М. О. Корпусов, А. А. Панин, О непродолжаемом решении и разрушении решения одномерного уравнения ионно-звуковых волн в плазме, *Матем. заметки*, 2017, том 102, выпуск 3, 383–395

DOI: 10.4213/mzm11377

Математические заметки

Том 102 выпуск 3 сентябрь 2017

УДК 517.957

О непродолжаемом решении и разрушении решения одномерного уравнения ионно-звуковых волн в плазме

М. О. Корпусов, А. А. Панин

Рассмотрена начально-краевая задача для уравнения ионно-звуковых волн в плазме. Доказана теорема о непродолжаемом решении. Методом пробных функций получены достаточные условия разрушения решения за конечное время и оценка сверху на время разрушения.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: разрушение решения, нелинейная начально-краевая задача, уравнения соболевского типа, экспоненциальная нелинейность.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11377

1. Введение

Работа посвящена исследованию нелинейного уравнения соболевского типа с экспоненциальной нелинейностью

$$(u_{xx} - e^{\varepsilon u})_{tt} + u_{xx} = (|u_x|^2)_t, \qquad x \in (0, l), \quad t > 0.$$

Подобные уравнения возникают во многих задачах математической физики, в частности, в теории ионно-звуковых волн в плазме [1]–[3]. Однако обычно рассматривается линеаризованный вариант этого уравнения. Мотивация к исследованию полного уравнения состоит в том, что после линеаризации распределения Больцмана

$$\exp(\varepsilon u), \qquad \varepsilon > 0,$$

по малому параметру $\varepsilon > 0$ уравнение может не учитывать такие существенно нелинейные эффекты, как разрушение решения за конечное время. С другой стороны, наличие нелинейного оператора

$$u_{xx} - \exp(\varepsilon u)$$

под знаком второй производной по времени в полном уравнении достаточно сложно как для аналитического, так и для численного исследования.

В работе доказана теорема о непродолжаемом решении начально-краевой задачи Дирихле. Кроме того, установлены достаточные условия разрушения решения рассмотренной начально-краевой задачи за конечное время. Для этого был исполь-

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-03524) (второй автор).

зован метод нелинейной емкости (пробных функций) Похожаева и Митидиери [4]. Отметим также другие методы исследования режимов с обострением: энергетический метод Левина и его модификации [5]–[8] и метод автомодельных режимов, основанный на различных признаках сравнения и развитый в работах Самарского, Галактионова, Курдюмова и Михайлова [9] (см. также [10]).

Эта статья является продолжением цикла статей авторов, начатого работами [11], [12] и посвященного нестационарным нелинейным уравнениям с некоэрцитивными нелинейностями. Сложность таких уравнений заключается в том, что к ним неприменимы никакие энергетические методы.

2. Постановка задачи

Мы рассматриваем начально-краевую задачу

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_{xx} - e^{\varepsilon u}) + u_{xx} = \frac{\partial}{\partial t}((u_x)^2), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x). \end{gathered} \tag{2.1}$$

Положительный параметр ε будем считать произвольным образом фиксированным на протяжении всей работы.

Будем искать решение этой задачи в виде функции класса

$$u(t) \equiv u(x)(t) \in C^2([0,T_1); H_0^1(0,l)), \qquad 0 < T_1 \leqslant +\infty,$$

удовлетворяющей условиям

$$u(0) = u_0(x), \qquad u'(0) = u_1(x)$$

(здесь и далее штрих обозначает производную по t; производная по x – и частная, и обыкновенная – будет обозначаться индексом). Соответственно, мы считаем, что

$$u_0(x), u_1(x) \in H_0^1(0,l).$$

Для задачи (2.1) нами будет доказана теорема о непродолжаемом решении и – при некоторых начальных данных $u_0(x)$, $u_1(x)$ – разрушении решения.

3. Теорема о непродолжаемом решении

3.1. Предварительные сведения. В данном разделе мы для удобства ссылок приведем необходимые нам факты и введем обозначения. Сразу отметим, что норму в пространстве $H_0^1(0,l)$ мы выбираем следующим образом:

$$\|w(x)\|_{H_0^1(0,l)} := \|w_x\|_{L^2(0,l)}. \tag{3.1}$$

Предложение 1. *Вложение $J_0\colon H_0^1(0,l) \to C[0,l]$ – ограниченный линейный оператор* [13]; *обозначим его норму через C_0.*

Предложение 2. *Вложение $J_1\colon C[0,l] \to H^{-1}(0,l)$ – ограниченный линейный оператор, причем $\|J_1\| \leqslant \sqrt{l}\, C_F$, где C_F – константа в неравенстве Фридрихса*

$$\|u\|_{L^2(0,l)} \leqslant C_F \|u\|_{H_0^1(0,l)}, \qquad u \in H_0^1(0,l).$$

Вложение J_1 понимается в следующем стандартном смысле:

$$\langle J_1 z, w\rangle = \int_0^l z(x)w(x)\,dx, \qquad z(x)\in C[0,l], \quad w(x)\in H_0^1(0,l). \tag{3.2}$$

Доказательство. Инъективность этого вложения очевидна из следующих соображений. Пусть функция $z(x)\in C[0,l]$ не равна нулю тождественно. Тогда найдется такой отрезок $[a,b]\subset(0,l)$, что $z(x)>0$ на $[a,b]$ (если функция $z(x)$ всюду неположительна, домножим ее на -1). Выберем теперь в качестве $w(x)\in H_0^1(0,l)$ функцию-"шапочку" с носителем $[a,b]$.

