Т. С. Мардвилко, А. А. Пекарский, Сопряженные функции на отрезке и их связь с равномерными рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 2, 248–261

DOI: 10.4213/mzm10672

Математические заметки

Том 99 выпуск 2 февраль 2016

УДК 517.51+517.53

Сопряженные функции на отрезке и их связь с равномерными рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями

Т. С. Мардвилко, А. А. Пекарский

Ранее вторым из авторов было показано, что в периодическом случае скорость наилучших равномерных рациональных приближений функции хорошо описывается с помощью скоростей наилучших равномерных кусочно-полиномиальных приближений самой функции и ее сопряженной. В настоящей работе аналогичный результат получен для отрезка.

Библиография: 17 названий.

DOI: 10.4213/mzm10672

1. Введение. Основной результат. Ранее вторым из авторов [1] было показано, что в периодическом случае скорость наилучших равномерных рациональных приближений функции хорошо описывается с помощью скоростей наилучших равномерных кусочно-полиномиальных приближений самой функции и ее сопряженной. В настоящей работе аналогичный результат получен для отрезка.

Через $L_\infty(A)$ и $C(A)$ обозначим соответственно банаховы пространства действительных существенно ограниченных и непрерывных функций на отрезке $A \subset \mathbb{R}$. При этом нормы для $f \in L_\infty(A)$ и $g \in C(A)$ вводятся стандартно. Именно,

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty(A)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in A} |f(x)|,$$
$$\|g\|_{C(A)} = \|g\|_{L_\infty(A)} = \max_{x \in A} |g(x)|.$$

Для $0 < p < \infty$ через $L_p(A)$ обозначим пространство Лебега измеримых функций g на A таких, что $|g|^p$ суммируема на A. Пространство $L_p(A)$ является квазибанаховым (банаховым при $1 \leqslant p < \infty$) относительно квазинормы

$$\|g\|_p = \|g\|_{L_p(A)} = \left(\int_A |g(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Пусть $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, – множество алгебраических многочленов степени не более n. Через $\mathcal{R}_n$ обозначим множество алгебраических рациональных функций

Работа второго автора выполнена в рамках программы ГПНИ НАН Беларуси “Конвергенция”.

степени не более n. Именно, $r \in \mathcal{R}_n$, если $r = p/q$, где p и q принадлежат $\mathcal{P}_n$, $q \not\equiv 0$ и дробь p/q несократимая.

Для $n, s \in \mathbb{N}$ через $\Pi_n^s = \Pi_n^s(A)$ обозначим множество кусочно-полиномиальных функций, определенных на A, степени не выше $s-1$ с не более чем n узлами. Именно, $\varphi \in \Pi_n^s(A)$, $A = [a, b]$, если существуют точки $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ такие, что $\varphi|_{(x_k, x_{k+1})} \in \mathcal{P}_{s-1}$ при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. При этом значения $\varphi(x_k)$ выбираются произвольно.

Для $g \in L_p(A)$, $0 < p \leqslant \infty$, определим наилучшие приближения множествами $\mathcal{R}_n$ и Π_n^s соответственно:

$$R_n(g)_p = \inf\{\|g - r\|_p : r \in \mathcal{R}_n\},$$
$$E_n^{(s)}(g)_p = \inf\{\|g - \varphi\|_p : \varphi \in \Pi_n^s\}.$$

Для $g \in L_p(A)$, $0 < p \leqslant \infty$, введем $\Delta_h^s g(x)$ – *s-ю конечную разность с шагом h*:

$$\Delta_h^1 g(x) = g(x+h) - g(x),$$
$$\Delta_h^s g(x) = \Delta_h^1(\Delta_h^{s-1} g(x)), \qquad s \geqslant 2,$$

где $x \in A$ и $h \geqslant 0$ такие, что $x + sh \in A$. Тогда *L_p-модулем гладкости* порядка s функции g называется следующая ее характеристика:

$$\omega_s(t, g)_p = \sup_{0 \leqslant h \leqslant t} \|\Delta_h^s g(\,\cdot\,)\|_{L_p(A_{hs})}, \qquad t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

где A_{hs} – множество определения функции $x \mapsto \Delta_h^s g(x)$.

Далее, полагаем $I := [-1, 1]$. Для $\alpha > 0$ и $p \in (0, \infty)$ определим (см., например, [2]) пространство Бесова $B_p^\alpha = B_p^\alpha(I)$ функций $g \in L_p(I)$, для которых при $s = [\alpha] + 1$ ($[\alpha]$ – целая часть числа α)

$$\|g\|_{B_p^\alpha} := \left(\int_0^1 \left(\frac{\omega_s(t, g)_p}{t^\alpha}\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} < \infty.$$

В дальнейшем наиболее существенную роль играет пространство $B_{1/\alpha}^\alpha$, $\alpha \geqslant 1$. Отметим, что если $g \in B_{1/\alpha}^\alpha$ при $\alpha \geqslant 1$, то g почти всюду на I совпадает с некоторой непрерывной функцией. Это утверждение является следствием [2; гл. 12, теорема 6.5]. Поэтому будем считать, что все функции из $B_{1/\alpha}^\alpha$, $\alpha \geqslant 1$, непрерывны.

Пусть функция $g(x)$ определена на отрезке I и интегрируема на нем с весом $1/\sqrt{1-x^2}$. Тогда $\widehat{g}(x)$ – функция, сопряженная $g(x)$, – определяется следующим образом:

$$\widehat{g}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_I \frac{g(t)}{t-x} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad x \in I, \tag{1.2}$$

где сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Этот интеграл можно рассматривать как преобразование Гильберта для отрезка (см., например, [3], [4]). Поэтому $\widehat{g}(x)$ определена почти для всех $x \in I$.

Эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (iii) из сформулированной ниже теоремы 1 получена ранее вторым из авторов [5]. Основной результат настоящей статьи заключается в том, что к условиям (i) и (iii) мы добавили еще одно эквивалентное условие (ii).

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 1$, $s \in \mathbb{N} \cap (\alpha, \infty)$ и $g \in C(I)$. Тогда следующие условия равносильны*:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (R_n(g)_\infty)^{1/\alpha} < \infty;$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (E_n^{(s)}(g)_\infty)^{1/\alpha} < \infty, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (E_n^{(s)}(\widehat{g})_\infty)^{1/\alpha} < \infty; \end{cases}$$

$$\text{(iii)} \quad g \in B^{\alpha}_{1/\alpha}.$$

2. О сопряженных функциях на отрезке и на торе. При формулировке основного результата статьи – теоремы 1 – было естественным считать рассматриваемые функции действительными. При доказательстве некоторых вспомогательных утверждений нам будет удобным считать функции комплексными, так как методы теории функций комплексного переменного будут играть существенную роль.

Легко показать, см. также [4; формула (11.55)], что для любого $x \in (-1, 1)$ выполняется равенство

$$\int_I \frac{1}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0. \tag{2.1}$$

Поэтому сопряженную функцию $\widehat{g}(x)$ (см. (1.2)) можем представить в виде

$$\widehat{g}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_I \frac{g(t)-g(x)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad x \in I. \tag{2.2}$$

Лемма 1. *Пусть $r = p/q$, где p и q принадлежат $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, причем q не имеет нулей на I. Тогда*

$$\widehat{r}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot \omega(x)}{q(x)}, \qquad x \in I,$$

где $\omega \in \mathcal{P}_{n-1}$. Кроме того, для любого $s \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\widehat{r}^{(s)}(x) = (1-x^2)^{1/2-s} \cdot \frac{\lambda(x)}{q^s(x)}, \qquad x \in (-1, 1),$$

где $\lambda \in \mathcal{P}_{(s+1)n+s-1}$.

Доказательство. Первое утверждение немедленно следует из равенства (2.2). Второе утверждение легко получить с помощью индукции. Лемма 1 доказана.

В связи с леммой 1 отметим статьи [6] и [7]. В них соответственно изучаются приближения сопряженных функций на отрезке посредством функций вида $\sqrt{1-x^2}\,p(x)$ и $p(x)$, где $p \in \mathcal{P}_n$.

В дальнейшем считаем функцию $\lambda(z) := \sqrt{1-z^2}$ определенной на римановой поверхности Θ, являющейся объединением области $\overline{\mathbb{C}} \setminus I$ и края $\partial\Theta$. При этом край $\partial\Theta$ состоит из двух экземпляров отрезка I: верхнего I^+ и нижнего I^-. Ветвь $\lambda(z)$ выбирается таким образом, что $\lambda(z) = -iz + O(1/z)$ при $|z| \geqslant 1$. В частности, $\lambda(x \pm 0 \cdot i) = \pm\sqrt{1-x^2}$ при $x \in I^{\pm}$.

Лемма 2. *Пусть функция g аналитична в некоторой односвязной области, содержащей отрезок I. Тогда*

$$\widehat{g}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \int_\Gamma \frac{g(t)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad x \in I,$$

где Γ – любая замкнутая спрямляемая жорданова кривая, лежащая в указанной односвязной области и охватывающая отрезок I. При этом интегрирование проводится в положительном направлении относительно внешности Γ.

Доказательство. С учетом сказанного выше о функции $\lambda(z)$ из равенства (2.2) находим

$$\widehat{g}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \int_{\partial\Theta} \frac{g(t)-g(x)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad x \in I. \tag{2.3}$$

В этом интеграле точка x является устранимой особой точкой. Поэтому согласно теореме Коши для двусвязной области интегрирование в (2.3) по $\partial\Theta$ можно заменить интегрированием по Γ и затем полученный интеграл представить в виде

$$\widehat{g}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \left[\int_\Gamma \frac{g(t)}{t-x} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - g(x) \int_\Gamma \frac{dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}} \right].$$

Второй интеграл в этом равенстве равен нулю, так как подынтегральная функция аналитична в $\overline{\mathbb{C}} \setminus I$ и имеет в бесконечности нуль второго порядка. Лемма 2 доказана.

В теории функций более известна сопряженная функция на торе $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$, чем на отрезке I. Именно, сопряженная функция $\tilde{f}$ для $f \in L_1(\mathbb{T})$ определяется следующим образом:

$$\widetilde{f}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_\mathbb{T} f(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \tau}{2}\, d\tau, \qquad \theta \in \mathbb{T},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Как известно [3], $\widetilde{f}(\theta)$ существует почти для всех $\theta \in \mathbb{T}$.

В следующей лемме 3 устанавливается связь между сопряженными функциями $\widehat{g}$ и $\widetilde{f}$. При этом для $t \in \mathbb{R}$ мы полагаем $\operatorname{sign} t = 1$ при $t > 0$, $\operatorname{sign} t = -1$ при $t < 0$ и $\operatorname{sign} 0 = 0$.

Лемма 3. *Пусть функция $g(x)$ определена на отрезке I, интегрируема на нем с весом $1/\sqrt{1-x^2}$ и $f(\theta) = g(\cos\theta)$, $\theta \in \mathbb{T}$. Тогда почти всюду на $\mathbb{T}$ имеет место равенство*

$$\widehat{g}(\cos\theta) = \widetilde{f}(\theta) \cdot \operatorname{sign}(\sin\theta).$$

Доказательство легко осуществить с помощью замены $x = \cos\theta$ и $t = \cos\tau$ в формуле (1.2) для $\widehat{g}(x)$.

