Ю. А. Фарков, М. Г. Робакидзе, Фреймы Парсеваля и дискретное преобразование Уолша, *Матем. заметки*, 2019, том 106, выпуск 3, 457–469

DOI: 10.4213/mzm12204

Математические заметки

Том 106 выпуск 3 сентябрь 2019

УДК 517.518

Фреймы Парсеваля и дискретное преобразование Уолша

Ю. А. Фарков, М. Г. Робакидзе

Пусть $N = 2^n$ и $N_1 = 2^{n-1}$, где n – натуральное число. Обозначим через $\mathbb{C}_N$ пространство комплексных N-периодических последовательностей со стандартным скалярным произведением. Для любого N-мерного комплексного ненулевого вектора $(b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$, удовлетворяющего условию

$$|b_l|^2 + |b_{l+N_1}|^2 \leqslant \frac{2}{N^2}, \qquad l = 0, 1, \dots, N_1 - 1,$$

найдены последовательности $u_0, u_1, \dots, u_r \in \mathbb{C}_N$ такие, что система их двоичных сдвигов является фреймом Парсеваля для $\mathbb{C}_N$. При этом вектор $(b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$ задает дискретное преобразование Уолша последовательности u_0, а выбор этого вектора позволяет адаптировать предлагаемую конструкцию к обрабатываемому сигналу по энтропийному, среднеквадратичному или иному критерию.

Библиография: 27 названий.

Ключевые слова: функции Уолша, дискретные преобразования, всплески, фреймы, периодические последовательности.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12204

1. Введение. Элементы теории фреймов и ее приложений изложены в монографиях [1]–[5] (см. также недавние статьи в [6]). Для собственных подпространств дискретного преобразования Уолша фреймы Парсеваля определены в [7]. Основная цель настоящей заметки – построить с помощью дискретного преобразования Уолша дискретные аналоги всплесковых фреймов, определенных для группы Кантора в работе [8]. В дополнение к конструкциям фреймов в [7] и [8] предложен алгоритмический метод построения фреймов Парсеваля для пространства $\mathbb{C}_N$, состоящих из двоичных сдвигов подходящим образом выбранных элементов этого пространства. Подобная задача для ортогональных и биортогональных всплесков решена в статье [9], в которой найдены дискретные аналоги всплесковых конструкций из работ [10]–[12] и продемонстрирована эффективность дискретных всплесков для обработки изображений (сравните с [13]–[16]). Фреймы Парсеваля из [8] использовались в [17] для оценок снизу констант неопределенности на группе Кантора. Специфика конечномерного случая проявляется не только в упрощении доказательств, но и в большей свободе выбора значений параметров, что существенно для приложений. Приведенный ниже алгоритм A обобщает конструкцию ортогональных всплесков из [9]. Некоторые другие обобщения результатов статьи [9] даны в [18], [19]. Формулировка доказанной ниже теоремы 1 приводилась в докладе авторов [20] на 19-й международной Саратовской зимней школе, посвященной 90-летию со дня рождения академика П. Л. Ульянова.

Пусть $N = 2^n$, где n – натуральное число. Множество

$$\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$$

является абелевой группой с операцией $\oplus$ покоординатного сложения по модулю 2:

$$a \oplus b := \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu - b_\nu| 2^\nu, \qquad a, b \in \mathbb{Z}_N,$$

где числа a_ν, b_ν берутся из двоичных разложений

$$a = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu 2^\nu, \quad b = \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu 2^\nu, \qquad a_\nu, b_\nu \in \{0, 1\}.$$

Пространство $\mathbb{C}_N$ состоит из комплексных последовательностей

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots),$$

таких, что $x(j+N) = x(j)$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. В силу периодичности произвольная последовательность x из $\mathbb{C}_N$ может быть задана вектором

$$(x(0), x(1), \dots, x(N-1))$$

и часто отождествляется с этим вектором. Линейные операции в пространстве $\mathbb{C}_N$ определяются покомпонентно, а скалярное произведение и норма вводятся по формулам

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\overline{y(j)}, \qquad \|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

Для любых $k, j \in \mathbb{Z}_N$ положим

$$\{k, j\}_2 := \sum_{\nu=0}^{n-1} k_{n-\nu-1} j_\nu,$$

где

$$k = \sum_{\nu=0}^{n-1} k_\nu 2^\nu, \quad j = \sum_{\nu=0}^{n-1} j_\nu 2^\nu, \qquad k_\nu, j_\nu \in \{0, 1\}.$$

Функции Уолша для пространства $\mathbb{C}_N$ обозначаются

$$w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \dots, w_{N-1}^{(N)}$$

и определяются по формулам

$$w_k^{(N)}(j) = (-1)^{\{k,j\}_2}, \quad w_k^{(N)}(l) = w_k^{(N)}(l+N), \qquad k, j \in \mathbb{Z}_N, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Из определения следует, что

$$w_0^{(2)}(0) = w_1^{(2)}(0) = w_0^{(2)}(1) = 1, \qquad w_1^{(2)}(1) = -1.$$

Для $\nu = 0, 1, \ldots, n$ положим $N_\nu = N/2^\nu$. Согласно [21; с. 23] для всех $k, l \in \mathbb{Z}_{N_1}$ имеем

$$w_{2k}^{(N)}(l) = w_{2k+1}^{(N)}(l) = w_{2k}^{(N)}(N_1 + l) = -w_{2k+1}^{(N)}(N_1 + l) = w_k^{(N_1)}(l). \tag{1.1}$$

