



Общероссийский математический портал

А. В. Кудин, С. В. Чопоров, С. И. Гоменюк, Осесимметричный изгиб круглых и кольцевых трехслойных пластин с нелинейно-упругим наполнителем, *Матем. моделирование*, 2017, том 29, номер 2, 63–78

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.117.156.153

9 января 2025 г., 11:08:44



ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

© 2017 г. *А.В. Кудин, С.В. Чопоров, С.И. Гоменюк*

Запорожский национальный университет, Запорожье, Украина
alexkudin@znu.edu.ua, s.choporoff@znu.edu.ua, serega@znu.edu.ua

Предложено сравнение аналитической и конечно-элементной моделей осесимметричного изгиба круглой трехслойной пластины. Получены дифференциальные уравнения изгиба круговой трехслойной пластины с изотропными внешними слоями и нелинейно-упругим наполнителем. С помощью метода малого параметра нелинейные дифференциальные уравнения сведены к последовательности уточняющих друг друга линейных уравнений. Линейные дифференциальные уравнения решены путем сведения к уравнению Бесселя. Результаты вычислений по аналитической и конечно-элементной моделям сравниваются с результатами других авторов на примере следующих задач: 1) осесимметричного поперечного изгиба круглой трехслойной пластины, 2) осесимметричного поперечного изгиба кольцевой трехслойной пластины. Описан эффект влияния нелинейной упругости материала наполнителя на напряженно-деформированное состояние пластины.

Ключевые слова: трехслойная пластина, нелинейно-упругий материал, метод конечных элементов, метод возмущений.

AXISYMMETRIC BENDING OF CIRCULAR AND ANNULAR SANDWICH PLATES WITH THE NONLINEAR ELASTIC CORE MATERIAL

A.V. Kudin, S.V. Choporov, S.I. Gomenyuk

Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, Ukraine

This paper compares the analytical model with the FEM based numerical model of the axisymmetric bending of circular sandwich plates. Also, the paper describes equations of the bending of circular symmetrical sandwich plates with isotropic face sheets and the nonlinear elastic core material. The method for constructing an analytical solution of nonlinear differential equations has been described. The perturbation method for differential equations with small parameters is used to represent nonlinear differential equations as a sequence of linear equations. Linear differential equations are reduced to Bessel's equation. We compare results of analytical and FEM models with results of other researches using two problems: 1) the problem of axisymmetric transverse bending of a circular sandwich plate, 2) the problem of axisymmetric transverse bending of an annular sandwich plate. The effect of accounting nonlinear elastic core material on the strain state of the sandwich plate is described.

Key words: circular sandwich plate, nonlinear elastic material, finite element method, perturbation method.

1. Введение

Начиная с 40-х годов XX века в авиастроении стали широко применяться трехслойные элементы конструкций. На данный момент трехслойные пластины и оболочки используются в авиа- и судостроении, космической промышленности, гражданском строительстве, радиоэлектронике и других отраслях народного хозяйства. Трехслойная пластина или оболочка состоит из двух внешних слоев высокопрочного материала, связанных между собой средним слоем относительно маложесткого материала. Заполнитель обеспечивает совместную работу и устойчивость внешних слоев. Внешние слои, как правило, изготавливаются из металла или композитных материалов. В качестве материала заполнителя используются армированные и неармированные пенопласты, резина, бальза, металл в виде гофрированного листа, сотовых элементов и т.п.

Трехслойные элементы конструкций обеспечивают более высокую прочность и устойчивость в сравнении с однослойными конструкциями той же массы. А использование различных материалов в качестве заполнителя обеспечивает такие дополнительные свойства конструкции как тепло- и звукоизоляция.

На данный момент опубликовано большое количество работ, посвященных анализу напряженно-деформированного состояния трехслойных пластин и оболочек, подробный перечень которых можно найти в известных обзорах: А. Noog [1], Л.М. Куршин [2], Е. Carrera [3]. Экспериментальному и теоретическому исследованию посвящены работы [4,5].

Подавляющее большинство исследований по статике и динамике трехслойных конструкций выполнено в предположении линейной зависимости между напряжениями и деформациями. Однако такие материалы, как медь, сплав алюминиевой бронзы, мартеповская сталь, дюралюминий, полимерные материалы и композиты, уже на стадии малых деформаций отклоняются от закона упругости Гука [6]. Для таких материалов существует область деформаций, в которой еще может применяться геометрическая линеаризация основных уравнений теории упругости, но закон упругости Гука уже не описывает поведение материала с достаточной точностью. Поэтому актуальной является проблема исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных пластин и оболочек с учетом нелинейной упругости слоев. В такой физически нелинейной постановке выполнены исследования напряженно-деформированного состояния однослойных и трехслойных пластин в [6,7].

В численном анализе напряженно-деформированного состояния слоистых тел и конструкций можно выделить два основных подхода [8]:

1. Методы и техники, которые явным образом моделируют разрывность свойств материала: анализ разрывных деформаций (the Discontinuous Deformation Analysis) [9] и метод дискретных элементов (the Discrete Element Method) [10,11]. Также существуют реализации методов конечных элементов (МКЭ) и конечных разностей (МКР) с учетом разрывности свойств материала (структуры слоев). Использование методов этой группы позволяет весьма точно представить природу многослойных конструкций.

2. Методы и техники, основанные на построении эквивалентной непрерывной модели свойств материала. При таком подходе в МКЭ могут добавляться дополнительные степени свободы, например, вращение в узлах при использовании теории Коссерата (Cosserat theory) [8].

В предложенной работе используется МКЭ на основе явного представления топо-

логии слоев материала: построенные сетки конечных элементов аппроксимируют границы слоев гранями и ребрами конечных элементов.

В статье приведены нелинейные дифференциальные уравнения равновесия круглых трехслойных пластин симметричного строения с изотропными наружными слоями и нелинейно-упругим по [12] изотропным материалом заполнителя (аналитическая модель). Построена конечно-элементная модель изгиба круговых трехслойных пластин.