3. Неравенство типа Сегё для производных рациональной функции на отрезке. Обзор по неравенствам Бернштейна и Сегё для производных тригонометрических многочленов, а также их обобщений для тригонометрических рациональных функций имеется в [8]. При этом под неравенством Сегё мы подразумеваем неравенство для производной сопряженного тригонометрического многочлена.

В работе [7] получено неравенство типа Сегё для производных сопряженного алгебраического многочлена.

Далее через $c, c_1, c_2, \ldots$ обозначаем либо абсолютные положительные постоянные, либо некоторые положительные величины, зависящие от указанных параметров.

Для $r \in \mathcal{R}_n \cap C(I)$, $n \in \mathbb{N}_0$, и $s \in \mathbb{N}$ справедливо следующее неравенство типа Бернштейна:

$$\|r^{(s)}\|_{L_{1/s}(I)} \leqslant c(s) n^s \|r\|_{C(I)}. \tag{3.1}$$

Это неравенство получено для $s = 1$ Долженко, а для $s \geqslant 2$ – вторым из авторов (см. [8]–[10]). В следующей теореме 2 приводится неравенство типа Сегё, соответствуюшее (3.1).

Теорема 2. *Пусть $r \in \mathcal{R}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, не имеет полюсов на I. Тогда для $s \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\|\widehat{r}^{(s)}\|_{L_{1/s}(I)} \leqslant c(s) n^s \|r\|_{C(I)}.$$

Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся вспомогательные понятия и утверждения.

Пусть точки $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ (среди них могут быть совпадающие) принадлежат области $|\omega| > 1$. Определим произведение Бляшке

$$b_n(\omega) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\omega - \omega_k^*}{1 - \overline{\omega}_k^* \omega}, \qquad \omega_k^* := \frac{1}{\overline{\omega}_k}.$$

с нулями $\omega_1^*, \omega_2^*, \ldots, \omega_n^*$ и, соответственно, с полюсами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Введем функцию $\omega = \varphi(z) = z + i\sqrt{1 - z^2}$, определенную на римановой поверхности Θ (см. п. 2), обратную функции Жуковского $z = (\omega + 1/\omega)/2$. Отметим, что согласно указанному в п. 2 выбору ветви $\sqrt{\cdots}$ имеем

$$\varphi(\Theta) = \{\omega : |\omega| \geqslant 1\}.$$

Для точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ из области $\overline{\mathbb{C}} \setminus I$ положим $\omega_k = \varphi(z_k), k = 1, 2, \ldots, n$, и

$$B_n(z) = b_n(\varphi(z)), z \in \Theta.$$

Тогда $B_n(z)$ мероморфна в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus I$ и непрерывна на римановой поверхности Θ, за исключением точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, которые являются ее полюсами (каждый полюс выписан столько раз, какова его кратность) и $|B_n(z)| = 1$ при $z \in \partial\Theta$.

В дальнейшем для спрямляемой кривой $\Gamma \subset \mathbb{C}$ через $|\Gamma|$ обозначаем ее длину. Пусть K и M – непустые множества в $\mathbb{C}$. Через $\rho(K, M)$ обозначаем расстояние между K и M, т.е.

$$\rho(K, M) = \inf\{|z - \zeta| : z \in K, \zeta \in M\}.$$

Для $z \in \mathbb{C}$ полагаем $\rho(z, M) = \rho(\{z\}, M)$. Через ∂K обозначаем границу множества K. Различные варианты следующей леммы 4 имеются в работах второго из авторов [11], Данченко [12] и Дынькина [13] (смотрите также обзор [8]).

Лемма 4. *Пусть $B_n(z)$ – построенная выше мероморфная функция. Тогда существует замкнутое множество $\Phi \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus I$, состоящее из не более чем n компонент и удовлетворяющее следующим условиям*:

(i) $\Phi \supset \{z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus I : |B_n(z)| \geqslant 2\}$;
(ii) *каждая компонента* Φ *содержит, по крайне мере, один полюс* $B_n(z)$;
(iii) *граница каждой компоненты* Φ *является кусочно-гладкой жордановой кривой*;
(iv) $\partial\Phi = \bigcup_{j=1}^{l} \Gamma_j$, *где* $l \leqslant c_1 n$, *а* Γ_j – *простые кусочно-гладкие кривые, которые могут пересекаться, разве лишь, по концевым точкам*;
(v) *для каждого* $j = 1, 2, \dots, l$ *имеют место неравенства*

$$c_2\rho(\Gamma_j, I) \leqslant |\Gamma_j| \leqslant \rho(\Gamma_j, I), \qquad \max\{\rho(t, I) : t \in \Gamma_j\} \leqslant 1.$$

Лемма 5. *Пусть* $\theta \in [0, 1]$, $0 < \beta < \gamma < \infty$ *и* $t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus I$ *такое, что* $\rho(t, I) =: \rho \leqslant 1$. *Тогда*

$$\int_I \frac{dx}{(1-x^2)^{\theta-\beta}|t-x|^{1-\theta+\gamma}} \leqslant c \cdot \frac{|1-t^2|^\beta}{\rho^\gamma}, \qquad c = c(\theta, \beta, \gamma) > 0. \tag{3.2}$$

Доказательство. Интеграл в неравенстве (3.2) обозначим через S, а подынтегральную функцию – через $\omega(x)$. Рассмотрим сначала случай $\theta \leqslant \beta$. Введем множества

$$A_k = \{x \in I : 2^k\rho \leqslant |t-x| < 2^{k+1}\rho\}, \qquad k = 0, 1, \dots, k_0,$$

где k_0 – максимальное $k \in \mathbb{N}_0$, для которого $A_k \neq \varnothing$.