Кроме того,

$$\sum_{k=0}^{N-1} w_k^{(N)}(j) = \begin{cases} N, & \text{если } j \text{ делится на } N, \\ 0, & \text{если } j \text{ не делится на } N. \end{cases} \tag{1.2}$$

Функции $w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \ldots, w_{N-1}^{(N)}$ образуют ортогональный базис в $\mathbb{C}_N$, причем

$$\|w_k^{(N)}\|^2 = N \qquad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{Z}_N.$$

Дискретное преобразование Уолша сопоставляет произвольному вектору x из $\mathbb{C}_N$ последовательность $\widehat{x}$ коэффициентов Фурье вектора x по системе $w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \ldots, w_{N-1}^{(N)}$:

$$\widehat{x}(k) := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(j) w_k^{(N)}(j), \qquad k \in \mathbb{Z}_N.$$

С помощью этих коэффициентов разложение вектора x по базису Уолша записывается в виде

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}(k) w_k^{(N)}(j), \qquad j \in \mathbb{Z}_N.$$

Определение 1. Векторы $f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}$ образуют *фрейм Парсеваля* для $\mathbb{C}_N$, если для каждого $x \in \mathbb{C}_N$ выполнено равенство

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{m-1} |\langle x, f_k \rangle|^2.$$

Следующие два предложения хорошо известны (см., например, [2]).

Предложение 1. *Система $\{f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}\}$ является фреймом Парсеваля для пространства $\mathbb{C}_N$ в том и только в том случае, когда для каждого $x \in \mathbb{C}_N$ выполнено равенство*

$$x = \sum_{k=0}^{m-1} \langle x, f_k \rangle f_k.$$

Легко видеть, что в случае $m > N$ фрейм Парсеваля $\{f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}\}$ является линейно зависимой системой, а при $m = N$ этот фрейм оказывается ортонормированным базисом в $\mathbb{C}_N$.

Предложение 2. *Пусть Λ – матрица размера $m \times N$, строками которой являются векторы $f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}$ пространства $\mathbb{C}_N$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) $\Lambda^* \Lambda = I$, *где I – единичная матрица порядка N*,

(ii) *столбцы матрицы* Λ *образуют ортонормированную систему в* $\mathbb{C}_m$,
(iii) *векторы* $f_0, f_1, \dots, f_{m-1}$ *образуют фрейм Парсеваля для* $\mathbb{C}_N$.

По определению функций Уолша матрица $W^{(N)} := (w_l^{(N)}(j))_{l,j=0}^{N-1}$ симметрична и удовлетворяет соотношениям ортогональности

$$\sum_{j=0}^{N-1} w_l^{(N)}(j) w_k^{(N)}(j) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i^{(N)}(l) w_i^{(N)}(k) = N\delta_{l,k}, \qquad l,k \in \mathbb{Z}_N, \tag{1.3}$$

где $\delta_{l,k}$ – символ Кронекера. Из ортогональной матрицы $(2N)^{-1/2}W^{(2N)}$ с помощью предложения 2 для каждого $m \in \{N+1, \dots, 2N\}$ можно получать фреймы Парсеваля для $\mathbb{C}_N$ из m векторов (сравните с [7; § 6] и [22]). В настоящей работе для любого N-мерного комплексного ненулевого вектора $(b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$, удовлетворяющего условию

$$|b_l|^2 + |b_{l+N_1}|^2 \leqslant \frac{2}{N^2}, \qquad l = 0, 1, \dots, N_1 - 1,$$

найдены (см. ниже Алгоритм A) последовательности $u_0, u_1, \dots, u_r \in \mathbb{C}_N$ такие, что система их двоичных сдвигов является фреймом Парсеваля для $\mathbb{C}_N$. При этом вектор $(b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$ задает дискретное преобразование Уолша последовательности u_0, а выбор этого вектора по аналогии с ортогональным случаем [9], [16] позволяет адаптировать предлагаемую конструкцию к обрабатываемому сигналу по энтроптйному, среднеквадратичному или иному критерию.

2. Построение фреймов в $\mathbb{C}_N$ с помощью дискретного преобразования Уолша. Для каждого $k \in \mathbb{Z}_N$ оператор двоичного сдвига $T_k \colon \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_N$ определяется по формуле

$$(T_k x)(j) := x(j \oplus k), \qquad x \in \mathbb{C}_N, \quad j \in \mathbb{Z}_N.$$

Из определений следует, что для любых $x, y \in \mathbb{C}_N$, $k, l \in \mathbb{Z}_N$, имеют место равенства

$$\langle x, y\rangle = N\langle \widehat{x}, \widehat{y}\rangle, \qquad \widehat{(T_k x)}(l) = w_k^{(N)}(l)\widehat{x}(l), \qquad \langle T_k x, T_l y\rangle = \langle x, T_{l\oplus k} y\rangle. \tag{2.1}$$

Приведенный ниже алгоритм построения фреймов Парсеваля базируется на следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть векторы* $u_0, u_1, \dots, u_r \in \mathbb{C}_N$ *таковы, что для матрицы*

$$M(l) := \frac{N}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \widehat{u}_0(l) & \widehat{u}_1(l) & \dots & \widehat{u}_r(l) \\ \widehat{u}_0(l+N_1) & \widehat{u}_1(l+N_1) & \dots & \widehat{u}_r(l+N_1) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

при каждом $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ *выполнено равенство*

$$M(l)M^*(l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Тогда система

$$B(u_0, u_1, \dots, u_r) = \{T_{2k} u_0\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \{T_{2k} u_1\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \dots \cup \{T_{2k} u_r\}_{k=0}^{N_1-1}$$

является фреймом Парсеваля для $\mathbb{C}_N$.