Непрерывность оператора J_1 и оценка его нормы вытекает из следующей цепочки, где $z(x)\in C[0,l]$ и $w(x)\in H_0^1(0,l)$ произвольны:

$$\left|\int_0^l z(x)w(x)\,dx\right| \leqslant \|z\|_{L^2(0,l)}\|w\|_{L^2(0,l)} \leqslant \sqrt{l}\,\|z\|_{C[0,l]}C_F\|w\|_{H_0^1(0,l)}.$$

Предложение 3. *Всякая функция $z(x)\in L^1(0,l)$ задает* (*аналогично* (3.2), *где вместо $z(x)\in C[0,l]$ будет $z(x)\in L^1(0,l)$*) *ограниченный линейный функционал из $H^{-1}(0,l)$, причем норма соответствующего линейного оператора* (*обозначим его J_2*) *не превосходит C_0.* (*Вопрос об инъективности такого отображения для нас не существен.*)

Доказательство. Имеем

$$\left|\int_0^l z(x)w(x)\,dx\right| \leqslant \int_0^l |z(x)w(x)|\,dx \leqslant \|z\|_{L^1(0,l)}\|J_0 w\|_{C[0,l]} \leqslant \|z\|_{L^1(0,l)}C_0\|w\|_{H_0^1(0,l)}.$$

Предложение 4. *Оператор $d^2/dx^2\colon H_0^1(0,l)\to H^{-1}(0,l)$ – ограниченный линейный оператор с нормой* 1.

(Непосредственно следует из определения оператора $d^2/dx^2\colon H_0^1(0,l)\to H^{-1}(0,l)$, задания нормы в пространстве $H_0^1(0,l)$ по формуле (3.1) и в пространстве $H^{-1}(0,l)$ как в сопряженном к $H_0^1(0,l)$, см., например, [14].)

3.2. Переформулировка задачи. Перепишем уравнение задачи (2.1) в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(-u_{xx}+e^{\varepsilon u}) = u_{xx} - \frac{\partial}{\partial t}((u_x)^2) \tag{3.3}$$

и введем (нелинейный) оператор

$$A\colon z\mapsto -z_{xx}+e^{\varepsilon z}, \qquad A\colon H_0^1(0,l)\to H^{-1}(0,l). \tag{3.4}$$

Покажем, что оператор A в самом деле действует указанным выше образом:

1) $-d^2/dx^2\colon H_0^1(0,l)\to H^{-1}(0,l)$ – стандартно, см. предложение 4;
2) для одномерного случая имеем (см. предложения 1 и 2)

$$H_0^1(0,l)\subset C[0,l] \quad\Longrightarrow\quad e^{\varepsilon z}\in C[0,l]\subset H^{-1}(0,l).$$

Теперь, обозначив

$$A(u(t)) =: v(t)\in H^{-1}(0,l) \quad \text{при каждом фиксированном } t,$$

перейдем от (3.3) к уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2}v = (B(v))_{xx} - \frac{d}{dt}((B(v))_x)^2 \tag{3.5}$$

в пространстве $H^{-1}(0,l)$, где $B(v) := A^{-1}(v)$. Существование этого обратного оператора мы докажем ниже, а пока обоснуем, что

$$((B(v))_x)^2 \in H^{-1}(0,l).$$

Имеем

$$\begin{aligned} v \in H^{-1}(0,l) \quad &\Longrightarrow \quad u \equiv B(v) \in H_0^1(0,l) \quad \Longrightarrow \quad u_x \in L^2(0,l) \\ &\Longrightarrow \quad (u_x)^2 \in L^1(0,l). \end{aligned}$$

Осталось применить предложение 3.

Таким образом, решение задачи (2.1) мы понимаем в следующем смысле.

Определение 1. *Решением задачи* (2.1) на промежутке $[0,T_1)$ будем называть функцию класса

$$u(t) \equiv u(x)(t) \in C^2([0,T_1); H_0^1(0,l)), \qquad 0 < T_1 \leqslant +\infty,$$

удовлетворяющую в пространстве $H^{-1}(0,l)$ уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2}A(u(t)) = u_{xx}(t) - \frac{d}{dt}((u_x)^2(t))$$

при каждом $t \in [0,T_1)$ и условиям

$$u(0) = u_0(x), \qquad u'(0) = u_1(x).$$

Стандартным образом понимается непродолжаемое решение.

Для доказательства обратимости нелинейного оператора A воспользуемся следующим утверждением [17; следствие 2.3, с. 97]:

Лемма 1 [17]. *Пусть оператор $A\colon X \to X^*$ (X – банахово пространство, X^* – его сопряженное) радиально непрерывен и сильно монотонен. Тогда он имеет обратный оператор $A^{-1}\colon X^* \to X$, который является липшиц-непрерывным.*

Покажем, что оператор (3.4) удовлетворяет условиям сформулированной выше леммы.