Для любых A_k и $x \in A_k$ легко найти, что $1 - x^2 \leqslant |1-t^2| + 3 \cdot 2^{k+1}\rho$. С учетом определения множества A_k и условия $\theta \leqslant \beta$, получаем

$$\int_{A_k} \omega(x)\,dx \leqslant \frac{(|1-t^2| + 3\cdot 2^{k+1}\rho)^{\beta-\theta}}{(2^k\rho)^{1-\theta+\gamma}}\,2^{k+2}\rho \leqslant c_1\frac{|1-t^2|^{\beta-\theta}}{(2^k\rho)^{\gamma-\theta}} + c_2\frac{1}{(2^k\rho)^{\gamma-\beta}}.$$

Поскольку $\gamma - \theta > 0$ и $\gamma - \beta > 0$, то отсюда немедленно находим

$$S = \sum_{k=0}^{k_0}\int_{A_k}\omega(x)\,dx \leqslant \left[c_3\left(\frac{\rho}{|1-t^2|}\right)^\theta + c_4\left(\frac{\rho}{|1-t^2|}\right)^\beta\right]\cdot\frac{|1-t^2|^\beta}{\rho^\gamma} \leqslant c_5\frac{|1-t^2|^\beta}{\rho^\gamma}.$$

Здесь при получении последнего неравенства мы воспользовались тем, что

$$\rho \leqslant |1-t^2|. \tag{3.3}$$

Таким образом, неравенство (3.2) доказано для $\theta \leqslant \beta$.

Рассмотрим сейчас случай $\theta > \beta$. Здесь мы воспользуемся следующим неравенством для перестановок функций [14; теорема 378]. Пусть функции f и g неотрицательны и интегрируемы на отрезке I. Через F и G обозначим соответственно убывающие на $[0, 2]$ функции, равноизмеримые с f и g. Тогда имеет место неравенство

$$\int_I f(x)g(x)\,dx \leqslant \int_0^2 F(y)G(y)\,dy.$$

Пусть $f(x) = 1/(1-x^2)^{\theta-\beta}$ и $g(x) = 1/|t-x|^{1-\theta+\gamma}$. Несложно найти, что при $y \in (0, 2]$ для $F(y)$ и $G(y)$ выполняются неравенства

$$F(y) \leqslant \left(\frac{2}{y}\right)^{\theta-\beta}, \qquad G(y) \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{y^2+4\rho^2}}\right)^{1-\theta+\gamma}.$$

Следовательно,
$$S \leqslant \int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{y}\right)^{\theta-\beta} \left(\frac{2}{\sqrt{y^2+4\rho^2}}\right)^{1-\theta+\gamma} dy. \tag{3.4}$$
Через S_1 и S_2 обозначим соответственно вклады в интеграл из неравенства (3.4) по участкам $[0, 2\rho]$ и $[2\rho, +\infty)$. Оценим вклады S_1 и S_2:
$$S_1 \leqslant \int_0^{2\rho} \left(\frac{2}{y}\right)^{\theta-\beta} \left(\frac{1}{\rho}\right)^{1-\theta+\gamma} dy = \frac{2}{1+\beta-\theta} \cdot \frac{1}{\rho^{\gamma-\beta}},$$
$$S_2 \leqslant \int_{2\rho}^{+\infty} \left(\frac{2}{y}\right)^{\theta-\beta} \cdot \left(\frac{2}{y}\right)^{1-\theta+\gamma} dy = \frac{2}{\gamma-\beta} \cdot \frac{1}{\rho^{\gamma-\beta}}.$$
Отсюда с учетом (3.3) и (3.4) получим (3.2) для $\theta > \beta$. Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 2. Если $n = 0$, то ввиду (2.1), $\widehat{r}(x) = 0$ при $x \in I$ и утверждение теоремы очевидно.

Пусть сейчас $n \geqslant 1$. Не ограничивая общности, можем считать, $\deg r = n$ и $\|r\|_{C(I)} = 1$. Пусть $z_1, z_2, \dots, z_n$ – полюсы рациональной функции r, выписанные с учетом кратности. Положим $R(z) = r(z)/B_n(z)$, где функция $B_n(z)$ определена выше с использованием полюсов r. Очевидно, $R(z)$ аналитична в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus I$, непрерывна на Θ и $|R(z)| \leqslant 1$ при $z \in \partial\Theta$. Из принципа максимума модуля аналитической функции находим, что $|r(z)/B_n(z)| = |R(z)| \leqslant 1$ при $z \in \Theta$. Следовательно,
$$|r(z)| \leqslant 2, \qquad z \in \partial\Phi, \tag{3.5}$$
где Φ – множество из леммы 4.

Используя лемму 2, теорему Коши для многосвязной области и формулу Лейбница, находим, что при надлежащей ориентации $\partial\Phi$ имеет место равенство
$$\widehat{r}^{(s)}(x) = \sum_{\nu=0}^{s} \frac{s!}{2\pi\nu!} \cdot \frac{p_{s\nu}(x)}{(1-x^2)^{\nu-1/2}} \int_{\partial\Phi} \frac{r(t)\,dt}{(t-x)^{s+1-\nu}\sqrt{1-t^2}}, \qquad x \in (-1,1),$$
где $p_{s\nu}$ – алгебраические многочлены степени ν, зависящие лишь от s и ν. Поэтому, воспользовавшись неравенством (3.5) и леммой 4 (iv), получим, что
$$|\widehat{r}^{(s)}(x)| \leqslant c_1(s) \sum_{\nu=0}^{s} \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{(1-x^2)^{\nu-1/2}} \int_{\Gamma_j} \frac{|dt|}{|t-x|^{s+1-\nu}|1-t^2|^{1/2}}, \qquad x \in (-1,1).$$
Выберем произвольно точки $t_j \in \Gamma_j$ и положим $\rho_j = \rho(t_j, I)$. Тогда из последнего неравенства и леммы 4 (v) найдем, что
$$|\widehat{r}^{(s)}(x)| \leqslant c_2(s) \sum_{\nu=0}^{s} \sum_{j=1}^{l} \frac{\rho_j}{(1-x^2)^{\nu-1/2}|t_j-x|^{s+1-\nu}|1-t_j^2|^{1/2}}, \qquad x \in (-1,1).$$
Следовательно,
$$\int_I |\widehat{r}^{(s)}(x)|^{1/s} dx \leqslant c_2(s)^{1/s} \sum_{\nu=0}^{s} \sum_{j=1}^{l} \frac{\rho_j^{1/s}}{|1-t_j^2|^{1/2s}} \int_I \frac{dx}{(1-x^2)^{\nu/s-1/(2s)}|t_j-x|^{1-(\nu-1)/s}}.$$
Остается воспользоваться леммой 5 и тем,что $l \leqslant c(s)n$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть* $r \in \mathcal{R}_n$, $n \in \mathbb{N}$, *не имеет полюсов на* I. *Тогда*