Доказательство. Согласно (2.2) и (2.3) имеем

$$\sum_{s=0}^{r} \widehat{u}_s(l)\overline{\widehat{u}_s(l+N_1)} = 0, \tag{2.4}$$

$$\sum_{s=0}^{r} |\widehat{u}_s(l)|^2 = \sum_{s=0}^{r} |\widehat{u}_s(l+N_1)|^2 = \frac{2}{N^2}\,. \tag{2.5}$$

Ввиду первого равенства в (2.1) достаточно доказать, что для любого $x \in \mathbb{C}_N$ справедлива формула

$$\|\widehat{x}\|^2 = N\sum_{s=0}^{r}\sum_{k=0}^{N_1-1} |\langle \widehat{x}, \widehat{T_{2k}u_s}\rangle|^2. \tag{2.6}$$

Применяя (1.1) и (2.1), получаем

$$\begin{aligned}
|\langle \widehat{x}, \widehat{T_{2k}u_s}\rangle|^2 &= |\langle \widehat{x}, w_{2k}^{(N)}\widehat{u_s}\rangle|^2 = \left|\sum_{l=0}^{N-1} \widehat{x}(l) w_k^{(N_1)}(l)\overline{\widehat{u_s}(l)}\right|^2 \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} |\widehat{x}(l)|^2|\widehat{u_s}(l)|^2 + 2\,\mathrm{Re}(A_k^{(N)}(\widehat{x}, \widehat{u_s})),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A_k^{(N)}(\widehat{x}, \widehat{u_s}) := \widehat{x}(0)\overline{\widehat{u_s}(0)} \sum_{l'=1}^{N-1} w_k^{(N_1)}(l')\overline{\widehat{x}(l')}\widehat{u}_s(l') + \widehat{x}(1)\overline{\widehat{u_s}(1)} \sum_{l'=2}^{N-1} w_k^{(N_1)}(l'\oplus 1)\overline{\widehat{x}(l')}\widehat{u}_s(l') \\
+ \widehat{x}(2)\overline{\widehat{u_s}(2)} \sum_{l'=3}^{N-1} w_k^{(N_1)}(l'\oplus 2)\overline{\widehat{x}(l')}\widehat{u}_s(l') + \cdots \\
+ \widehat{x}(N-3)\overline{\widehat{u_s}(N-3)}(w_k^{(N_1)}(3)\overline{\widehat{x}(N-2)}\widehat{u}_s(N-2) \\
+ w_k^{(N_1)}(2)\overline{\widehat{x}(N-1)}\widehat{u}_s(N-1)) \\
+ \widehat{x}(N-2)\overline{\widehat{u_s}(N-2)} w_k^{(N_1)}(1)\overline{\widehat{x}(N-1)}\widehat{u}_s(N-1).
\end{aligned}$$

Отсюда в силу (2.5) следует, что

$$\sum_{s=0}^{r}\sum_{k=0}^{N_1-1} |\langle \widehat{x}, \widehat{T_{2k}u_s}\rangle|^2 = \frac{2N_1}{N^2}\sum_{l=0}^{N-1}|\widehat{x}(l)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\biggl(\sum_{s=0}^{r}\sum_{k=0}^{N_1-1} A_k^{(N)}(\widehat{x}, \widehat{u_s})\biggr). \tag{2.7}$$

Согласно (1.2) имеем

$$\sum_{k=0}^{N_1-1} w_k^{(N_1)}(l) = \begin{cases} N_1, & \text{если } l \text{ делится на } N_1, \\ 0, & \text{если } l \text{ не делится на } N_1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N_1}\sum_{k=0}^{N_1-1} A_k^{(N)}(\widehat{x}, \widehat{u_s}) = \widehat{x}(0)\overline{\widehat{u_s}(0)}\,\overline{\widehat{x}(N_1)}\widehat{u}_s(N_1) + \widehat{x}(1)\overline{\widehat{u_s}(1)}\,\overline{\widehat{x}(N_1+1)}\widehat{u}_s(N_1+1) + \cdots \\
+ \widehat{x}(N_1-1)\overline{\widehat{u_s}(N_1-1)}\,\overline{\widehat{x}(N-1)}\widehat{u}_s(N-1).
\end{aligned}$$

Применяя (2.4), видим, что

$$\sum_{s=0}^{r}\sum_{k=0}^{N_1-1} A_k^{(N)}(\widehat{x},\widehat{u_s})=0.$$

Таким образом, последнее выражение в (2.7) равно нулю. Поскольку $2N_1=N$ и $\sum_{l=0}^{N-1}|\widehat{x}(l)|^2=\|\widehat{x}\|^2$, верна формула (2.6). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. При условии (2.3) матрицу (2.2) можно дополнить до унитарной матрицы порядка $r+1$. Поэтому из (2.2) и (2.3) следуют неравенства

$$|\widehat{u}_s(l)|^2+|\widehat{u}_s(l+N_1)|^2\leqslant\frac{2}{N^2}\qquad\text{для}\quad s=0,1,\dots,r,\quad l=0,1,\dots,N_1-1. \tag{2.8}$$

Замечание 2. Для случая, когда все неравенства в условии

$$|\widehat{u}_0(l)|^2+|\widehat{u}_0(l+N_1)|^2\leqslant\frac{2}{N^2}\,,\qquad l=0,1,\dots,N_1-1, \tag{2.9}$$

обращаются в равенства, теорема 1 при $r=1$ доказана в [9] и приводит к ортонормированному базису в $\mathbb{C}_N$.