1) Радиальная непрерывность. Обозначим через $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ скобки двойственности между пространствами $H^{-1}(0,l)$ и $H_0^1(0,l)$. Имеем

$$\begin{aligned} \langle A(u+sw), w\rangle &= \int_0^l (-u_{xx} - sw_{xx} + e^{\varepsilon(u+sw)})w\,dx \\ &= \int_0^l u_x w_x\,dx + s\int_0^l w_x^2\,dx + \int_0^l w e^{\varepsilon(u+sw)}\,dx. \end{aligned}$$

Непрерывность второго слагаемого очевидна. Последнее слагаемое представляет собой определенный интеграл от функции, непрерывной по совокупности переменных (x,s) (поскольку $u,w \in H_0^1(0,l) \subset C[0,l]$) и тоже непрерывно.

2) Сильная монотонность. Имеем

$$\langle A(u)-A(v),u-v\rangle=\int_0^l(-u_{xx}+v_{xx}+e^{\varepsilon u}-e^{\varepsilon v})(u-v)\,dx$$
$$=\int_0^l(u_x-v_x)^2\,dx+\int_0^l(e^{\varepsilon u}-e^{\varepsilon v})(u-v)\,dx\geqslant\int_0^l(u_x-v_x)^2\,dx\equiv\|u-v\|^2_{H_0^1(0,l)},\tag{3.6}$$

где последний знак неравенства обосновывается монотонностью экспоненты.

Таким образом, из леммы 1 вытекает

Лемма 2. *Оператор* $B\equiv A^{-1}\colon H^{-1}(0,l)\to H_0^1(0,l)$ *существует и является липшиц-непрерывным.* (*Обозначим его константу Липшица через* L_B.)

Замечание 1. Оценка (3.6) показывает, что $L_B\leqslant 1$, но для целей настоящей работы это не существенно.

Все вышесказанное позволяет рассматривать уравнение (3.5) в $H^{-1}(0,l)$, а точнее, искать его решение v класса

$$v(t)\in C^2([0,T_1);H^{-1}(0,l)).\tag{3.7}$$

Вернемся к уравнению (3.5), которое для краткости перепишем в виде

$$v''=(B(v))_{xx}-(((B(v))_x)^2)'.$$

После двукратного интегрирования по t будем иметь

$$v(t)=v_0+[v'(0)+((B(v_0))_x)^2]t+\int_0^t d\tau\,(t-\tau)(B(v))_{xx}(\tau)-\int_0^t d\tau\,((B(v))_x)^2(\tau).\tag{3.8}$$

Полученное уравнение отличается от уравнения, рассмотренного в работе [16], количеством интегральных слагаемых. Однако доказательство из работы [16] непосредственно обобщается на случай произвольного конечного числа слагаемых. Поэтому для применения результатов этой работы нам следует только показать, что интегральные члены удовлетворяют сформулированным там условиям (A_1) и (A_2). С учетом отсутствия явной зависимости операторов $(B(v))_{xx}$ и $((B(v))_x)^2$ от t надо проверить лишь условие (A_2). Для удобства читателя приведем это условие, сформулировав его относительно произвольного оператора

$$D(t,u)\colon\mathbb{R}_+\times\mathbb{B}\to\mathbb{B},$$

где $\mathbb{B}$ – банахово пространство: существует такая функция

$$\mu(t,s)\colon\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}_+,$$

ограниченная на каждом прямоугольнике $[0,T]\times[0,S]$, что

$$\|D(t,u_1)-D(t,u_2)\|\leqslant\mu(t,\max(\|u_1\|,\|u_2\|))\|u_1-u_2\|$$
$$\text{для всех}\quad t\geqslant 0\quad\text{и для всех}\quad u_1,u_2\in\mathbb{B}.$$

Лемма 3. *Каждый из операторов $(B(v))_{xx}$ и $((B(v))_x)^2$, рассматриваемых как действующие из $H^{-1}(0,l)$ в $H^{-1}(0,l)$, удовлетворяет условию* (A_2) *из работы* [16].

Доказательство. Для оператора $(B(v))_{xx}$ это утверждение тривиально, потому что в силу леммы 2 оператор B глобально липшиц-непрерывен, а оператор второй производной, действующий из $H_0^1(0,l)$ в $H^{-1}(0,l)$, ограничен (см. предложение 4).

Проведем теперь оценки для второго интегрального слагаемого. Заметим сначала, что в силу глобальной липшиц-непрерывности оператора B для любого $v \in H^{-1}(0,l)$ верна оценка (где θ – нулевой элемент пространства $H^{-1}(0,l)$)

$$\begin{aligned}\|B(v)\|_{H_0^1(0,l)} &\leqslant \|B(v)-B(\theta)\|_{H_0^1(0,l)}+\|B(\theta)\|_{H_0^1(0,l)}\\ &\leqslant L_B\|v-\theta\|_{H^{-1}(0,l)}+\|B(\theta)\|_{H_0^1(0,l)}=L_B\|v\|_{H^{-1}(0,l)}+\|B(\theta)\|_{H_0^1(0,l)}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Теперь пусть $v_1, v_2 \in H^{-1}(0,l)$, $z_1 = B(v_1)$, $z_2 = B(v_2)$. Из неравенства Гёльдера с учетом выбора нормы (3.1), оценки (3.9) и липшиц-непрерывности оператора B имеем