$$\|\widehat{r}\|_{C(I)} \leqslant cn\|r\|_{C(I)}.$$

Доказательство. Поскольку $\widehat{r}(-1) = 0$ (см. лемму 1), то, используя теорему 2 при $s = 1$, получим

$$\|\widehat{r}\|_{C(I)} \leqslant \|\widehat{r}'\|_{L_1(I)} \leqslant cn\|r\|_{C(I)}.$$

Теорема 3 доказана.

4. Пространство Бесова и его описание с помощью наилучших кусочно-полиномиальных алгебраических и тригонометрических приближений. Пусть, как и в п. 2, $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$ – тор. Пространства $C(\mathbb{T})$ и $L_p(\mathbb{T})$, $0 < p \leqslant \infty$, а также нормы (или квазинормы) $\|\cdot\|_{C(\mathbb{T})}$ и $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(\mathbb{T})}$ в этих пространствах определяются аналогично, как и в п. 1 для пространств $C(A)$ и $L_p(A)$.

Для $n, s \in \mathbb{N}$ через $\Pi_n^s(\mathbb{T})$ обозначим множество алгебраических кусочно-полиномиальных функций, определенных на $\mathbb{T}$, степени не выше $s-1$ с не более чем n узлами. Именно, $\varphi \in \Pi_n^s(\mathbb{T})$, если функция $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-периодична и $\varphi|_{[0,2\pi]} \in \Pi_n^s([0, 2\pi])$.

Пусть $\mathcal{T}_n$ – множество тригонометрических полиномов степени не выше $n, n \in \mathbb{N}_0$. Множества тригонометрических кусочно-полиномиальных функций $\Sigma_n^s(A)$ и $\Sigma_n^s(\mathbb{T})$ вводятся аналогично $\Pi_n^s(A)$ и $\Pi_n^s(\mathbb{T})$ соответственно с заменой $\mathcal{P}_{s-1}$ на $\mathcal{T}_{s-1}$.

Для функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p \leqslant \infty$, введем наилучшее приближение множествами $\Pi_n^s(\mathbb{T})$ и $\Sigma_n^s(\mathbb{T})$ соответственно, т.е.

$$\begin{aligned} E_n^{(s)}(f)_{L_p(\mathbb{T})} &= \inf\{\|f - \varphi\|_{L_p(\mathbb{T})} : \varphi \in \Pi_n^s(\mathbb{T})\}, \\ \mathcal{E}_n^{(s)}(f)_{L_p(\mathbb{T})} &= \inf\{\|f - \psi\|_{L_p(\mathbb{T})} : \psi \in \Sigma_n^s(\mathbb{T})\}. \end{aligned}$$

Пространство Бесова $B_p^\alpha(\mathbb{T})$ функций, определенных на $\mathbb{T}$, вводится аналогично тому, как определялось пространство $B_p^\alpha(A)$ функций на отрезке A. Отличие заключается лишь в том, что квазинорма в (1.1) вычисляется в $L_p(\mathbb{T})$.

В следующей теореме 4 эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (ii) известна (см., например, [2]). Основная цель этой части работы заключается в том, чтобы к условиям (i) и (ii) добавить еще одно эквивалентное условие (iii).

Теорема 4. *Пусть* $\alpha > 0$, $0 < p < \infty$, $1/\sigma = \alpha + 1/p$, s *и* l *из* $\mathbb{N}$ *такие, что* $s > \alpha$ *и* $2l - 1 > \alpha$. *Тогда следующие условия равносильны*:

(i) $f \in B_\sigma^\alpha(\mathbb{T})$;

(ii) $$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}(n^\alpha E_n^{(s)}(f)_{L_p(\mathbb{T})})^\sigma < \infty;$$

(iii) $$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}(n^\alpha \mathcal{E}_n^{(l)}(f)_{L_p(\mathbb{T})})^\sigma < \infty.$$

Ввиду сказанного выше для доказательства теоремы 4 достаточно получить эквивалентность (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Для этого нам понадобятся вспомогательные утверждения.