При разработке моделей напряженно-деформированного состояния трехслойных пластин предполагается, что деформации, вызванные приложенными нагрузками, являются малыми. Это предположение позволяет использовать гипотезы линейной теории упругости при разработке послойной конечно-элементной модели и гипотезы Кирхгофа-Лява для несущих слоев при разработке аналитической модели. Кроме того, аналитическая модель позволяет учитывать нелинейную упругость по Г. Каудереру материала заполнителя пластины. В результате сопоставления обеих моделей в линейном случае можно проверить их адекватность и количественно показать влияние нелинейности заполнителя на напряженно-деформированное состояние пластины.

2. Напряженное состояние пластины

Рассмотрим круглую трехслойную пластину, которая подвергается воздействию произвольной поперечной нагрузки $q(r, \varphi)$. Внешние слои пластины толщинами $h^{(1)}$ и $h^{(2)}$ изготовлены из изотропных материалов, подчиняющихся закону Гука, средний слой пластины толщиной $2h^{(3)}$ выполнен из нелинейно-упругого по [12] изотропного материала (рис.1). Здесь и далее верхний индекс в круглых скобках обозначает номер слоя трехслойной пластины.

Для внешних слоев, вследствие их малой толщины, принимается гипотеза Кирхгофа-Лява. Напряженное состояние в этих слоях определяется законом Гука [16]

$$\sigma_r^{(i)} = \frac{E^{(i)}(\varepsilon_r^{(i)} + \mu^{(i)}\varepsilon_\varphi^{(i)})}{1 - (\mu^{(i)})^2}, \quad \sigma_\varphi^{(i)} = \frac{E^{(i)}(\varepsilon_\varphi^{(i)} + \mu^{(i)}\varepsilon_r^{(i)})}{1 - (\mu^{(i)})^2}, \quad \tau_{r\varphi}^{(i)} = G^{(i)}\varepsilon_{r\varphi}^{(i)} \quad (i=1,2), \quad (1)$$

где $E^{(i)}$, $G^{(i)}$, $\mu^{(i)}$ – модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала соответствующего слоя. Для верхнего слоя ($i=1$) координата z изменяется в пределах $h^{(3)} \leq z \leq h^{(3)} + h^{(1)}$; для нижнего слоя ($i=2$): $-h^{(3)} - h^{(2)} \leq z \leq -h^{(3)}$.

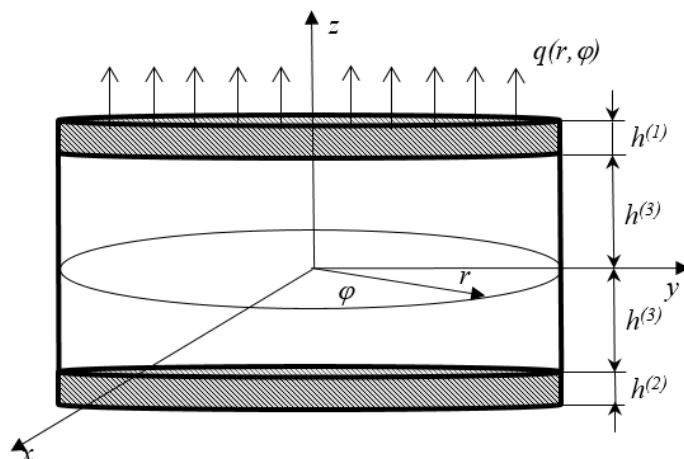


Рис.1. Круглая трехслойная пластина.

Напряженное состояние заполнителя в цилиндрической системе координат определяется выражениями [12]

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(3)} &= 3K^{(3)}(1 + \chi_2 \varepsilon_0^2) \varepsilon_0 + 2G^{(3)}(1 + \gamma_2 \psi_0^2)(\varepsilon_r^{(3)} - \varepsilon_0), \\ \sigma_\varphi^{(3)} &= 3K^{(3)}(1 + \chi_2 \varepsilon_0^2) \varepsilon_0 + 2G^{(3)}(1 + \gamma_2 \psi_0^2)(\varepsilon_\varphi^{(3)} - \varepsilon_0), \\ \tau_{r\varphi}^{(3)} &= G^{(3)}(1 + \gamma_2 \psi_0^2) \varepsilon_{r\varphi}^{(3)}, \quad \tau_{rz}^{(3)} = G^{(3)}(1 + \gamma_2 \psi_0^2) \varepsilon_{rz}^{(3)}, \quad \tau_{\varphi z}^{(3)} = G^{(3)}(1 + \gamma_2 \psi_0^2) \varepsilon_{\varphi z}^{(3)},\end{aligned}\tag{2}$$

где $G^{(3)}$, $K^{(3)}$ – модули сдвига и объемной деформации материала заполнителя (координата z изменяется в пределах $-h^{(3)} < z < h^{(3)}$); ε_0 , ψ_0^2 – среднее относительное удлинение и интенсивность деформаций:

$$\begin{aligned}\psi_0^2 &= \frac{8}{9} \left((\varepsilon_r^{(3)})^2 + (\varepsilon_\varphi^{(3)})^2 + (\varepsilon_z^{(3)})^2 - \varepsilon_r^{(3)} \varepsilon_\varphi^{(3)} - \varepsilon_\varphi^{(3)} \varepsilon_z^{(3)} - \varepsilon_z^{(3)} \varepsilon_r^{(3)} \right) + \\ &+ \frac{2}{3} \left((\varepsilon_{r\varphi}^{(3)})^2 + (\varepsilon_{rz}^{(3)})^2 + (\varepsilon_{\varphi z}^{(3)})^2 \right), \\ \varepsilon_0 &= \frac{1}{3} (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}), \quad \varepsilon_z^{(3)} = -\frac{\mu^{(3)}}{1 - \mu^{(3)}} (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)}), \quad \mu^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{3K^{(3)} - 2G^{(3)}}{3K^{(3)} + G^{(3)}}.\end{aligned}$$

Параметры γ_2 , χ_2 в (2) характеризуют изменение формы и объема элемента конструкции в нелинейно-упругой стадии его деформирования по сравнению с линейно-упругим случаем. Однако как указано в монографиях [6,12], переход материала от линейно-упругой деформации к стадии нелинейно-упругой деформации происходит в основном под воздействием касательных напряжений. Поэтому для физически нелинейных материалов при малых деформациях может быть принято $\chi_2 = 0$.