$$\begin{aligned}&\|((B(v_1))_x)^2-((B(v_2))_x)^2\|_{L^1(0,l)}=\|(z_{1,x}-z_{2,x})(z_{1,x}+z_{2,x})\|_{L^1(0,l)}\\ &\quad\leqslant\|z_{1,x}-z_{2,x}\|_{L^2(0,l)}\,\|z_{1,x}+z_{2,x}\|_{L^2(0,l)}\leqslant\|z_1-z_2\|_{H_0^1(0,l)}(\|z_1\|_{H_0^1(0,l)}+\|z_2\|_{H_0^1(0,l)})\\ &\quad\leqslant L_B\|v_1-v_2\|_{H^{-1}(0,l)}[2\|B(\theta)\|_{H_0^1(0,l)}+L_B(\|v_1\|_{H^{-1}(0,l)}+\|v_2\|_{H^{-1}(0,l)})].\end{aligned}$$

Отсюда с помощью предложения 3 получаем

$$\begin{aligned}&\|J_2((B(v_1))_x)^2-J_2((B(v_2))_x)^2\|_{H^{-1}(0,l)}\\ &\quad\leqslant C_0L_B[2\|B(\theta)\|_{H_0^1(0,l)}+L_B(\|v_1\|_{H^{-1}(0,l)}+\|v_2\|_{H^{-1}(0,l)})]\,\|v_1-v_2\|_{H^{-1}(0,l)}.\end{aligned}$$

Следовательно, функция $\mu(t,s)$ в (A_2) может быть взята в виде

$$\mu(t,s)=(2\|B(\theta)\|_{H_0^1(0,l)}+2L_Bs)C_0L_B.$$

В силу леммы 3 из теоремы 1 работы [16] (с учетом сделанного выше замечания о произвольном конечном количестве интегральных слагаемых) непосредственно вытекает

Теорема 1. *Интегральное уравнение* (3.8) *имеет единственное непродолжаемое решение класса*

$$v(t)\in C([0,T_1),H^{-1}(0,l)), \tag{3.10}$$

где $T_1=+\infty$ *или* $T_1<+\infty$, *причем*

$$\limsup_{t\uparrow T_1}\|v(t)\|_{H^{-1}(0,l)}=+\infty.$$

Чтобы показать, что на самом деле это решение имеет гладкость (3.7) и является решением уравнения (3.5), а также чтобы вернуться от $v(t)$ к $u(t)$, нам понадобится установить дальнейшие свойства оператора B, к чему мы и приступим.

3.3. Гладкая обратимость оператора A. Теорема о непродолжаемом решении для исходной задачи. Наша ближайшая цель – показать, что оператор B является отображением класса гладкости C^2, т.е. дважды непрерывно дифференцируем по Фреше. Для этого достаточно [15; гл. 1 теоремы 4.2.1 и 5.4.4] показать, что оператор A является отображением класса гладкости C^2, а его первая производная по Фреше (в любой точке) является линейным оператором, осуществляющим изоморфизм между $H_0^1(0,l)$ и $H^{-1}(0,l)$, т.е. биективным ограниченным линейным оператором с ограниченным обратным. Это будет сделано в леммах 4 и 5.

Лемма 4. *Оператор A дважды непрерывно дифференцируем по Фреше, причем*

$$A_f'(z)h = e^{\varepsilon z}\varepsilon h - h_{xx}, \qquad A_f''(z)(h_1,h_2) = \varepsilon^2 e^{\varepsilon z} h_1 h_2. \tag{3.11}$$

Доказательство. Поскольку оператор $A\colon H_0^1(0,l) \to H^{-1}(0,l)$ есть сумма ограниченного линейного оператора $-d^2/dx^2\colon H_0^1(0,l) \to H^{-1}(0,l)$ и оператора

$$A_0(z) = e^{\varepsilon z},$$

вопрос сводится к изучению свойств оператора A_0. Представим этот последний в виде композиции

$$A_0 = J_1 \circ F \circ \varepsilon J_0, \qquad F\colon C[0,l] \to C[0,l], \quad F(z)(x) = e^{z(x)}.$$

Поскольку операторы J_0 и J_1, введенные выше, суть линейные ограниченные операторы, достаточно доказать, что оператор F дважды непрерывно дифференцируем по Фреше. Но из оценки

$$\begin{aligned}
&\|e^{z(x)+h(x)} - e^{z(x)} - e^{z(x)}h(x)\|_{C[0,l]} = \|e^{z(x)}e^{h(x)} - e^{z(x)} - e^{z(x)}h(x)\|_{C[0,l]} \\
&\quad = \|e^{z(x)}(e^{h(x)} - 1 - h(x))\|_{C[0,l]} = \left\| e^{z(x)}\left(h(x) - h(x) + \frac{1}{2}\, e^{\theta[x]h(x)}(h(x))^2 \right) \right\|_{C[0,l]} \\
&\quad = o(\|h\|_{C[0,l]})
\end{aligned}$$

следует первое из равенств (3.11), и аналогично получается второе. Нетрудно также установить непрерывность второй производной как функции аргумента $z(x)$.