Лемма 6. *Пусть $\omega \in \mathcal{T}_{l-1}$, $l \in \mathbb{N}$, отрезок $A \subset [0, 2\pi]$ и $0 < p \leqslant \infty$. Тогда для любых $s, m \in \mathbb{N}$ существует $\lambda \in \Pi^s_m(A)$ такая, что*

$$\|\omega - \lambda\|_{L_p(A)} \leqslant \frac{c(p, s, l)}{m^s} \|\omega\|_{L_p(A)}.$$

Доказательство. Считаем $l \geqslant 2$, так как случай $l = 1$ очевиден. Пусть

$$\omega(t) = \sum_{j=-(l-1)}^{l-1} a_j e^{ijt}, \qquad a_j \in \mathbb{C}.$$

Положим

$$\Gamma = \{e^{it} : t \in A\}, \qquad \Omega(z) = \sum_{j=-(l-1)}^{l-1} a_j z^{j+l-1}.$$

Используя [15; лемма 2.5], находим, что для любого $\nu \in \mathbb{N}_0$ выполняется неравенство

$$|\Omega^{(\nu)}(z)| \leqslant \frac{c_1(\nu, l)}{|\Gamma|^{\nu+1/p}} \|\Omega\|_{L_p(\Gamma)}, \qquad z \in \Gamma. \tag{4.1}$$

Поскольку $\|\Omega\|_{L_p(\Gamma)} = \|\omega\|_{L_p(A)}$, $|\Gamma| = |A|$ и $\omega(t) = e^{-i(l-1)t}\Omega(e^{it})$, то из (4.1) следует, что

$$|\omega^{(s)}(t)| \leqslant \frac{c_2(s, l)}{|A|^{s+1/p}} \|\omega\|_{L_p(A)}, \qquad t \in A.$$

Из последнего неравенства и [2; гл. 7, теорема 7.2] находим, что существует функция $\lambda \in \Pi^s_m(A)$, для которой

$$|\omega(t) - \lambda(t)| \leqslant \frac{c_3(s, l)}{m^s |A|^{1/p}} \|\omega\|_{L_p(A)}, \qquad t \in A. \tag{4.2}$$

Тем самым, лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть отрезок $A \subset [0, 2\pi]$ такой, что $0 < |A| \leqslant \pi$, функция f непрерывно дифференцируема $2l - 1$ раз, $l \in \mathbb{N}$, на A. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ существует $\mu \in \sum^l_m(A)$ такая, что*

$$|f(t) - \mu(t)| \leqslant c(l) \biggl(\frac{|A|}{m}\biggr)^{2l-1} \sum_{k=1}^{2l-1} \|f^{(k)}\|_{C(A)}, \qquad t \in A. \tag{4.3}$$

Доказательство. Пусть $A = [\alpha, \beta]$, где $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi$ и $\beta - \alpha \leqslant \pi$. Положим

$$\Gamma = \{z = e^{it} : \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}, \quad F(z) = F(e^{it}) = (e^{it})^{l-1} f(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Применим формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Для $z \in \Gamma$ находим

$$F(z) - \sum_{k=0}^{2l-2} \frac{F^{(k)}(e^{i\alpha})}{k!} (z - e^{i\alpha})^k = \frac{1}{(2l-2)!} \int_{e^{i\alpha}}^{z} F^{(2l-1)}(\xi)(z - \xi)^{2l-2}\, d\xi.$$

Здесь интегрирование проводится вдоль части дуги Г. Следовательно, при $t \in [\alpha, \beta]$

$$f(t) - e^{-i(l-1)t} \sum_{k=0}^{2l-2} \frac{F^{(k)}(e^{i\alpha})}{k!}(e^{it} - e^{i\alpha})^k = \frac{e^{-i(l-1)t}}{(2l-2)!} \int_{e^{i\alpha}}^{e^{it}} F^{(2l-1)}(\xi)(e^{it} - \xi)^{2l-2}\, d\xi.$$

Отсюда следует неравенство (4.3) для $m = 1$.

Если $m \geqslant 2$, то отрезок A следует разбить на m равных подотрезков A_k, $k = 1, 2, \dots, n$, и каждому A_k найти соответствующую функцию $\mu_k \in \mathcal{T}_{l-1}$. Тогда функция $\mu(t) = \sum_{k=1}^m \mu_k(t)\chi_k(t)$ будет искомой. Здесь χ_k – характеристическая функция отрезка A_k. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть $\theta \in \mathcal{P}_{s-1}$, $s \in \mathbb{N}$, отрезок $A \subset [0, 2\pi]$ и $0 < p \leqslant \infty$. Тогда для любых $l, m \in \mathbb{N}$ существует $\mu \in \sum_m^l(A)$ такая, что*

$$\|\theta - \mu\|_{L_p(A)} \leqslant \frac{c(p, s, l)}{m^{2l-1}} \|\theta\|_{L_p(A)}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 6. В этом случае для получения аналога неравенства (4.2) следует воспользоваться леммой 7. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Пусть $0 < p \leqslant \infty$ и $l, m, n, s \in \mathbb{N}$, причем $m \geqslant n$. Тогда*

(i) *для любой функции $\psi \in \Sigma_n^l(\mathbb{T})$ существует $\varphi \in \Pi_m^s(\mathbb{T})$ такая, что*

$$\|\psi - \varphi\|_{L_p(\mathbb{T})} \leqslant c_1(p, s, l) \left(\frac{n}{m}\right)^s \|\psi\|_{L_p(\mathbb{T})};$$

(ii) *для любой функции $\varphi \in \Pi_n^s(\mathbb{T})$ существует $\psi \in \Sigma_m^l(\mathbb{T})$ такая, что*

$$\|\varphi - \psi\|_{L_p(\mathbb{T})} \leqslant c_2(p, s, l) \left(\frac{n}{m}\right)^{2l-1} \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{T})}.$$

Доказательство. (i) Пусть $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = 2\pi$ – разбиение отрезка $[0, 2\pi]$ такое, что

$$\psi_k := \psi|_{(t_k, t_{k+1})} \in \mathcal{T}_{l-1}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Положим $m_1 = [m/n]$, где $[a]$ – целая часть числа a. Согласно лемме 6 для каждой ψ_k существует $\varphi_k \in \Pi_{m_1}^{(s)}(A_k)$, $A_k := [t_k, t_{k+1}]$, такая, что

$$\|\psi_k - \varphi_k\|_{L_p(A_k)} \leqslant \frac{c_3(p, s, l)}{m_1^s} \|\psi_k\|_{L_p(A_k)}.$$

Следовательно, нужному условию удовлетворяет функция

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(t)\chi_k(t),$$

где χ_k – характеристическая функция отрезка A_k.