Для определения параметра γ_2 в [6,12] приведена теоретико-экспериментальная формула $\gamma_2 = -4.5 \left(G^{(3)} \right)^2 \left(3K^{(3)} \right)^{-1} \left(3K^{(3)} + G^{(3)} \right) \tilde{\alpha}$, в которой коэффициент $\tilde{\alpha}$ получают из аппроксимации экспериментальной диаграммы $\sigma_x^{(3)} \sim \varepsilon_x^{(3)}$ кубической параболой $\varepsilon_x^{(3)} = (E^{(3)})^{-1} \left(1 + \tilde{\alpha} (\sigma_x^{(3)})^2 \right) \sigma_x^{(3)}$.

3. Перемещения и деформации пластины

Деформированное состояние пластины определяется радиальными перемещениями $u^{(i)}(r, \varphi)$, угловыми перемещениями $v^{(i)}(r, \varphi)$ точек срединных плоскостей внешних слоев ($i = 1, 2$) и прогибом $w(r, \varphi)$.

Исходя из принятых гипотез, перемещения в плоскостях слоев, параллельных срединным, запишутся в цилиндрической системе координат [7]:

$$\left\{ \begin{array}{l} U^{(i)}(r, \varphi, z) = u^{(i)}(r, \varphi) + z^{(i)} w_{,r} \quad (i=1,2), \\ U^{(3)}(r, \varphi, z) = u^{(1)}(r, \varphi)(1 + \alpha_1(z)) - u^{(2)}(r, \varphi)\alpha_1(z) + (z^{(1)} - \alpha\alpha_1(z)) w_{,r}, \\ V^{(i)}(r, \varphi, z) = v^{(i)}(r, \varphi) + z^{(i)} \frac{w_{,\varphi}}{r} \quad (i=1,2), \\ V^{(3)}(r, \varphi, z) = v^{(1)}(r, \varphi)(1 + \alpha_2(z)) - v^{(2)}(r, \varphi)\alpha_2(z) + (z^{(1)} - \alpha\alpha_2(z)) \frac{w_{,\varphi}}{r}. \end{array} \right. \quad (3)$$

В (3) запятая в нижнем индексе имени функции обозначает операцию дифференцирования по указанной после координате; а также согласно [7] обозначено:

$$z^{(1)} = z - h^{(3)} - \frac{h^{(1)}}{2}, \quad z^{(2)} = z + h^{(3)} + \frac{h^{(2)}}{2},$$

$$\alpha = 2h^{(3)} + \frac{h^{(1)} + h^{(2)}}{2}, \quad \alpha_1(z) = \frac{f_1(z) - f_1(h^{(3)})}{f_1(h^{(3)}) - f_1(-h^{(3)})}, \quad \alpha_2(z) = \frac{f_2(z) - f_2(h^{(3)})}{f_2(h^{(3)}) - f_2(-h^{(3)})}.$$

Функции $f_{1,z}(z)$, $f_{2,z}(z)$ задают законы изменения тангенциальных напряжений $\tau_{rz}^{(3)}$ и $\tau_{\varphi z}^{(3)}$ по толщине среднего слоя.

Относительные деформации в цилиндрической системе координат имеют стандартный вид [12]:

$$\varepsilon_r^{(i)} = U_{,r}^{(i)}, \quad \varepsilon_\varphi^{(i)} = \frac{1}{r} V_{,\varphi}^{(i)} + \frac{U^{(i)}}{r}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^{(i)} = \frac{1}{r} U_{,\varphi}^{(i)} + V_{,r}^{(i)} - \frac{V^{(i)}}{r} \quad (i=1,2);$$

$$\varepsilon_r^{(3)} = U_{,r}^{(3)}, \quad \varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r} V_{,\varphi}^{(3)} + \frac{U^{(3)}}{r}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^{(3)} = \frac{1}{r} U_{,\varphi}^{(3)} + V_{,r}^{(3)} - \frac{V^{(3)}}{r}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_{rz}^{(3)} = U_{,z}^{(3)} + w_{,r}, \quad \varepsilon_{\varphi z}^{(3)} = V_{,z}^{(3)} + \frac{1}{r} w_{,\varphi}.$$

Функционал полной потенциальной энергии круглой трехслойной пластины под действием поперечной распределенной нагрузки примет вид

$$E = \frac{1}{2} \iint \left[\int_{h^{(3)}}^{h^{(3)}+h^{(1)}} \left(\sigma_r^{(1)} \varepsilon_r^{(1)} + \sigma_\varphi^{(1)} \varepsilon_\varphi^{(1)} + \tau_{r\varphi}^{(1)} \varepsilon_{r\varphi}^{(1)} \right) dz + \right. \\ \left. + \int_{-h^{(3)}-h^{(2)}}^{-h^{(3)}} \left(\sigma_r^{(2)} \varepsilon_r^{(2)} + \sigma_\varphi^{(2)} \varepsilon_\varphi^{(2)} + \tau_{r\varphi}^{(2)} \varepsilon_{r\varphi}^{(2)} \right) dz + \right. \\ \left. + \int_{-h^{(3)}}^{h^{(3)}} \left(\sigma_r^{(3)} \varepsilon_r^{(3)} + \sigma_\varphi^{(3)} \varepsilon_\varphi^{(3)} + \tau_{r\varphi}^{(3)} \varepsilon_{r\varphi}^{(3)} + \tau_{rz}^{(3)} \varepsilon_{rz}^{(3)} + \tau_{\varphi z}^{(3)} \varepsilon_{\varphi z}^{(3)} \right) dz - 2q(r, \varphi) w(r, \varphi) \right] r dr d\varphi = 0. \quad (5)$$

Согласно теореме Лагранжа, уравнения равновесия пластины могут быть получены из вариации функционала энергии (5), подобный энергетический подход получения уравнений равновесия трехслойных пластин использован в [17].

4. Уравнения равновесия пластины при осесимметричном изгибе

Рассмотрим далее задачу осесимметричного поперечного изгиба круглой трехслойной пластины. Пусть поперечная нагрузка $q(r)$ равномерно распределена симметрично относительно оси, проходящей через центр пластины. Будем считать, что внешние слои имеют равную толщину $h^{(1)} = h^{(2)} = h$ и выполнены из одного материала $E^{(1)} = E^{(2)} = E$, $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \mu$.

