag{34}$$

Из (33) и (34) находим, что

$$\begin{gathered}\varepsilon_{2n}^* = \inf_{\alpha\in(0,1]}\varepsilon_{2n}^*(\alpha) = \varepsilon_{2n}^*(\alpha^*) = \left(\frac{A\gamma}{2}\right)^\gamma\Gamma(\gamma)\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)^\gamma + o\left(\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)^\gamma\right),\\ \alpha^* = \sqrt{\frac{1-\beta^*}{1+\beta^*}}, \quad n\to\infty,\end{gathered} \tag{35}$$

где β^* из (31). Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение теоремы. Воспользуемся точностью оценки (21) при четном n в точке $x=0$. В этом случае приближения определяются соотношением (25). Выполнив в его правой части уже известную замену переменной

$$t=\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}, \qquad dt = -\frac{du}{(1+u)\sqrt{1-u^2}},$$

придем к выражению

$$|\varepsilon_{2n}(0,\alpha)| = \beta\int_0^A \frac{u^{\gamma-1}}{(1-u^2)^{\gamma/2}}\left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^n\frac{du}{\beta+u}, \qquad A=\frac{1-a^2}{1+a^2}.$$

Применяя к последнему интегралу уже известные приемы исследования асимптотического поведения, получим

$$|\varepsilon_{2n}(0,\alpha)| \sim \left(\frac{\beta}{2n}\right)^\gamma\Gamma(\gamma) + \frac{A^{\gamma-1}}{2}\frac{A-\beta}{n(\sqrt{1-A^2}\,)^\gamma}\left(\frac{A-\beta}{A+\beta}\right)^n, \qquad n\to\infty.$$

Положив в правой части найденного асимптотического равенства значения параметра $\beta = \beta^*$ из (31), легко получить, что

$$|\varepsilon_{2n}(0, \alpha^*)| = \left(\frac{A\gamma}{2}\right)^{\gamma} \Gamma(\gamma) \left(\frac{\ln n}{n^2}\right)^{\gamma} + O\left(\frac{1}{n^{2\gamma+1}}\right), \qquad n \to \infty.$$

Сравнив полученное выражение с правой частью равенств (35), заключаем, что при четном n оценка равномерных приближений асимптотически достижима в точке $x = 0$. Таким образом, второе утверждение теоремы 4 также доказано.

Замечание 2. Из теоремы 4 следует, что оптимальный параметр α^* зависит от n и $\alpha^* \to 1$ при $n \to \infty$. Следовательно, для любого $0 \leqslant a < 1$ при достаточно большом n будет выполняться соотношение $0 \leqslant a < \alpha_n < 1$, т.е. будет иметь место только первая асимптотика в теореме 3.

Замечание 3. Из теоремы 4 следует, что для равномерных приближений функции (4) при условии $d\sigma(t) = \varphi(t)\,dt$ и $\varphi(t) \asymp t^{\gamma}$, $0 < \gamma < 2$, частичными суммами ряда Фурье по системе рациональных дробей Чебышева–Маркова справедливо асимптотическое выражение

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{\ln n}\right)^{\gamma} \varepsilon_{2n} = \left(\frac{A\gamma}{2}\right)^{\gamma} \Gamma(\gamma).$$

Аналогичная оценка содержится в [9] при условии двух геометрически различных полюсов у аппроксимирующей функции. Однако она получена при исследовании приближений функций Маркова частичными суммами рядов Фурье по системе рациональных функций, введенных Джрбашяном и Китбаляном [11], [12], которая является отличной от рассматриваемой нами.

4. Аппроксимация степенной функции. Многие элементарные функции можно представить в виде комбинаций функций Маркова. В данном пункте рассмотрим пример такой функции и в качестве следствия теоремы 4 найдем точную константу и порядок ее приближений частичными суммами рядов Фурье по системе рациональных дробей Чебышева–Маркова.

Рассмотрим функцию $f(z) = z^{\gamma}$, $\gamma \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$. Она является голоморфной в области $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Стандартное применение интегральной формулы Коши приводит к соотношению

$$z^{\gamma} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\xi^{\gamma}}{\xi - z}\, d\xi, \qquad z \in D,$$

где D – круг радиуса $d > 1$ с центром в начале координат и разрезом по отрезку $[0, d]$. Из последней формулы легко получить (см. [3], [13]), что при $|z| < d$, $z \overline{\in} (0, d)$, справедливо равенство

$$\cos \frac{\pi\gamma}{2}\, z^{\gamma} = \widehat{\mu}_1(z) + g(z),$$

где

$$\widehat{\mu}_1(z) = -\frac{\sin \pi\gamma}{\pi} \int_0^d \frac{t^{\gamma+1}}{t^2 + z^2}\, dt, \qquad g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=d} \frac{\xi^{\gamma+1}}{\xi^2 + z^2}\, d\xi.$$