Утверждение (ii) доказывается аналогично утверждению (i), с применением леммы 8. Лемма 9 доказана.

Следующая лемма 10 доказывается с использованием леммы 9 аналогично доказательству теорем 6.1 и 6.2 из [10; гл. 10]. Здесь полагаем

$$E_0^{(s)}(f)_{L_p(\mathbb{T})} = \mathcal{E}_0^{(l)}(f)_{L_p(\mathbb{T})} = \|f\|_{L_p(\mathbb{T})}.$$

Лемма 10. *Пусть* $0 < p \leqslant \infty$, $q = \min\{1, p\}$, $l, s \in \mathbb{N}$, $0 < \gamma < s$ *и* $0 < \delta < 2l - 1$. *Тогда для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T})$ *и любого* $n \in \mathbb{N}$ *выполняются неравенства*

$$E_n^{(s)}(f)_{L_p(\mathbb{T})} \leqslant \frac{c_1}{n^\gamma}\biggl\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Bigl(k^\gamma \mathcal{E}_{k-1}^{(l)}(f)_{L_p(\mathbb{T})}\Bigr)^q\biggr\}^{1/q},$$

$$\mathcal{E}_n^{(l)}(f)_{L_p(\mathbb{T})} \leqslant \frac{c_2}{n^\delta}\biggl\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Bigl(k^\delta E_{k-1}^{(s)}(f)_{L_p(\mathbb{T})}\Bigr)^q\biggr\}^{1/q},$$

где положительные величины c_1 *и* c_2 *не зависят от* f *и* n.

Доказательство теоремы 4. Как отмечено выше, эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (ii) известна. Поэтому достаточно получить эквивалентность (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Последнее легко получить из леммы 10 (см. также [1; § 2]). Теорема 4 доказана.

5. Доказательство основного результата. Как отмечено в п. 1 эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (iii) в теореме 1 известна. Поэтому для ее доказательства нам достаточно получить импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) и (ii) $\Rightarrow$ (iii). Мы начнем с первой из указанных импликаций. С этой целью приведем некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть функция $g \in C(I)$ и $s \in \mathbb{N}$. Тогда (см., например, [10; гл. 10, теорема 6.1])

$$E_n^{(s)}(g)_\infty \leqslant \frac{c(s)}{n^s}\biggl(\sum_{k=0}^{n}(R_k(g)_\infty)^{1/s}\biggr)^s, \qquad n = 1, 2, 3, \dots. \tag{5.1}$$

В следующей теореме 5 дается аналог (5.1) для сопряженной функции $\widehat{g}$.

Теорема 5. *Пусть* $g \in C(I)$ *и удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_k(g) < \infty. \tag{5.2}$$

Тогда $\widehat{g}$ *абсолютно непрерывна на* I *и для* $s \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$E_n^{(s)}(\widehat{g})_\infty \leqslant \frac{c(s)}{n^s}\biggl(\sum_{k=0}^{n}(R_k(g)_\infty)^{1/s}\biggr)^s + \frac{c}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} R_k(g)_\infty, \qquad n = 1, 2, 3\dots. \tag{5.3}$$

Доказательство. Долженко [9] показал, что если $g \in C(I)$ и удовлетворяет условию (5.2), то g абсолютно непрерывна на I. Эти же рассуждения из [9] с применением теоремы 2 при $s = 1$ и теоремы 3 показывают, что $\widehat{g}$ также абсолютно непрерывна на I и при этом

$$\|\widehat{g}'\|_1 \leqslant c\sum_{k=0}^{\infty} R_k(g)_\infty.$$

Следовательно, согласно [2; гл. 12, теорема 4.3] имеет место неравенство

$$E_n^{(1)}(\widehat{g})_\infty \leqslant \frac{c}{n}\sum_{k=0}^{\infty} R_k(g)_\infty, \qquad n=1,2,3,\dots . \tag{5.4}$$

Таким образом, неравенство (5.3) доказано для $s=1$. Рассмотрим сейчас случай $s\geqslant 2$. Пусть $r_k\in\mathcal{R}_k$, $k\in\mathbb{N}_0$, – элемент наилучшего приближения функции g, т.е.

$$\|g-r_k\|_\infty = R_k(g)_\infty.$$

Ввиду (5.4) можем считать $n\geqslant 2$. Положим $m=[n/2]$, где $[a]$ – целая часть числа a, и $g_m=g-r_m$. Тогда $g=r_m+g_m$ и, следовательно,

$$E_n^{(s)}(\widehat{g})_\infty \leqslant E_m^{(s)}(\widehat{r}_m)_\infty + E_m^{(1)}(\widehat{g}_m)_\infty. \tag{5.5}$$

Далее находим, что

$$\begin{aligned}
&R_k(g_m)_\infty \leqslant \|g_m\|_\infty = \|g-r_m\|_\infty = R_m(g)_\infty \qquad &&\text{при}\quad k=0,1,2,\dots,2m-1,\\
&R_k(g_m)_\infty = R_k(g-r_m)_\infty \leqslant R_{k-m}(g)_\infty &&\text{при}\quad k=2m,2m+1,2m+2,\dots .
\end{aligned}$$

Следовательно, согласно (5.4) справедливо неравенство

$$E_m^{(1)}(\widehat{g}_m)_\infty \leqslant 2c_1R_m(g)_\infty + \frac{c_1}{m}\sum_{k=m}^{\infty} R_k(g)_\infty. \tag{5.6}$$