Пример 1. Пусть $N=r=2$. Тогда

$$M(l)=\sqrt{2}\begin{pmatrix}\widehat{u}_0(l) & \widehat{u}_1(l) & \widehat{u}_2(l)\\ \widehat{u}_0(l+1) & \widehat{u}_1(l+1) & \widehat{u}_2(l+1)\end{pmatrix},\qquad l=0.$$

Для выполнения условия (2.3) положим

$$\widehat{u}_i(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}\,x_i,\quad \widehat{u}_i(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}\,y_i,\qquad i=0,1,2,$$

где векторы (x_0,x_1,x_2), (y_0,y_1,y_2) ортогональны и имеют единичные длины:

$$x_0\overline{y}_0+x_1\overline{y}_1+x_2\overline{y}_2=0,$$
$$|x_0|^2+|x_1|^2+|x_2|^2=1,\qquad |y_0|^2+|y_1|^2+|y_2|^2=1.$$

В частности, если $x_0=a$, $y_0=b$, $|a|^2+|b|^2\leqslant 1$, то можно принять

$$x_1=0,\qquad\qquad x_2=\sqrt{1-|a|^2}\,,$$
$$y_2=-\frac{a\overline{b}}{\sqrt{1-|a|^2}}\,,\qquad y_1=\sqrt{1-|b|^2-|y_2|^2}\,.$$

В результате для каждой пары комплексных чисел (a,b), удовлетворяющей условию $0<|a|^2+|b|^2\leqslant 1$, получаем фрейм Парсеваля $\{u_0,u_1,u_2\}$ для $\mathbb{C}_2$ (сравните с примером 2 в [18]).

Пример 2. Пусть $N=4$, $r=2$. В пространстве $\mathbb{C}_4$ выберем векторы u_0, u_1, u_2 такие, что

$$\sum_{s=0}^{2}\widehat{u}_s(l)\overline{\widehat{u}_s(l+2)}=0,\quad \sum_{s=0}^{2}|\widehat{u}_s(l)|^2=\sum_{s=0}^{2}|\widehat{u}_s(l+2)|^2=\frac{1}{8}\,,\qquad l=0,1.$$

Тогда для матриц

$$M(l)=\frac{4}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\widehat{u}_0(l) & \widehat{u}_1(l) & \widehat{u}_2(l)\\ \widehat{u}_0(l+2) & \widehat{u}_1(l+2) & \widehat{u}_2(l+2)\end{pmatrix}, \qquad l=0,1,$$

выполнено условие (2.3) и система

$$\{u_0,u_1,u_2,T_2u_0,T_2u_1,T_2u_2\}$$

является фреймом Парсеваля для $\mathbb{C}_4$.

Пример 3. В случае $N=4$, $r=3$ имеем

$$M(l)=\frac{4}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\widehat{u}_0(l) & \widehat{u}_1(l) & \widehat{u}_2(l) & \widehat{u}_3(l)\\ \widehat{u}_0(l+2) & \widehat{u}_1(l+2) & \widehat{u}_2(l+2) & \widehat{u}_3(l+2)\end{pmatrix}, \qquad l=0,1.$$

Заметим, что в силу соотношений (1.3) для выполнения условия (2.3) матрицы $M(0)$ и $M(1)$ можно выбрать так, чтобы матрица $(\widehat{u}_j(l))_{l,j=0}^3$ была пропорциональной матрице $(w_j^{(4)}(l))_{l,j=0}^3$. Тогда система

$$\{u_0,u_1,u_2,u_3,T_2u_0,T_2u_1,T_2u_2,T_2u_3\}$$

будет фреймом Парсеваля для $\mathbb{C}_4$. Отметим, что пример 3 легко распространить на случай $r=N-1$ для произвольного N.

Пусть N-мерный комплексный ненулевой вектор $(b_0,b_1,\dots,b_{N-1})$ удовлетворяет условию

$$|b_l|^2+|b_{l+N_1}|^2\leqslant\frac{2}{N^2}, \qquad l=0,1,\dots,N_1-1. \tag{2.10}$$

Из теоремы 1 получается следующий алгоритм построения фрейма Парсеваля $B(u_0, u_1,\dots,u_r)$ для $\mathbb{C}_N$.

Алгоритм A. *Шаг* 1. Найти вектор $u_0\in\mathbb{C}_N$ такой, что $\widehat{u}_0(l)=b_l$, $\widehat{u}_0(l+N_1)=b_{l+N_1}$ для $l=0,1,\dots,N_1-1$, где числа $b_0,b_1,\dots,b_{N-1}$ берутся из (2.10).

Шаг 2. Для полученного на шаге 1 вектора u_0 найти векторы $u_1,\dots,u_r\in\mathbb{C}_N$ такие, что для матрицы

$$M(l):=\frac{N}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\widehat{u}_0(l) & \widehat{u}_1(l) & \dots & \widehat{u}_r(l)\\ \widehat{u}_0(l+N_1) & \widehat{u}_1(l+N_1) & \dots & \widehat{u}_r(l+N_1)\end{pmatrix}$$

при каждом $l=0,1,\dots,N_1-1$ выполнено равенство

$$M(l)M^*(l)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Шаг 3. Определить систему $B(u_0,u_1,\dots,u_r)$ по формуле

$$B(u_0,u_1,\dots,u_r)=\{T_{2\,k}u_0\}_{k=0}^{N_1-1}\cup\{T_{2\,k}u_1\}_{k=0}^{N_1-1}\cup\dots\cup\{T_{2\,k}u_r\}_{k=0}^{N_1-1}.$$

Замечание 3. Применение дискретного преобразования Уолша на шаге 1 приводит к вектору u_0, удовлетворяющему в силу (2.10) условию (2.9), что позволяет перейти к шагу 2. Шаг 1 реализуется с помощью быстрых алгоритмов для дискретного преобразования Уолша, а для реализации шага 2 можно использовать те же методы, что и при построении фреймов на группах Виленкина (см. алгоритмы в [7], [21], [23]–[25]).