С учетом симметрии деформированного состояния пластины и отсутствия угловых перемещений в данной постановке задачи ($u^{(1)} = -u^{(2)} = u$, $v^{(1)} = -v^{(2)} = v = 0$) нелинейные дифференциальные уравнения равновесия примут вид [18]

$$\begin{aligned} B_{11}w_{,rrr} + B_{12}w_{,rr} + B_{13}u_{,rr} + B_{14}w_{,r} + B_{15}u_{,r} + B_{16}u(r) + \Phi_1 &= 0, \\ B_{21}w_{,rrrr} + B_{22}w_{,rrr} + B_{23}u_{,rrr} + B_{24}w_{,rr} + B_{25}u_{,rr} + \\ + B_{26}w_{,r} + B_{27}u_{,r} + B_{28}u(r) - rq + \Phi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Нелинейные члены уравнений (6) Φ_1 , Φ_2 и коэффициенты приведены в [18], поэтому здесь они не приводятся ввиду их громоздкости.

Граничные условия для свободного опирания имеют вид [15]

$$w(r) = 0, \quad w_{,rr} + \frac{\mu}{r}w_{,r} = 0, \quad u_{,r} + \frac{\mu}{r}u(r) = 0 \quad \text{при } r = R. \quad (7)$$

Граничные условия при защемлении на контуре имеют вид [15]

$$w(r) = 0, \quad w_{,r} = 0, \quad u(r) = 0 \quad \text{при } r = R. \quad (8)$$

Полученные уравнения (6) и граничные условия (7), (8) будем далее называть аналитической моделью.

Одним из подходов к решению системы нелинейных уравнений (6) является метод разложения по малому параметру [12], который позволяет рассматривать решение нелинейной задачи как последовательность уточняющих друг друга решений систем линейных уравнений. Выделим из нелинейных слагаемых системы малый физический параметр λ , связанный с механическими характеристиками нелинейно-упругого среднего слоя соотношением

$$\lambda = \frac{\gamma_2}{(3K^{(3)} + 4G^{(3)})^3}.$$

Искомые перемещения представим в виде рядов по степеням малого параметра λ :

$$u(r) = u_0(r) + \sum_{i=1}^n \lambda^i u_i(r), \quad w(r) = w_0(r) + \sum_{i=1}^n \lambda^i w_i(r). \quad (9)$$

Подставляя (9) в (6) и группируя коэффициенты по степеням параметра λ , получим системы уравнений нулевого и последующих приближений разложения искомого перемещения по малому параметру.

Система уравнений нулевого приближения (линейно-упругая постановка задачи) имеет вид

$$\begin{aligned} B_{11}w_{0,rrr} + B_{12}w_{0,rr} + B_{13}u_{0,rr} + B_{14}w_{0,r} + B_{15}u_{0,r} + B_{16}u_0(r) &= 0, \\ B_{21}w_{0,rrrr} + B_{22}w_{0,rrr} + B_{23}u_{0,rrr} + B_{24}w_{0,rr} + B_{25}u_{0,rr} + \\ + B_{26}w_{0,r} + B_{27}u_{0,r} + B_{28}u_0(r) - rq &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Первое и последующие приближения запишем в компактной форме, аналогично [18]:

$$\begin{aligned} B_{11}w_{i,rrr} + B_{12}w_{i,rr} + B_{13}u_{i,rr} + B_{14}w_{i,r} + B_{15}u_{i,r} + B_{16}u_i(r) &= \Psi_{1i}, \\ B_{21}w_{i,rrrr} + B_{22}w_{i,rrr} + B_{23}u_{i,rrr} + B_{24}w_{i,rr} + B_{25}u_{i,rr} + \\ + B_{26}w_{i,r} + B_{27}u_{i,r} + B_{28}u_i(r) &= \Psi_{2i}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь через Ψ_{1i} и Ψ_{2i} обозначены нелинейные части уравнений.

5. Решение систем дифференциальных уравнений

Полученную систему уравнений нулевого приближения с помощью последовательных интегрирований и тождественных преобразований можно свести к неоднородному модифицированному уравнению Бесселя [19]

$$L(u_0(r)) - \beta^2 u_0(r) = \eta_0(r), \quad (12)$$

где $L(g(r))$ – дифференциальный оператор, который вводится для произвольной функции $g(r)$ следующим образом:

$$L(g(r)) = \left(\frac{1}{r} (rg(r))_{,r} \right)_{,r} = g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g(r)}{r^2}.$$

Коэффициенты уравнения (12) имеют следующий вид:

$$\beta^2 = -B_{14} \left(\frac{2}{2h^{(3)} - h} - \frac{D_2}{D_1} \right) \frac{2D_1}{2B_{15}D_1 + hB_{15}D_2},$$

$$\eta_0(r) = \left(L \left(\frac{hB_{15}}{2D_1} \xi_0(r) \right) - \frac{B_{14}}{D_1} \xi_0(r) \right) \frac{2D_1}{2B_{15}D_1 + hB_{15}D_2},$$

$$\xi_0(r) = \frac{qr^3}{16} + \frac{1}{4} C_1 r (2 \ln(r) - 1) + \frac{1}{2} C_2 r + \frac{1}{r} C_3.$$

Решение уравнения (12) можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_0(r) &= C_4 I_1(\beta r) + C_5 K_1(\beta r) - K_1(\beta r) \int I_1(\beta r) \eta_0(r) r dr + \\ &+ I_1(\beta r) \int K_1(\beta r) \eta_0(r) r dr = C_4 I_1(\beta r) + C_5 K_1(\beta r) + \frac{2\alpha_{03}}{\beta^3} K_1(\beta r) - \\ &- \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{\alpha_{01}}{r} + \alpha_{02} r + \alpha_{03} \left(\ln(r)r + \frac{2}{\beta^2 r} \right) + \alpha_{04} \left(r^3 + \frac{8r}{\beta^2} \right) \right), \\ w_0(r) &= -\frac{D_2 C_4 I_0(\beta r)}{D_1 \beta} + \frac{D_2 C_5 K_0(\beta r)}{D_1 \beta} + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{\left(16\alpha_{04} + 2\alpha_{02}\beta^2 + 2\alpha_{03} \ln(r)\beta^2 - \alpha_{03}\beta^2 \right) r^2 D_2}{\beta^4 D_1} + \\ &+ \frac{D_2 \alpha_{04} r^4}{4D_1 \beta^2} + \frac{C_2 r^2}{4D_1} + \frac{(\ln(r) - 1) C_1 r^2}{4D_1} + \frac{qr^4}{64D_1} + \frac{C_3 \ln(r)}{D_1} + \\ &+ \frac{\left(\alpha_{01} \ln(r)\beta^2 + 2\alpha_{03} \ln(r) + 2\alpha_{03} K_0(\beta r) \right) D_2}{\beta^4 D_1} + C_6, \end{aligned} \quad (13)$$