Для r_m имеем

$$\begin{aligned}
&R_k(r_m)_\infty \leqslant R_k(g)_\infty + \|f-r_m\|_\infty \leqslant 2R_k(g)_\infty \qquad &&\text{при}\quad k=0,1,2,\dots,m-1,\\
&R_k(r_m)_\infty = 0 &&\text{при}\quad k=m,m+1,m+2,\dots .
\end{aligned}$$

Для оценки $E_m^{(s)}(\widehat{r}_m)$ следует применить рассуждения из [10], использованные при доказательстве (5.1). В данной ситуации эти рассуждения будут основаны на теореме 2 и лемме 1. В результате мы получим

$$E_m^{(s)}(\widehat{r}_m)_\infty \leqslant \frac{c(s)}{m^s}\left(\sum_{k=0}^{m-1}(R_k(g)_\infty)^{1/s}\right)^s. \tag{5.7}$$

Из неравенств (5.5)–(5.7) следует (5.3). Теорема 5 доказана.

Доказательство импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) проводится аналогично, доказательству импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) из [1; теорема 2], полученной в периодическом случае. При этом нужно использовать неравенство (5.1) и теорему 5.

Доказательство импликации (ii) $\Rightarrow$ (iii). Положим $f(\theta)=g(\cos\theta), \theta\in\mathbb{T}$. Тогда из условия (ii) с учетом леммы 3 получим

$$\begin{cases}
\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{E}_k^{(s)}(f)_\infty)^{1/\alpha}<\infty,\\
\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{E}_k^{(s)}(\widetilde{f})_\infty)^{1/\alpha}<\infty.
\end{cases}$$

Используя эти соотношения и лемму 10, легко найти, что

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} (E_k^{(s)}(f)_\infty)^{1/\alpha} < \infty, \\ \sum_{k=0}^{\infty} (E_k^{(s)}(\widetilde{f})_\infty)^{1/\alpha} < \infty. \end{cases}$$

Используя теорему 2 из [1], заключаем, что $f \in B^\alpha_{1/\alpha}(\mathbb{T})$. В частности, $f|_{[0,\pi]} \in B^\alpha_{1/\alpha}([0,\pi])$. Поскольку $g(x) = f(\arccos x)$, $x \in I$, то (см. [16], [17])

$$g \in B^\alpha_{1/\alpha}(I).$$

Теорема 1 доказана.

В заключение отметим, что теорему 1 можно доказать короче, установив эквивалентность (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Мы избрали метод, изложенный в данной статье, так как этот метод, как несложно заметить, позволяет также получить импликацию "$\Rightarrow$" следующей гипотезы.

Пусть $\alpha > 1$, $s \in \mathbb{N} \cap (\alpha, \infty)$ и $g \in C(I)$. Тогда для $n \in \mathbb{N}$ имеет место эквивалентность

$$R_n(g)_\infty = O(n^{-\alpha}) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} E_n^{(s)}(g)_\infty = O(n^{-\alpha}), \\ E_n^{(s)}(\widehat{g})_\infty = O(n^{-\alpha}). \end{cases}$$

В этом смысле ситуация аналогична периодическому случаю, рассмотренному в [1].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. А. Пекарский, "Сопряженные функции и их связь с равномерными рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями", *Матем. сб.*, **206**:2 (2015), 175–182.

[2] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Grundlehren Math. Wiss., **303**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[3] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.

[4] F. W. King, *Hilbert Transforms*, Vol. 1, Encyclopedia Math. Appl., **124**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.

[5] А. А. Пекарский, "Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке", *Матем. сб.*, **133**:1 (1987), 86–102.

[6] В. П. Моторный, "Приближение одного класса сингулярных интегралов алгебраическими многочленами с учетом положения точки на отрезке", *Функциональные пространства, гармонический анализ, дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **232**, Наука, М., 2001, 268–285.

[7] В. Р. Мисюк, А. А. Пекарский, "Сопряженные функции на отрезке и соотношения для их наилучших равномерных полиномиальных приближдений", *Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук*, 2015, № 2, 37–40.

[8] A. A. Pekarskii, "Approximation by rational functions with free poles", *East J. Approx.*, **13**:3 (2007), 227–319; Corrigendum *East J. Approx.*, **13**:4 (2007), 483.

[9] Е. П. Долженко, "Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций", *Матем. сб.*, **56**:4 (1962), 403–432.

[10] G. G. Lorentz, M. v. Golitschek, Y. Makovoz, *Constructive Approximation. Advanced Problems*, Grundlehren Math. Wiss., **304**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[11] А. А. Пекарский, "Обобщенная рациональная аппроксимация в круге", *Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук*, 1990, № 6, 9–14.

[12] В. И. Данченко, "О рациональных составляющих мероморфных функций и их производных", *Anal. Math.*, **16**:4 (1990), 241–255.

[13] E. Dyn'kin, "Inequalities for rational functions", *J. Approx. Theory*, **91**:3 (1997), 349–367.

[14] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.

[15] А. А. Пекарский, "Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций в пространствах L_p, $0 < p < 1$, на кривых Лаврентьева", *Алгебра и анализ*, **16**:3 (2004), 143–170.

[16] В. В. Пеллер, "Рациональная аппроксимация и гладкость функций", *Исследования по линейным операторам и теории функций. X*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **107**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1982, 150–159.

[17] В. В. Пеллер, "Описание операторов Ганкеля класса $\mathfrak{S}_p$ при $p > 0$, исследование скорости рациональной аппроксимации и другие приложения", *Матем. сб.*, **122**:4 (1983), 481–510.

Т. С. Мардвилко
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники, г. Минск
E-mail: mardvilko@mail.ru

Поступило
10.02.2015
Исправленный вариант
30.06.2015

А. А. Пекарский
Белорусский государственный университет, г. Минск
E-mail: pekarskii@gmail.com