В следующем определении по аналогии с последовательностями ортогональных всплесков m-го этапа (см. [9], [13]) вводится последовательность диадических фреймов Парсеваля m-го этапа для $\mathbb{C}_N$.

Определение 2. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$. *Последовательностью диадических фреймов Парсеваля m-го этапа* называется последовательность векторов

$$u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_r^{(1)}, \quad u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, \dots, u_r^{(2)}, \quad \dots, \quad u_0^{(m)}, u_1^{(m)}, \dots, u_r^{(m)}$$

таких, что $u_0^{(\nu)}, u_1^{(\nu)}, \dots, u_r^{(\nu)} \in \mathbb{C}_{N_{\nu-1}}$, $\nu = 1, 2, \dots, m$, и для матриц

$$M_\nu(l) := \frac{N_{\nu-1}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \widehat{u}_0^{(\nu)}(l) & \widehat{u}_1^{(\nu)}(l) & \dots & \widehat{u}_r^{(\nu)}(l) \\ \widehat{u}_0^{(\nu)}(l+N_\nu) & \widehat{u}_1^{(\nu)}(l+N_\nu) & \dots & \widehat{u}_r^{(\nu)}(l+N_\nu) \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

при каждом $l = 0, 1, \dots, N_\nu - 1$ выполнено равенство

$$M_\nu(l) M_\nu^*(l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Согласно следующей теореме, если набор векторов $u_0, u_1, \dots, u_r$ выбран как в алгоритме A, то по нему можно определить последовательность диадических фреймов Парсеваля m-го этапа.

Теорема 2. *Пусть вектор $u_0 \in \mathbb{C}_N$ удовлетворяет условию (2.9) и для векторов $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{C}_N$ выполнено равенство (2.11). Положим*

$$u_0^{(1)} = u_0, \quad u_1^{(1)} = u_1, \quad \dots, \quad u_r^{(1)} = u_r$$

и для $\nu = 2, \dots, m$ определим векторы $u_0^{(\nu)}, u_1^{(\nu)}, \dots, u_r^{(\nu)}$ по формулам

$$u_s^{(\nu)}(j) = 2^{1-\nu} \sum_{k=0}^{2^{\nu-1}-1} u_s^{(1)}(j + kN_{\nu-1}), \qquad j \in \mathbb{Z}_{N_{\nu-1}}, \quad s = 0, 1, \dots, r.$$

Тогда последовательность

$$u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_r^{(1)}, \quad u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, \dots, u_r^{(2)}, \quad \dots, \quad u_0^{(m)}, u_1^{(m)}, \dots, u_r^{(m)}$$

является последовательностью диадических фреймов Парсеваля m-го этапа.

Доказательство. Для данных векторов определим матрицы $M_\nu(l)$ по формуле (2.12). По условию, при каждом $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ выполнено равенство

$$M_1(l) M_1^*(l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Далее, для $s = 0, 1, \dots, r$ и $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ имеем

$$\begin{aligned} \widehat{u}_s^{(2)}(l) &= \frac{1}{N_1} \sum_{j=0}^{N_1-1} u_s^{(2)}(j) w_l^{(N_1)}(j) = \frac{1}{2N_1} \sum_{j=0}^{N_1-1} [u_s^{(1)}(j) + u_s^{(1)}(j+N_1)] w_{2l}^{(2N_1)}(j) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_s^{(1)}(j) w_{2l}^{(N)}(j) = \widehat{u}_s^{(1)}(2l). \end{aligned}$$

Аналогично, для $s = 0, 1, \ldots, r$ получаем

$$\widehat{u}_s^{(3)}(l) = \widehat{u}_s^{(2)}(2l) = \widehat{u}_s^{(1)}(4l), \qquad l = 0, 1, \ldots, N_2 - 1,$$

и, вообще,

$$\widehat{u}_s^{(\nu)}(l) = \widehat{u}_s^{(1)}(2^{\nu-1}l), \qquad l = 0, 1, \ldots, N_{\nu-1} - 1.$$

Отсюда и из (2.14) следует, что при каждом $l = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$ выполнено равенство (2.13). Теорема 2 доказана.

Напомним, что двоичная свертка в пространстве $\mathbb{C}_N$ определяется по формуле

$$(x * y)(k) := \sum_{j=0}^{N-1} x(k \oplus j)y(j), \qquad x, y \in \mathbb{C}_N, \quad k \in \mathbb{Z}_N.$$

Отметим, что $\widehat{x * y} = N\widehat{x} \cdot \widehat{y}$ для всех $x, y \in \mathbb{C}_N$. Оператор $U\colon \mathbb{C}_{N_1} \to \mathbb{C}_N$, заданный равенством

$$(Uy)(j) := \begin{cases} y(j/2), & \text{если } j \text{ четное}, \\ 0, & \text{если } j \text{ нечетное}, \end{cases}$$

где $y \in \mathbb{C}_{N_1}$, называется *оператором разрежающей выборки.* Легко проверяется, что для любого $y \in \mathbb{C}_{N_1}$ имеет место равенство $\widehat{Uy}(l) = (1/2)\widehat{y}(l)$, $l \in \mathbb{Z}_N$, где в левой части преобразование Уолша берется в $\mathbb{C}_N$, а в правой части – в $\mathbb{C}_{N_1}$.