Функция $\widehat{\mu}_1(x)$, $x \in [-1, 1]$ есть функция, которая удовлетворяет условию теоремы 4. Поэтому

$$\varepsilon_{2n}(\widehat{\mu}_1(x)) \sim \frac{\sin \pi\gamma}{\pi} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\gamma} \Gamma(\gamma) \left(\frac{\ln n}{n^2}\right)^{\gamma}, \qquad 0 < \gamma < 2, \quad n \to \infty.$$

Функция $g(x)$, $x \in [-1,1]$, аналитическая на отрезке $[-1,1]$. Согласно хорошо известному результату Бернштейна [14], порядок полиномиальной аппроксимации аналитических функций является экспоненциальным, т.е. существуют константы $M > 0$, $0 < C < 1$ такие, что

$$\varepsilon_{2n}(g(x), [-1,1]) \leqslant MC^n.$$

Таким образом, функция $g(x)$, $x \in [-1,1]$, не влияет на порядок приближения функции $|x|^\gamma$, $x \in [-1,1]$. Другими словами,

$$\varepsilon_{2n}\biggl(\cos\frac{\pi\gamma}{2}|x|^\gamma\biggr) = \varepsilon_{2n}(\widehat{\mu}_1(x)) + o(\varepsilon_{2n}(\widehat{\mu}_1(x))), \qquad n \to \infty.$$

Следовательно, справедливо

Следствие 2 (Аппроксимация функции $|x|^\gamma$, $0 < \gamma < 2$). *Для любого фиксированного* γ, $0 < \gamma < 2$, *и четного* n *справедливо соотношение*

$$\limsup_{n\to\infty}\biggl(\frac{n^2}{\ln n}\biggr)^\gamma \varepsilon_{2n}(|x|^\gamma, [-1,1]) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\gamma}{2}\biggl(\frac{\gamma}{2}\biggr)^\gamma \Gamma(\gamma).$$

В частности, при $\gamma = 1$ находим

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{n^2}{\ln n}\,\varepsilon_{2n}(|x|, [-1,1]) = \frac{1}{\pi}\,.$$

Данная асимптотическая оценка получена ранее в [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. А. Гончар, “О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций”, *Матем. сб.*, **105 (147)**:2 (1978), 147–163.

[2] J.-E. Andersson, “Best rational approximation to Markov functions”, *J. Approx. Theory*, **76**:2 (1994), 219–232.

[3] А. А. Пекарский, “Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова”, *Алгебра и анализ*, **7**:2 (1995), 121–132.

[4] D. Braess, “Rational approximation of Stieltjes functions by the Caratheodory–Fejér method”, *Constr. Approx.*, **3**:1 (1987), 43–50.

[5] L. Baratchart, H. Stahl, F. Wielonsky, “Asymptotic error estimates for L^2 best rational approximants to Markov functions”, *J. Approx. Theory*, **108**:1 (2001), 53–96.

[6] V. A. Prokhorov, “On rational approximation of Markov functions on finite sets”, *J. Approx. Theory*, **191** (2015), 94–117.

[7] Н. С. Вячеславов, Е. П. Мочалина, “Рациональные приближения функций типа Маркова–Стилтьеса в пространствах Харди H^p, $0 < p \leqslant \infty$”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1. *Матем., мех.*, 2008, № 4, 3–13.

[8] А. А. Пекарский, Е. А. Ровба, “Равномерные приближения функций Стилтьеса посредством ортопроекции на множество рациональных функций”, *Матем. заметки*, **65**:3 (1999), 362–368.

[9] Y. A. Rouba, E. G. Mikulich, “Constants in rational approximation of Markov–Stieltjes functions with fixed number of poles”, *Vesn. of Y. Kupala State Univ. Grodno. Ser.* 2. *Math. Phys. Inform., Comp. Tech. and its Control*, 2013, № 1 (148), 12–20.

[10] Y. Rouba, P. Patseika, K. Smatrytski, “On a system of rational Chebyshev–Markov fractions”, *Anal. Math.*, **44**:1 (2018), 115–140.

[11] М. М. Джрбашян, "К теории рядов Фурье по рациональным функциям", *Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-матем. естест. техн. науки*, **9**:7 (1956), 3–28.

[12] М. М. Джрбашян, А. А. Китбалян, "Об одном обобщении полиномов Чебышева", *Докл. АН Арм. ССР*, **38**:5 (1964), 263–270.

[13] J.-E. Andersson, "Rational approximation to functions like x^α in integral norms", *Anal. Math.*, **14**:1 (1988), 11–25.

[14] S. N. Bernstein, "Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation des fonctions analytiques admettant des singularités données", *Belg. Bull. Sci.*, 1913, 76–90.

[15] М. А. Евграфов, *Асимптотические оценки и целые функции*, Наука, М., 1979.

[16] М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, М., 1987.

[17] E. T. Copson, *Asymptotic Expansions*, Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys., **55**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1965.

Е. А. Ровба
Гродненский государственный университет
им. Я. Купалы, Республика Беларусь
E-mail: rovba.ea@gmail.com

П. Г. Поцейко
Гродненский государственный университет
им. Я. Купалы, Республика Беларусь
E-mail: pahamatby@gmail.com

Поступило
11.06.2019
После доработки
24.04.2020
Принято к публикации
14.05.2020