Лемма 5. *Производная $A_f'(z)h = e^{\varepsilon z}\varepsilon h - h_{xx}$ при каждой $z(x) \in H_0^1(0,l)$ является ограниченным линейным оператором, действующим из $H_0^1(0,l)$ в $H^{-1}(0,l)$, и имеет на всем $H^{-1}(0,l)$ ограниченный обратный.*

Доказательство. Ограниченность этого оператора тривиальна в силу предложений 1, 2, 4. Для доказательства его ограниченной обратимости воспользуемся леммой 1. Оператор $A_f'(z)$ является при каждом $z \in H_0^1(0,l)$ радиально непрерывным потому, что он линеен и непрерывен. Чтобы доказать его сильную монотонность, достаточно (ввиду линейности) показать, что

$$\langle A_f'(z)h, h\rangle \geqslant \|h\|^2_{H_0^1(0,l)} \qquad \text{для всех} \quad z, h \in H_0^1(0,l).$$

Имеем

$$\langle A_f'(z)h, h\rangle = \langle -h_{xx} + e^{\varepsilon z}\varepsilon h, h\rangle = \int_0^l (h_x^2 + e^{\varepsilon z}\varepsilon h^2)\,dx \geqslant \int_0^l h_x^2\,dx = \|h\|^2_{H_0^1(0,l)},$$

что и доказывает сильную монотонность оператора $A_f'(z)$. Следовательно, этот оператор имеет обратный, который является линейным и липшиц-непрерывным, а следовательно, ограниченным.

Из лемм 4, 5 настоящей работы и теорем 4.2.1, 5.4.4 гл. 1 книги [15] непосредственно вытекает

Теорема 2. *Оператор B, обратный к оператору A, является дважды непрерывно дифференцируемым по Фреше.*

Следствие 1. *Решение $v(t)$ уравнения (3.8) имеет гладкость (3.7) и удовлетворяет уравнению (3.5).*

Доказательство. Действительно, из самого вида уравнения (3.8) следует, что при подстановке непрерывной функции (3.10) в правую часть уравнения эта правая часть будет допускать однократное дифференцирование по t:

$$v'(t) = v'(0) + ((B(v_0))_x)^2 + \int_0^t d\tau\,(B(v))_{xx}(\tau) - ((B(v))_x)^2(t) \in C([0,T_0); H^{-1}(0,l)).$$

Далее, дифференцируемость оператора B (см. теорему 2) позволит провести второе дифференцирование:

$$v''(t) = (B(v))_{xx}(t) - 2(B(v))_x(t)(B'_f(v)v'(t))_x \in C([0,T_0); H^{-1}(0,l)).$$

Теперь можно произвести двукратное дифференцирование обеих частей уравнения (3.8) и тем самым получить, что функция (3.10) удовлетворяет уравнению (3.5).

Следствие 2. *Функция $u(t) \equiv B(v(t))$ дважды дифференцируема, а именно,*

$$u(t) \in C^2([0,T_1); H_0^1(0,l)).$$

Это вытекает из теоремы 2, следствия 1 и цепного правила для производных Фреше.

Еще одно следствие, ввиду его важности, оформим в виде отдельной леммы.

Лемма 6. *Функции $v(t)$ и $u(t)$, связанные соотношениями*

$$u(t) = B(v(t)), \qquad v(t) = A(u(t)),$$

определены на одном и том же промежутке

$$[0,T_1), \qquad 0 < T_1 \leqslant +\infty,$$

причем

$$\limsup_{t\uparrow T_1} \|u(t)\|_{H_0^1(0,l)} = +\infty \quad\iff\quad \limsup_{t\uparrow T_1} \|v(t)\|_{H^{-1}(0,l)} = +\infty.$$

Доказательство. Это утверждение вытекает из того факта, что A и B – ограниченные (нелинейные) операторы, причем область определения каждого из них совпадает со всем соответствующим пространством. Ограниченность оператора A усматривается непосредственно с помощью предложений 1, 2, 4; ограниченность оператора B вытекает из его глобальной липшиц-непрерывности (см. лемму 2).

Проведенные выше рассуждения показывают, что верна

Теорема 3. *Задача (2.1) имеет единственное непродолжаемое решение (в смысле определения 1), причем в случае $T_1 < +\infty$ верно*

$$\limsup_{t\uparrow T_1} \|u(t)\|_{H_0^1(0,l)} = +\infty.$$

4. Разрушение решения

В этом разделе с помощью метода нелинейной емкости Похожаева и Митидиери [4] мы докажем, что при любых граничных условиях найдутся такие начальные условия $u_0(x)$, $u_1(x)$, при которых не имеет места глобальная (по времени) разрешимость задачи.

Введем пробную функцию

$$\chi(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где

$$\varphi(x) \in C_0^4[0,l], \quad \varphi(x) \geqslant 0, \qquad \psi(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda}.$$

Параметры $T > 0$ и $\lambda > 2$ будут конкретизированы ниже.