Следующий пример показывает, что с помощью операции двоичной свертки и оператора разрежающей выборки из последовательности диадических фреймов Парсеваля можно конструировать новые фреймы (сравните с примерами 1 и 2, а также с теоремой 2 в [9]).

Пример 4. Пусть имеем $m = n = 2$ и для векторов $u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, u_2^{(1)} \in \mathbb{C}_4$, $u_0^{(2)}, u_1^{(2)}$, $u_2^{(2)} \in \mathbb{C}_2$ выполнены равенства

$$\sum_{s=0}^{2} |\widehat{u}_s^{(1)}(l)|^2 = \sum_{s=0}^{2} |\widehat{u}_s^{(1)}(l+2)|^2 = \frac{1}{8}, \tag{2.15}$$

$$\sum_{s=0}^{2} |\widehat{u}_s^{(2)}(l)|^2 = \sum_{s=0}^{2} |\widehat{u}_s^{(2)}(l+1)|^2 = \frac{1}{2}, \tag{2.16}$$

$$\sum_{s=0}^{2} \widehat{u}_s^{(1)}(l)\overline{\widehat{u}_s^{(1)}(l+2)} = \sum_{s=0}^{2} \widehat{u}_s^{(2)}(l)\overline{\widehat{u}_s^{(2)}(l+1)} = 0 \tag{2.17}$$

(т.е. последовательность $u_0^{(1)}$, $u_1^{(1)}$, $u_2^{(1)}$, $u_0^{(2)}$, $u_1^{(2)}$, $u_2^{(2)}$ является последовательностью фреймов Парсеваля второго этапа). Положим

$$\begin{aligned} &\varphi^{(1)} = u_0^{(1)}, && \psi_1^{(1)} = u_1^{(1)}, && \psi_2^{(1)} = u_2^{(1)}, \\ &\varphi^{(2)} = \varphi^{(1)} * Uu_0^{(2)}, && \psi_1^{(2)} = \varphi^{(1)} * Uu_1^{(2)}, && \psi_2^{(2)} = \varphi^{(1)} * Uu_2^{(2)}. \end{aligned}$$

Покажем, что тогда система

$$\{T_2\psi_1^{(1)}, T_2\psi_2^{(1)}, \psi_1^{(1)}, \psi_2^{(1)}, \psi_1^{(2)}, \psi_2^{(2)}, \varphi^{(2)}\}$$

является фреймом Парсеваля для $\mathbb{C}_4$. Согласно первому равенству в (2.1) достаточно доказать, что для любого $x \in \mathbb{C}_4$

$$\frac{1}{4}\|\widehat{x}\|^2 = \sum_{s=1}^{2}(|\langle \widehat{x}, \widehat{T_2\psi_s^{(1)}}\rangle|^2 + |\langle \widehat{x}, \widehat{\psi}_s^{(1)}\rangle|^2 + |\langle \widehat{x}, \widehat{\psi}_s^{(2)}\rangle|^2) + |\langle \widehat{x}, \widehat{\varphi}^{(2)}\rangle|^2. \tag{2.18}$$

Поскольку $\widehat{T_2\psi_s^{(1)}}(l) = w_2^{(4)}(l)\widehat{u}_s^{(1)}(l)$, в (2.18) имеем

$$\begin{aligned}|\langle \widehat{x}, \widehat{T_2\psi_s^{(1)}}\rangle|^2 + |\langle \widehat{x}, \widehat{\psi}_s^{(1)}\rangle|^2 &= \left|\sum_{l=0}^{3}\widehat{x}(l)(-1)^l\overline{\widehat{u}_s^{(1)}(l)}\right|^2 + \left|\sum_{l=0}^{3}\widehat{x}(l)\overline{\widehat{u}_s^{(1)}(l)}\right|^2 \\ &= 2\sum_{l=0}^{3}|\widehat{x}(l)|^2|\widehat{u}_s^{(1)}(l)|^2 + 2\operatorname{Re}(A_s^{(0)} + A_s^{(1)}),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}A_s^{(0)} &:= \widehat{x}(0)\overline{\widehat{u}_s^{(1)}(0)}\sum_{l'=1}^{3}\overline{\widehat{x}(l')}\widehat{u}_s^{(1)}(l') \\ &\qquad + \widehat{x}(1)\overline{\widehat{u}_s^{(1)}(1)}\sum_{l'=2}^{3}\overline{\widehat{x}(l')}\widehat{u}_s^{(1)}(l') + \widehat{x}(2)\overline{\widehat{u}_s^{(1)}(2)}\overline{\widehat{x}(3)}\widehat{u}_s^{(3)}(3), \\ A_s^{(1)} &:= \widehat{x}(0)\overline{\widehat{u}_s^{(1)}(0)}\sum_{l'=1}^{3}(-1)^{l'}\overline{\widehat{x}(l')}\widehat{u}_s^{(1)}(l') \\ &\qquad + \widehat{x}(1)\overline{\widehat{u}_s^{(1)}(1)}\sum_{l'=2}^{3}(-1)^{l'+1}\overline{\widehat{x}(l')}\widehat{u}_s^{(1)}(l') - \widehat{x}(2)\overline{\widehat{u}_s^{(1)}(2)}\overline{\widehat{x}(3)}\widehat{u}_s^{(3)}(3).\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{2}(|\langle \widehat{x}, \widehat{T_2\psi_s^{(1)}}\rangle|^2 + |\langle \widehat{x}, \widehat{\psi}_s^{(1)}\rangle|^2) \\ &\quad = 2\sum_{l=0}^{3}|\widehat{x}(l)|^2(|\widehat{u}_1^{(1)}(l)|^2 + |\widehat{u}_2^{(1)}(l)|^2) \\ &\qquad + 4\operatorname{Re}\biggl(\sum_{s=1}^{2}\widehat{x}(0)\overline{\widehat{x}(2)}\overline{\widehat{u}_s^{(1)}(0)}\widehat{u}_s^{(1)}(2) + \widehat{x}(1)\overline{\widehat{x}(3)}\overline{\widehat{u}_s^{(1)}(1)}\widehat{u}_s^{(1)}(3)\biggr).\end{aligned} \tag{2.19}$$