где $I_\nu(\beta r)$, $K_\nu(\beta r)$ – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда ν -го порядка ($\nu = 0, 1$); коэффициенты D_1 , D_2 , α_{0j} ($j = \overline{1, 4}$) выражаются через геометрические и упругие параметры пластины, здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

Для решения системы (11) также возможно применить описанный выше подход. Разница в случае нахождения первого и последующих приближений лишь в том, что функция $\eta_0(r)$ будет изменяться в зависимости от вида правой части уравнений системы (11).

6. Конечно-элементная модель

Рассмотрим конечно-элементную модель трехслойной пластины. Мы можем предположить, что пластина является частным случаем трехмерного тела. Тогда возможно явно представить разрывность свойств материала. В этом случае полученные сетки реализуют топологию слоев, т.е. границы слоев аппроксимируются ребрами и гранями конечных элементов (общая схема приведена на рис.2). При этом полученные сетки могут быть блочно-структурированными или неструктурированными.

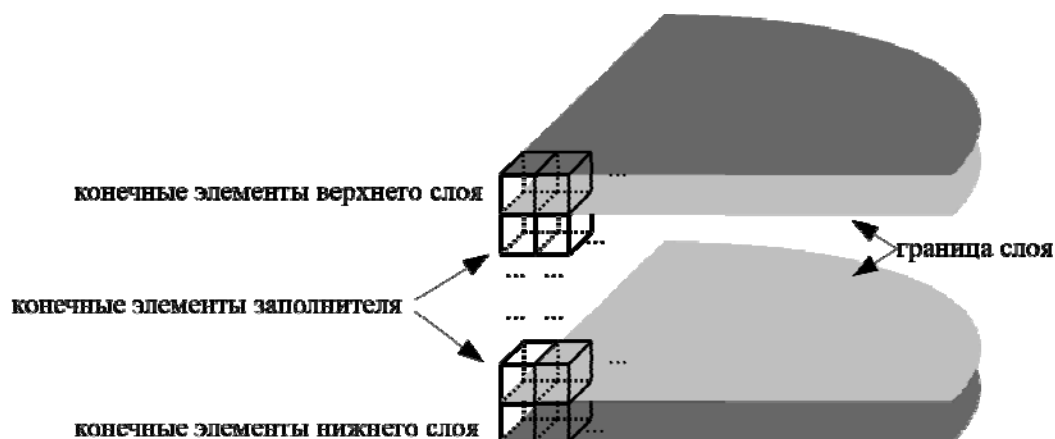


Рис.2. Конечные элементы слоев.

Пусть сетка конечных элементов M состоит из двух подмножеств

$$M = M_f \cup M_c, \quad M_f \cap M_c \equiv \emptyset,$$

где M_f – подмножество элементов наружных слоев; M_c – подмножество элементов заполнителя.

В этом случае для трехмерного напряженно-деформированного состояния изотропного линейно-упругого материала слоя получим матрицу жесткости в виде

$$[k_m] = \iiint [B_m]^T [D_m] [B_m] dx dy dz,$$

где m – конечный элемент; для шестигранного конечного элемента

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & \dots & H_8 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & H_1 & H_2 & \dots & H_8 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & H_1 & H_2 & \dots & H_8 \end{bmatrix}.$$

Выше H_i ($i = \overline{1,8}$) являются стандартными функциями формы ($H_i(\xi, \eta, \zeta)$ в случае изопараметрического шестигранника).

Матрица упругости $[D_m]$ в этом случае зависит от свойств материала, которому принадлежит элемент m и представляется в виде

$$[D_m] = \frac{E_m(1-\mu_m)}{(1+\mu_m)(1-2\mu_m)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu_m}{1-\mu_m} & \frac{\mu_m}{1-\mu_m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu_m}{1-\mu_m} & 1 & \frac{\mu_m}{1-\mu_m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu_m}{1-\mu_m} & \frac{\mu_m}{1-\mu_m} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu_m}{2(1-\mu_m)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu_m}{2(1-\mu_m)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu_m}{2(1-\mu_m)} \end{bmatrix},$$

где E_m – модуль Юнга, μ_m – коэффициент Пуассона элемента m . В случае трехслойной конструкции получим

$$E_m = \begin{cases} E, & \text{если } m \in M_f, \\ E^{(3)}, & \text{если } m \in M_c, \end{cases} \quad \mu_m = \begin{cases} \mu, & \text{если } m \in M_f, \\ \mu^{(3)}, & \text{если } m \in M_c. \end{cases}$$

В формуле выше E – модуль Юнга наружных слоев, μ – коэффициент Пуассона наружных слоев; $E^{(3)}$ – модуль Юнга заполнителя, $\mu^{(3)}$ – коэффициент Пуассона заполнителя.

Здесь необходимо сделать замечание. Трехмерное конечно-элементное моделирование по схеме, описанной выше, является вычислительно экстенсивным. Сетки хорошего качества (которые содержат элементы с отношением длин сторон, близким к 1) требуют генерации значительного количества элементов (например, трехмерная модель трехслойной круглой пластины содержит более 200000 узлов).

7. Результаты численных экспериментов

Верификацию разработанных в статье моделей проведем путем сравнения полученных решений задач изгиба трехслойных круглых и кольцевых пластин в линейной постановке с решениями аналогичных задач других авторов. После этого исследуем влияние на значения прогиба учета нелинейной упругости заполнителя.