Для удобства читателя приведем элементарные соотношения, используемые в дальнейшем: выражения для производных функции $\psi(t)$ и их значений на концах отрезка

$$\begin{aligned} &\psi(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda}, && \psi(0) = 1, && \psi(T) = 0, \\ &\psi'(t) = -\frac{\lambda}{T}\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda-1}, && \psi'(0) = -\frac{\lambda}{T}, && \psi'(T) = 0, \\ &\psi''(t) = \frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2}\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda-2}, && \psi''(0) = \frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2}, && \psi''(T) = 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

а также вытекающие из (4.1) формулы интегрирования по частям с функцией $\psi(t)$:

$$\int_0^T dt\, v'(t)\psi(t) = -v(0) + \frac{\lambda}{T}\int_0^T dt\, v(t)\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda-1}, \tag{4.2}$$

$$\int_0^T dt\, v''(t)\psi(t) = -v'(0) - \frac{\lambda}{T}v(0) + \frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2}\int_0^T dt\, v(t)\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda-2}. \tag{4.3}$$

Рассматривая пробную функцию $\varphi(x)\psi(t)$ как элемент $H_0^1(0,l)$ при каждом $t \in [0,T)$, согласно определению 1 можем записать[1]

$$\left\langle \frac{d^2}{dt^2}(u_{xx}) + u_{xx}, \varphi(x)\psi(t) \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}(u_x)^2 + \frac{d^2}{dt^2}\, e^{\varepsilon u}, \varphi(x)\psi(t) \right\rangle,$$

где $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ – скобки двойственности между $H^{-1}(0,l)$ и $H_0^1(0,l)$, или

$$\left\langle \frac{d^2}{dt^2}(u_{xx}) + u_{xx}, \varphi(x) \right\rangle \psi(t) = \left\langle \frac{d}{dt}(u_x)^2 + \frac{d^2}{dt^2}\, e^{\varepsilon u}, \varphi(x) \right\rangle \psi(t).$$

Проинтегрируем это соотношение по $[0,T]$ и получим

$$\begin{aligned} \int_0^T dt\, \psi(t)\frac{d^2}{dt^2}\langle u_{xx}, \varphi(x)\rangle + \int_0^T dt\, \psi(t)\langle u_{xx}, \varphi(x)\rangle \\ = \int_0^T dt\, \psi(t)\,\frac{d}{dt}\langle (u_x)^2, \varphi(x)\rangle + \int_0^T dt\, \psi(t)\frac{d^2}{dt^2}\langle e^{\varepsilon u(x,t)}, \varphi(x)\rangle. \end{aligned}$$

[1] Мы ставим знак обычной, а не частной производной, потому что рассматриваем $u(t)$ как $H_0^1(0,l)$-значную функцию аргумента t, $u_{xx}(t)$ – как $H^{-1}(0,l)$-значную и т.д.

Проинтегрируем по частям по времени, и с учетом формул (4.2), (4.3) придем к

$$
\begin{aligned}
&-\langle u_{1,xx}(x),\varphi(x)\rangle-\frac{\lambda}{T}\langle u_{0,xx}(x),\varphi(x)\rangle+\frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2}\int_0^T dt\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-2}\langle u_{xx}(x,t),\varphi(x)\rangle\\
&\qquad+\int_0^T dt\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda}\langle u_{xx}(x,t),\varphi(x)\rangle\\
&\quad=-\langle|u_{0,x}(x)|^2,\varphi(x)\rangle+\frac{\lambda}{T}\int_0^T dt\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-1}\langle|u_x(x,t)|^2,\varphi(x)\rangle\\
&\qquad-\varepsilon\langle e^{\varepsilon u_0(x)}u_1(x),\varphi(x)\rangle-\frac{\lambda}{T}\langle e^{\varepsilon u_0(x)},\varphi(x)\rangle\\
&\qquad+\frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2}\int_0^T dt\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-2}\langle e^{\varepsilon u(x,t)},\varphi(x)\rangle.
\end{aligned}
$$

По определению функционалов из $H^{-1}(0,l)$ последнее равенство можно переписать в виде

$$
\begin{aligned}
&\int_0^l dx\,u_{1,x}\varphi_x+\frac{\lambda}{T}\int_0^l dx\,u_{0,x}\varphi_x+\int_0^l dx\,\varphi|u_{0,x}|^2+\varepsilon\int_0^l dx\,\varphi e^{\varepsilon u_0}u_1+\frac{\lambda}{T}\int_0^l dx\,\varphi e^{\varepsilon u_0}\\
&\qquad-\frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2}\int_0^T dt\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-2}\int_0^l dx\,\varphi_x u_x-\int_0^T dt\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda}\int_0^l dx\,\varphi_x u_x\\
&\quad=\frac{\lambda}{T}\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-1}\int_0^l (u_x)^2\varphi\,dx+\frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2}\int_0^T dt\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-2}\int_0^l dx\,\varphi e^{\varepsilon u}.
\end{aligned}
$$

Учтем, что функция $\varphi(x)$ отлична от 0 лишь на множестве $\Omega_1\Subset[0,l]$, и перейдем от повторного интеграла к двойному интегралу по множеству $[0,T]\times\Omega_1$:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^l dx\,u_{1,x}\varphi_x+\frac{\lambda}{T}\int_0^l dx\,u_{0,x}\varphi_x+\int_0^l dx\,\varphi|u_{0,x}|^2+\varepsilon\int_0^l dx\,\varphi e^{\varepsilon u_0}u_1+\frac{\lambda}{T}\int_0^l dx\,\varphi e^{\varepsilon u_0}\\
&\qquad-\frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2}\iint_{[0,T]\times\Omega_1}dt\,dx\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-2}\varphi_x u_x-\iint_{[0,T]\times\Omega_1}dt\,dx\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda}\varphi_x u_x\\
&\quad=\frac{\lambda}{T}\iint_{[0,T]\times\Omega_1}dt\,dx\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-1}(u_x)^2\varphi\\
&\qquad+\frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2}\iint_{[0,T]\times\Omega_1}dt\,dx\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-2}\varphi e^{\varepsilon u}.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Для оценки членов в левой части применим “неравенство Коши с ε”

$$
ab\leqslant\varepsilon^2\frac{a^2}{2}+\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{b^2}{2}\,.
$$