Из определений следует, что

$$\widehat{\varphi}^{(2)}(l) = 2\widehat{u}_0^{(1)}(l)\widehat{u}_0^{(2)}(l), \qquad \widehat{\psi}_s^{(2)}(l) = 2\widehat{u}_0^{(1)}(l)\widehat{u}_s^{(2)}(l), \quad s = 1, 2.$$

Для $s' = 0, 1, 2$ положим

$$B_{s'} = \widehat{x}(0)\overline{\widehat{u}_0^{(1)}(0)}\,\overline{\widehat{u}_{s'}^{(2)}(0)}\sum_{l'=1}^{3}\overline{\widehat{x}(l')}\widehat{u}_0^{(1)}(l')\widehat{u}_{s'}^{(2)}(l')$$

$$
\begin{aligned}
&+ \widehat{x}(1)\overline{\widehat{u}_0^{(1)}(1)}\,\overline{\widehat{u}_{s'}^{(2)}(1)}\sum_{l'=2}^{3}\overline{\widehat{x}(l')}\widehat{u}_0^{(1)}(l')\widehat{u}_{s'}^{(2)}(l')\\
&+ \widehat{x}(2)\overline{\widehat{u}_0^{(1)}(2)}\,\overline{\widehat{u}_{s'}^{(2)}(2)}\,\overline{\widehat{x}(3)}\widehat{u}_0^{(1)}(3)\,\widehat{u}_{s'}^{(2)}(3).
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
|\langle\widehat{x},\widehat{\varphi}^{(2)}\rangle|^2 = 4\biggl|\sum_{l=0}^{3}\widehat{x}(l)\overline{\widehat{u}_0^{(1)}(l)}\,\overline{\widehat{u}_0^{(2)}(l)}\biggr|^2 = 4\sum_{l=0}^{3}|\widehat{x}(l)|^2|\widehat{u}_0^{(1)}(l)|^2|\widehat{u}_0^{(2)}(l)|^2 + 8\operatorname{Re}B_0,
$$

$$
|\langle\widehat{x},\widehat{\psi}_s^{(2)}\rangle|^2 = 4\biggl|\sum_{l=0}^{3}\widehat{x}(l)\overline{\widehat{u}_0^{(1)}(l)}\,\overline{\widehat{u}_s^{(2)}(l)}\biggr|^2 = 4\sum_{l=0}^{3}|\widehat{x}(l)|^2|\widehat{u}_0^{(1)}(l)|^2|\widehat{u}_s^{(2)}(l)|^2 + 8\operatorname{Re}B_s,
$$

где $s=1,2$. Учитывая 2-периодичность векторов $u_0^{(2)}$, $u_1^{(2)}$, $u_2^{(2)}$, имеем

$$
\begin{aligned}
&B_0+B_1+B_2\\
&\quad= \widehat{x}(0)\overline{\widehat{x}(1)}\,\overline{\widehat{u}_0^{(1)}(0)}\widehat{u}_0^{(1)}(1)\sum_{s=0}^{2}\overline{\widehat{u}_s^{(2)}(0)}\widehat{u}_s^{(2)}(1)\\
&\qquad+ \widehat{x}(0)\overline{\widehat{x}(2)}\,\overline{\widehat{u}_0^{(1)}(0)}\widehat{u}_0^{(1)}(2)\sum_{s=0}^{2}|\widehat{u}_s^{(2)}(0)|^2 + \widehat{x}(0)\overline{\widehat{x}(3)}\,\overline{\widehat{u}_0^{(1)}(0)}\widehat{u}_0^{(1)}(3)\sum_{s=0}^{2}\overline{\widehat{u}_s^{(2)}(0)}\widehat{u}_s^{(2)}(1)\\
&\qquad+ \widehat{x}(1)\overline{\widehat{x}(2)}\,\overline{\widehat{u}_0^{(1)}(1)}\widehat{u}_0^{(1)}(2)\sum_{s=0}^{2}\overline{\widehat{u}_s^{(2)}(1)}\widehat{u}_s^{(2)}(0) + \widehat{x}(1)\overline{\widehat{x}(3)}\,\overline{\widehat{u}_0^{(1)}(1)}\widehat{u}_0^{(1)}(3)\sum_{s=0}^{2}|\widehat{u}_s^{(2)}(1)|^2\\
&\qquad+ \widehat{x}(2)\overline{\widehat{x}(3)}\,\overline{\widehat{u}_0^{(1)}(2)}\widehat{u}_0^{(1)}(3)\sum_{s=0}^{2}\overline{\widehat{u}_s^{(2)}(0)}\widehat{u}_s^{(2)}(1).
\end{aligned}
$$

Отсюда в силу (2.16) и (2.17) получаем

$$
B_0+B_1+B_2 = \frac{1}{2}(\widehat{x}(0)\overline{\widehat{x}(2)}\,\overline{\widehat{u}_0^{(1)}(0)}\widehat{u}_0^{(1)}(2) + \widehat{x}(1)\overline{\widehat{x}(3)}\,\overline{\widehat{u}_0^{(1)}(1)}\widehat{u}_0^{(1)}(3)).
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{2}|\langle\widehat{x},\widehat{\psi}_s^{(2)}\rangle|^2 + |\langle\widehat{x},\widehat{\varphi}^{(2)}\rangle|^2\\
&\qquad= 2\sum_{l=0}^{3}|\widehat{x}(l)|^2|\widehat{u}_0^{(1)}(l)|^2 + 4\operatorname{Re}(\widehat{x}(0)\overline{\widehat{x}(2)}\,\overline{\widehat{u}_0^{(1)}(0)}\widehat{u}_0^{(1)}(2) + \widehat{x}(1)\overline{\widehat{x}(3)}\,\overline{\widehat{u}_0^{(1)}(1)}\widehat{u}_0^{(1)}(3)).
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Складывая (2.19) и (2.20), согласно (2.15) и (2.17) получаем (2.18).