Исходя из условия существования и гладкости решения в центре пластины для сплошных пластин, положим в решениях (13) $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $C_5 = 0$. Константы интегрирования определяются из граничных условий (7), (8).

В качестве частного случая построенной в работе аналитической модели, исследуем далее задачу о поперечном изгибе круглой трехслойной пластины в линейной постановке и проведем сравнительный анализ полученных результатов с другими известными работами.

Рассмотрим поперечный изгиб круглой трехслойной пластины со следующими параметрами: толщина заполнителя $2h^{(3)} = 1.6 \cdot 10^{-2}$ м, толщина внешних слоев $h = 1 \cdot 10^{-3}$ м,

Таблица 1. Поперечный изгиб круглой трехслойной пластины с нелинейно-упругим наполнителем.

Член ряда (9)	$w_{\max} = w(0), 10^{-3} \text{ м}$							
	Свободное опирание				Защемление			
	$q, \text{ МПа}$				$q, \text{ МПа}$			
	0.05	0.07	0.09	0.11	0.05	0.07	0.09	0.11
$w_0(r)$	1.714	2.399	3.085	3.770	0.416	0.582	0.749	0.915
$\lambda w_1(r)$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$4.4 \cdot 10^{-2}$	$9.3 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-1}$	$5.2 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$3.1 \cdot 10^{-2}$	$5.6 \cdot 10^{-2}$
$\lambda^2 w_2(r)$	$4.6 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$8.7 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-2}$	$3.7 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$7.0 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$
$\lambda^3 w_3(r)$	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$	$8.1 \cdot 10^{-7}$	$8.6 \cdot 10^{-6}$	$5.0 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$
w_{Σ}	1.730	2.446	3.188	3.969	0.421	0.596	0.781	0.973

Из значений, приведенных в табл.1, можно сделать вывод, что нулевое приближение вносит наиболее существенный вклад в разложение (9) искомых перемещений по малому параметру.

Решение задачи осесимметричного изгиба кольцевых пластин отличается от аналогичной задачи для сплошных круглых пластин видом граничных условий.

Примем граничные условия для свободного опирания внешнего ($r = R$) или внутреннего контура ($r = b$):

$$w(r) = 0, \quad w_{,rr} + \frac{\mu}{r} w_{,r} = 0, \quad u_{,r} + \frac{\mu}{r} u(r) = 0, \quad r = R, b. \quad (14)$$

Для защемления наружного ($r=R$) или внутреннего контура ($r=b$):

$$w(r) = 0, \quad w_{,r} = 0, \quad u(r) = 0, \quad r = R, b. \quad (15)$$

В случае свободного контура:

$$w_{,rr} + \frac{\mu}{r} w_{,r} = 0, \quad \left(u_{,r} + \frac{\mu}{r} u(r) \right) + \left(\mu u_{,r} + \frac{1}{r} u(r) \right) = 0, \quad \left(w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right)_{,r} = 0, \quad r = R, b. \quad (16)$$

Комбинируя эти граничные условия на внутреннем и внешнем радиусах, можно получить разные схемы опирания кольцевой пластины.

Таким образом, мы можем использовать для решения линейной задачи общее решение (13) дифференциальных уравнений (10) вместе с граничными условиями (14), (15) или (16).

Рассмотрим четыре схемы опирания: свободное опирание и защемление внешнего контура (рис.4) и такие же граничные условия для внутреннего контура (рис.5).



Рис.4. Условия закрепления кольцевой пластины на внешнем контуре.



Рис.5. Условия закрепления кольцевой пластины на внутреннем контуре.

В качестве численного примера рассмотрим изгиб кольцевой пластины с такими параметрами: толщина среднего слоя $2h^{(3)} = 1.6 \cdot 10^{-2}$ м, толщина внешних слоев $h = 1 \cdot 10^{-3}$ м, радиус внешнего контура пластины $R = 0.4$ м, радиус внутреннего контура – $b = 0.2$ м; модуль сдвига и коэффициент Пуассона внешних слоев – $G = 8 \cdot 10^4$ МПа и $\mu = 0.27$ соответственно, модуль сдвига и модуль объемной деформации заполнителя – $G^{(3)} = 2.77 \cdot 10^4$ МПа, $K^{(3)} = 6 \cdot 10^4$ МПа. Тангенциальное напряжение $\tau_{rz}^{(3)}$ изменяется линейно по толщине заполнителя.

На рис.6,7 изображены функции изгиба пластины $w(r)$, рассчитанные по аналитической и конечно-элементной моделям (сплошная линия – аналитическая модель, пунктир – конечно-элементная модель).

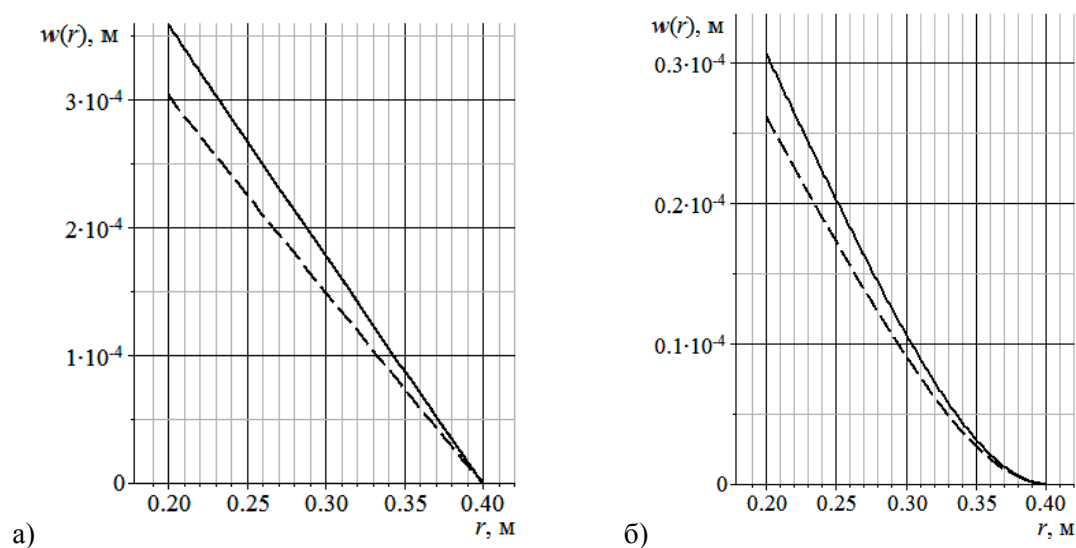


Рис.6. Изгиб трехслойной кольцевой пластины при свободном опирании (а) и заземлении внешнего контура (б) при $q = 0.011$ МПа.