Имеем

$$
\begin{aligned}
\left|\varphi_x u_x\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-2}\right|&\leqslant|\varphi_x|\cdot|u_x|\cdot\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-2}\\
&=|\varphi_x|\cdot|u_x|\cdot\left(1-\frac{t}{T}\right)^{(\lambda-1)/2}\cdot\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-2-(\lambda-1)/2}\varphi^{1/2}\varphi^{-1/2}\\
&\leqslant\frac{\varepsilon_1^2}{2}(u_x)^2\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-1}\varphi+\frac{1}{2\varepsilon_1^2}(\varphi_x)^2\left(1-\frac{t}{T}\right)^{2(\lambda-2)-(\lambda-1)}\varphi^{-1},
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

$$\begin{aligned}\left|\varphi_x u_x\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda}\right| &\leqslant |\varphi_x|\cdot|u_x|\cdot\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda}\\ &= |\varphi_x|\cdot|u_x|\cdot\left(1-\frac{t}{T}\right)^{(\lambda-1)/2}\cdot\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-(\lambda-1)/2}\varphi^{1/2}\varphi^{-1/2}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon_2^2}{2}(u_x)^2\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-1}\varphi+\frac{1}{2\varepsilon_2^2}(\varphi_x)^2\left(1-\frac{t}{T}\right)^{2\lambda-(\lambda-1)}\varphi^{-1}. \end{aligned}\tag{4.6}$$

Эти неравенства выполняются всюду, где выполнено $\varphi(x)>0$. Однако, как показывают выкладки [4], их можно распространить по непрерывности на замыкание этого множества, т.е. на носитель функции φ. Множество Ω_1 зафиксируем равным этому носителю. Тогда с учетом (4.5), (4.6) из (4.4) получим

$$\begin{aligned}&\int_0^l dx\,u_{1,x}\varphi_x+\frac{\lambda}{T}\int_0^l dx\,u_{0,x}\varphi_x+\int_0^l dx\,\varphi|u_{0,x}|^2+\varepsilon\int_0^l dx\,\varphi e^{\varepsilon u_0}u_1+\frac{\lambda}{T}\int_0^l dx\,\varphi e^{\varepsilon u_0}\\ &\qquad+\frac{\varepsilon_1^2}{2}\,\frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2}\iint_{[0,T]\times\Omega_1}dt\,dx\,(u_x)^2\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-1}\varphi\\ &\qquad+\frac{1}{2\varepsilon_1^2}\,\frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2}\iint_{[0,T]\times\Omega_1}dt\,dx\,(\varphi_x)^2\left(1-\frac{t}{T}\right)^{2(\lambda-2)-(\lambda-1)}\varphi^{-1}\\ &\qquad+\frac{\varepsilon_2^2}{2}\iint_{[0,T]\times\Omega_1}dt\,dx\,(u_x)^2\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-1}\varphi\\ &\qquad+\frac{1}{2\varepsilon_2^2}\iint_{[0,T]\times\Omega_1}dt\,dx\,(\varphi_x)^2\left(1-\frac{t}{T}\right)^{2\lambda-(\lambda-1)}\varphi^{-1}\\ &\quad\geqslant\frac{\lambda}{T}\iint_{[0,T]\times\Omega_1}dt\,dx\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-1}(u_x)^2\varphi\\ &\qquad+\frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2}\iint_{[0,T]\times\Omega_1}dt\,dx\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-2}\varphi e^{\varepsilon u}.\end{aligned}$$

Приводя в последнем неравенстве однородные члены, получим

$$\begin{aligned}&\int_0^l dx\,u_{1,x}\varphi_x+\frac{\lambda}{T}\int_0^l dx\,u_{0,x}\varphi_x+\int_0^l dx\,\varphi|u_{0,x}|^2+\varepsilon\int_0^l dx\,\varphi e^{\varepsilon u_0}u_1+\frac{\lambda}{T}\int_0^l dx\,\varphi e^{\varepsilon u_0}\\ &\qquad+\frac{1}{2\varepsilon_1^2}\,\frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2}\iint_{[0,T]\times\Omega_1}dt\,dx\,(\varphi_x)^2\left(1-\frac{t}{T}\right)^{2(\lambda-2)-(\lambda-1)}\varphi^{-1}\\ &\qquad+\frac{1}{2\varepsilon_2^2}\iint_{[0,T]\times\Omega_1}dt\,dx\,(\varphi_x)^2\left(1-\frac{t}{T}\right)^{2\lambda-(\lambda-1)}\varphi^{-1}\\ &\quad\geqslant\left(\frac{\lambda}{T}-\frac{\varepsilon_1^2}{2}\frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2}-\frac{\varepsilon_2^2}{2}\right)\iint_{[0,T]\times\Omega_1}dt\,dx\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-1}(u_x)^2\varphi\\ &\qquad+\frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2}\iint_{[0,T]\times\Omega_1}dt\,dx\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-2}\varphi e^{\varepsilon u}.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Заметим, что при достаточно малых ε_1, ε_2 и $\varphi\not\equiv 0$ правая часть положительна. При этом в левой части стоят слагаемые, зависящие лишь от начальных данных и пробных функций, но не зависящие от решения. Выпишем отдельно слагаемые левой части, зависящие от начальных данных:

$$C := \int_0^l dx \left[\frac{\lambda}{T} u_{0,x}\varphi_x + \left(|u_{0,x}|^2 + \frac{\lambda}{T} e^{\varepsilon u_0}\right)\varphi\right] + \int_0^l dx \left[u_{1,x}\varphi_x + \varepsilon u_1 e^{\varepsilon u_0}\varphi\right]. \tag{4.8}$$

Положим

$$u_1(x) = -r(-\varphi_{xx}(x) + \varepsilon\varphi(x)e^{\varepsilon u_0(x)}), \tag{4.9}$$

где r – пока произвольное положительное вещественное число, а $\varphi(x) \in C_0^4[0,l]$. Подставим (4.9) в (4.8):

$$\begin{aligned} C &= \int_0^l dx \left[\frac{\lambda}{T} u_{0,x}\varphi_x + \left(|u_{0,x}|^2 + \frac{\lambda}{T} e^{\varepsilon u_0}\right)\varphi\right] + \int_0^l dx\,[-\varphi_{xx} + \varepsilon\varphi e^{\varepsilon u_0}]u_1 \\ &= \int_0^l dx \left[\frac{\lambda}{T} u_{0,x}\varphi_x + \left(|u_{0,x}|^2 + \frac{\lambda}{T} e^{\varepsilon u_0}\right)\varphi\right] - r\int_0^l dx\,(-\varphi_{xx} + \varepsilon\varphi e^{\varepsilon u_0})^2. \end{aligned}$$

Пусть $T > 0$ – произвольное фиксированное число. Тогда видно, что при достаточно больших r при условии $-\varphi_{xx} + \varepsilon\varphi e^{\varepsilon u_0} \not\equiv 0$ (чего легко добиться) левая часть (4.7) становится отрицательной. Неравенство (4.7) становится неверным, что свидетельствует о разрушении решения в момент $T_1 \leqslant T$. Таким образом, доказана

Теорема 4. *Пусть $T > 0$ – произвольное фиксированное число. Тогда, каково бы ни было $u_0 \in H_0^1(0,l)$, найдется такое $u_1 \in H_0^1(0,l)$, что задача (2.1) не может иметь решение на промежутке $[0,T_1]$ при $T_1 \geqslant T$.*

Объединяя теперь теоремы 3 и 4, можно видеть, что верна

Теорема 5. *Задача (2.1) имеет единственное непродолжаемое решение. Оно существует на полупрямой $[0,+\infty)$ или на полуинтервале $[0,T_1)$. Более того, каковы бы ни были $T > 0$ и $u_0 \in H_0^1(0,l)$, найдется такое $u_1 \in H_0^1(0,l)$, что это решение существует лишь на промежутке $[0,T_1)$, где $T_1 \leqslant T$, и при этом*

$$\limsup_{t\uparrow T_1} \|u(t)\|_{H_0^1(0,l)} = +\infty.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] С. А. Габов, *Новые задачи математической теории волн*, Наука, М., 1998.

[2] F. Kako, N. Yajima, "Interaction of ion-acoustic solitons in two-dimensional space", *J. Phys. Soc. Japan*, **49**:5 (1980), 2063–2071.

[3] Э. Инфельд, Дж. Роуландс, *Нелинейные волны, солитоны и хаос*, Физматлит, М., 2006.

[4] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, "Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных", Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383.

[5] H. A. Levine, "Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \mathcal{F}(u)$", *Arch. Rational Mech. Anal.*, **51**:5 (1973), 371–386.

[6] H. A. Levine, "Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **192** (1974), 1–21.

[7] В. К. Калантаров, О. А. Ладыженская, “О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 10, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **69**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1977, 77–102.

[8] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.

[9] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987.

[10] В. А. Галактионов, С. И. Похожаев, “Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:10 (2008), 1819–1846.

[11] M. O. Korpusov, D. V. Lukyanenko, A. A. Panin, E. V. Yushkov, “Blow-up for one Sobolev problem: theoretical approach and numerical analysis”, *J. Math. Anal. Appl.*, **442**:2 (2016), 451–468.

[12] M. O. Korpusov, D. V. Lukyanenko, A. A. Panin, E. V. Yushkov, “Blow-up phenomena in the model of a space charge stratification in semiconductors: analytical and numerical analysis”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **40**:7 (2017), 2336–2346.

[13] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.

[14] R. A. Adams, J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, Pure Appl. Math. (Amst.), **140**, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[15] А. Картан, *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы*, Мир, М., 1971.

[16] А. А. Панин, “О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра”, *Матем. заметки*, **97**:6 (2015), 884–903.

[17] Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978.

М. О. Корпусов
Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

Поступило
14.09.2016

А. А. Панин
Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова;
Российский университет дружбы народов, г. Москва
E-mail: a-panin@yandex.ru