Замечание 4. Доказанные выше теоремы и алгоритм A можно обобщить переходом от дискретного преобразования Уолша к дискретному преобразованию Виленкина–Крестенсона векторов размерности p^n (p – фиксированное целое число, $p \geqslant 2$), подобно тому как в [18] была обобщена конструкция ортогональных всплесков из [9]. Соответствующие параметрические множества для фреймов Парсеваля на группах Виленкина рассматривались в [24]–[27].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевск, 2001.

[2] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhäuser, Boston, 2016.

[3] С. Малла, *Вейвлеты в обработке сигналов*, Мир, М., 2005.

[4] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.

[5] A. Krivoshein, V. Protasov, M. Skopina, *Multivariate Wavelet Frames*, Springer, Singapore, 2016.

[6] Y. Kim Y, S. K. Narayan, G. Picioroaga, E. S. Weber (eds.), *Frames and Harmonic Analysis*, Contemp. Math., **451**, Providence, RI, 2018.

[7] М. С. Беспалов, “Собственные подпространства дискретного преобразования Уолша”, *Пробл. передачи информ.*, **46**:3 (2010), 60–79.

[8] Yu. A. Farkov, “Examples of frames on the Cantor dyadic group”, *J. Math. Sci.* (*N.Y.*), **187**:1 (2012), 22–34.

[9] Ю. А. Фарков, С. А. Строганов, “О дискретных диадических вейвлетах для обработки изображений”, *Изв. вузов. Матем.*, 2011, № 7, 57–66.

[10] W. C. Lang, “Wavelet analysis on the Cantor dyadic group”, *Houston J. Math.*, **24**:3 (1998), 533–544.

[11] Ю. А. Фарков, “Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 193–220.

[12] Yu. A. Farkov, A. Yu. Maksimov, S. A. Stroganov, “On biorthogonal wavelets related to the Walsh functions”, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, **9**:3 (2011), 485–499.

[13] М. Фрейзер, *Введение в вэйвлеты в свете линейной алгебры*, БИНОМ, Лаборатория знаний, М., 2008.

[14] S. A. Broughton, K. M. Bryan, *Discrete Fourier Analysis and Wavelets. Applications to Signal and Image Processing*, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2009.

[15] В. Н. Малоземов, С. М. Машарский, *Основы дискретного гармонического анализа*, Изд-во “Лань”, СПб., 2012.

[16] Е. А. Родионов, “О применении вейвлетов к цифровой обработке сигналов”, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **16**:2 (2016), 217–225.

[17] A. V. Krivoshein, E. A. Lebedeva, “Uncertainty principle for the Cantor dyadic group”, *J. Math. Anal. Appl.*, **423**:2 (2015), 1231–1242.

[18] Ю. А. Фарков, “Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина–Крестенсона”, *Матем. заметки*, **89**:6 (2011), 914–928.

[19] Yu. A. Farkov, E. A. Rodionov, “On biorthogonal discrete wavelet bases”, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, **13**:1 (2015), 1550002.

[20] Ю. А. Фарков, М. Г. Робакидзе, “Применение функций Уолша к построению фреймов Парсеваля в пространствах периодических последовательностей”, *Современные проблемы теории функций и их приложения*, Материалы 19-й международной Саратовской зимней школы, посвященной 90-летию со дня рождения академика П. Л. Ульянова, Научная книга, Саратов, 2018, 265–267.

[21] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Изд-во ЛКИ, М., 2008.

[22] P. G. Casazza, J. Kovačević, “Equal-norm tight frames with erasures”, *Adv. Comput. Math.*, **18**:2-4 (2003), 387–430.

[23] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Adam Hilger, Bristol, 1990.

[24] Yu. Farkov, E. Lebedeva, M. Skopina, “Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties”, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, **13**:5 (2015), 1550036.

[25] Yu. A. Farkov, “Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis”, *Poincare J. Anal. Appl.*, 2015, № 2, 13–36.

[26] Ю. А. Фарков, “Ортогональные всплески в анализе Уолша”, *Обобщенные интегралы и гармонический анализ*, Современные проблемы математики и механики, **11**, № 1, Изд-во Моск. ун-та, М., 2016, 62–75.

[27] Ю. А. Фарков, “Параметрические множества для фреймов в анализе Уолша”, *Вестн. Евразийского нац. ун-та им. Л. Н. Гумилева. Сер. Матем. Информ. Мех.*, **124**:3 (2018), 114–119.

Ю. А. Фарков
Российская академия народного хозяйства
и государственной службы
при Президенте Российской Федерации, г. Москва
E-mail: farkov-ya@ranepa.ru

М. Г. Робакидзе
Российская академия народного хозяйства
и государственной службы
при Президенте Российской Федерации, г. Москва
E-mail: irubak@gmail.com

Поступило
01.10.2018
После доработки
10.12.2018
Принято к публикации
16.01.2019