Рассмотрим нелинейную постановку задачи изгиба кольцевой пластины.

Уравнения (11) и граничные условия (14) – (16) замыкают задачу нелинейного изгиба трехслойных кольцевых пластин.

Одним из подходов к решению нелинейных дифференциальных уравнений (11) может быть метод коллокаций. Процедура выбора координатных функций для решения нелинейных задач описана в монографии [20]. Для данной задачи примем такие координатные функции:

$$w(r) = w_0(r) + \sum_{i=0}^n H_i r^i, \quad u(r) = u_0(r) + \sum_{i=1}^n L_i r^i, \quad (17)$$

где $w_0(r)$, $u_0(r)$ – решения соответствующей линейной задачи.

Подставляя выражения функций (17) в дифференциальные уравнения (11), получим невязки, к которым затем применим метод коллокаций для определения коэффициентов H_s , L_s . Точки коллокаций выбираются равномерно распределенными по радиусу пластины.

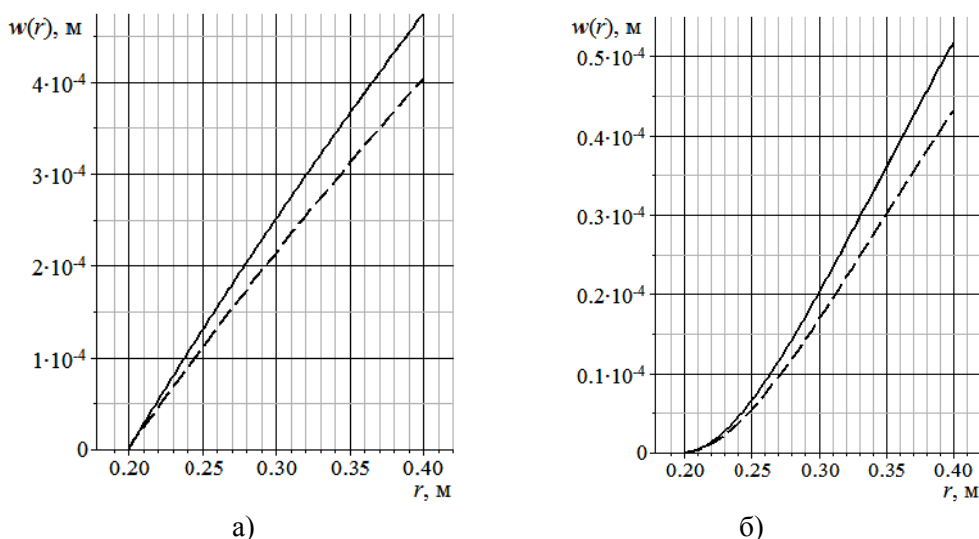


Рис.7. Изгиб трехслойной кольцевой пластины при свободном опирании (а) и защемлении внутреннего контура (б) при $q = 0.011$ МПа.

Результаты вычислений для трехслойной кольцевой пластины с теми же параметрами, что и в линейном случае приведем в табл.2 для граничных условий на внешнем и внутреннем контуре.

Таблица 2. Высшие приближения при нелинейном изгибе кольцевой трехслойной пластины.

q , МПа	$w_{\max}, 10^{-3}$ м							
	Свободный внутренний контур				Свободный внешний контур			
	Член ряда (9)				Член ряда (9)			
	Свободное опирание		Защемление		Свободное опирание		Защемление	
	$\lambda w_1(r)$	$\lambda^2 w_2(r)$	$\lambda w_1(r)$	$\lambda^2 w_2(r)$	$\lambda w_1(r)$	$\lambda^2 w_2(r)$	$\lambda w_1(r)$	$\lambda^2 w_2(r)$
0.005	$-0.2 \cdot 10^{-4}$	$-0.1 \cdot 10^{-8}$	$-0.3 \cdot 10^{-7}$	$-0.2 \cdot 10^{-15}$	$-0.2 \cdot 10^{-3}$	$-0.5 \cdot 10^{-6}$	$-0.2 \cdot 10^{-3}$	$-0.5 \cdot 10^{-6}$
0.007	$-0.6 \cdot 10^{-4}$	$-0.3 \cdot 10^{-8}$	$-0.8 \cdot 10^{-6}$	$-0.5 \cdot 10^{-11}$	$-0.5 \cdot 10^{-3}$	$-0.7 \cdot 10^{-6}$	$-0.5 \cdot 10^{-3}$	$-0.7 \cdot 10^{-6}$
0.009	$-0.1 \cdot 10^{-3}$	$-0.3 \cdot 10^{-6}$	$-0.2 \cdot 10^{-5}$	$-0.5 \cdot 10^{-10}$	$-0.1 \cdot 10^{-2}$	$-0.3 \cdot 10^{-4}$	$-0.1 \cdot 10^{-2}$	$-0.3 \cdot 10^{-4}$
0.011	$-0.2 \cdot 10^{-3}$	$-0.5 \cdot 10^{-6}$	$-0.3 \cdot 10^{-5}$	$-0.7 \cdot 10^{-10}$	$-0.2 \cdot 10^{-2}$	$-0.4 \cdot 10^{-4}$	$-0.2 \cdot 10^{-2}$	$-0.4 \cdot 10^{-4}$

В табл.2 приведены величины поправок, которые привносятся каждым приближением в сумму рядов (9). При этом рассматриваем два приближения метода малого параметра.

8. Выводы

Таким образом, в данной работе получены аналитическая и конечно-элементная модели для исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных круговых пластин, а также взаимной верификации вычисленных значений. Разработанная

аналитическая модель отличается от известных вариантов нелинейной теории трехслойных элементов конструкций использованием определяющих соотношений Г. Каудерера, что позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние трехслойных элементов конструкций, выполненных из современных материалов. В результате получила дальнейшее развитие нелинейная теория трехслойных пластин.

Недостатком разработанной трехмерной конечно-элементной модели является требование относительно большого объема вычислений. Преимущество такого подхода – возможность анализа многослойных пластин нестандартной формы.

Перспективы дальнейших исследований, на наш взгляд, связаны с исследованием нелинейных задач устойчивости и динамики тонкостенных элементов конструкций типа многослойных пластин и оболочек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *A.K. Noor, S.W. Burton, C.W. Bert.* Computational Models for Sandwich Panels and Shells // Applied Mechanics Reviews, 1996, v.49, №3, p.155-199.
2. *Л.М. Куришин.* Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек // Расчет пространственных конструкций, 1962, №2, с.163-192;
L.M. Kurshin. Obzor rabot po raschetu trekhslonnykh plastin i obolochek // Raschet prostranstvennykh konstrukttsii, 1962, №2, с.163-192.
3. *E. Carrera.* Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells // Appl. Mech. Rev., 2003, v.56, p.287-308.
4. *E. Magnucka-Blandzi, L. Wittenbeck.* Approximate solutions of equilibrium equations of sandwich circular plate // AIP Conference Proceedings, 2013, v.1558, p.2352-2355.
5. *K.A. Magnucki, P.A. Jasion, E.B. Magnucka-Blandzi, P.A. Wasilewicz.* Theoretical and experimental study of a sandwich circular plate under pure bending // Thin-Walled Structures, 2014, v.79, p.1-7.
6. *И.А. Цурпал.* Расчет элементов конструкций из нелинейно-упругих материалов. – К.: «Техника», 1976, 176 с.;
I.A. Tsurpal. Raschet elementov konstrukttsii iz nelineino-uprugikh materialov. – K.: «Tekhnika», 1976, 176 s.
7. *Ю.Н. Тамуров.* Вариант обобщенной теории трёхслойных пологих оболочек с учётом обжатия физически нелинейного заполнителя // Прикл. механика, 1990, т.26, №12, с.39-45;
Iu.N. Tamurov. Variant obobshchennoi teorii trekhslonnykh plogih obolochek s uchetom obzhatiiia fizicheski nelineinogo zapolnitelia // Prikl. mekhanika, 1990, t.26, №12, с.39-45.
8. *A. Riahi, J.H. Curran.* Full 3D finite element Cosserat formulation with application in layered structures // Applied Mathematical Modelling, 2009, v.33, p.3450-3464.
9. *M.M. MacLaughlin, D.M. Doolin.* Review of validation of the discontinuous deformation analysis (DDA) method // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2006, v.30, №4, p.271-305.
10. *G.N. Pande, G. Beer, J.R. Williams.* Numerical methods in rock mechanics. – Chichester, New York: Wiley, 1990, 327 p.
11. *J.R. Williams, R. O'Connor.* Discrete element simulation and the contact problem // Archives of Computational Methods in Engineering, 1999, v.6, №4, p.279-304.
12. *Г. Каудерер.* Нелинейная механика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961, 777 с;
G. Kauderer. Nichtlineare Mechanik. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1958, 684 s.

13. А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005, 576 с;
A.G. Gorshkov, E.I. Starovojtov, A.V. Jarovaya. Mekhanika sloistykh viazkouprugoplasticheskikh elementov konstruksii. – М.: FIZMATLIT, 2005, 576 s.
14. И.П. Михайлов. Некоторые задачи осесимметричного изгиба круглых трехслойных пластин с жестким наполнителем // Труды Ленинградского кораблестроительного института, 1969, т.66, с.125-131;
I.P. Mikhajlov. Nekotorye zadachi osesimmetrichnogo izgiba kruglykh trekhsloinykh plastin s zhestkim zapolnitelem // Trudy Leningradского korablestroitel'nogo instituta, 1969, t.66, s.125-131.
15. А.П. Прусаков. Некоторые задачи изгиба круглых трехслойных пластин с легким наполнителем // Тр. конф. по теор. пластин и оболочек, 1961, т.1, с.293-297;
A.P. Prusakov. Nekotorye zadachi izgiba kruglykh trekhsloinykh plastin s legkim zapolnitelem // Tr. konf. po teor. plastin i obolochek, 1961, t.1, s.293-297.
16. С.А. Амбарцумян. Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость и колебания. – М.: Наука, 1987, 360 с.;
S.A. Ambartsumyan. Teoriia anizotropnykh plastin: Prochnost, ustoichivost i kolebaniia. – М.: Nauka, 1987, 360 s.
17. Liu Renhua. Nonlinear Bending of Circular Sandwich Plates // Applied Mathematics and Mechanics, English Edition, 1981, v.2, №2, p.189-208.
18. А.В. Кудин. Применение метода малого параметра при моделировании изгиба симметричных трехслойных пластин с нелинейно-упругим наполнителем // Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля, 2011, т.11, №165, с.32-40;
A.V. Kudin. Primenenie metoda malogo parametra pri modelirovanii izgiba simmetrichnykh trekhsloinykh plastin s nelinejno-uprugim zapolnitelem // Visnik Skhidnoukrainskogo nacionalnogo universitetu imeni Volodimira Dalya, 2011, t.11, №165, s.32-40.
19. А.В. Кудин. Решение задачи осесимметричного изгиба круглых трехслойных пластин с нелинейно-упругим наполнителем // Естественные и математические науки в современном мире. Сб. ст. по материалам XVI междунар. науч.-практ. конф., 2014, т.3, №15, с.80-98;
A.V. Kudin. Reshenie zadachi osesimmetrichnogo izgiba kruglykh trekhsloinykh plastin s nelinejno-uprugim zapolnitelem // Estestvennyye i matematicheskie nauki v sovremennom mire. Sb. st. po materialam XVI mezhdunar. nauch.-prakt. konf., 2014, t.3, №15, s.80-98.
20. М.С. Корнишин. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. – М.: Наука, 1964, 192 с.;
M.S. Kornishin. Nelineinye zadachi teorii plastin i pologikh obolochek i metody ikh resheniia. – М.: Nauka, 1964, 192 s.