Э. А. Айрян, А. Д. Егоров, Д. С. Кулябов, В. Б. Малютин, Л. А. Севастьянов, Применение функциональных интегралов к стохастическим уравнениям, *Матем. моделирование*, 2016, том 28, номер 11, 113–125

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2016 год, том 28, номер 11, стр. 113-125

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ К СТОХАСТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ

***Э.А. Айрян*[1]*, А.Д. Егоров*[2]*, Д.С. Кулябов*[1,3]*, В.Б. Малютин*[2]*, Л.А. Севастьянов*[3,4]**

[1]Лаборатория информационных технологий, Объединенный институт ядерных исследований
[2]Институт математики, Национальная академия наук Беларуси
[3]Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов
[4]Лаборатория теоретической физики, Объединенный институт ядерных исследований
ayrjan@jinr.ru, egorov@im.bas-net.by, yamadharma@gmail.com, malyutin@im.bas-net.by, leonid.sevast@gmail.com

Работа частично поддержана грантами РФФИ №14-01-00628, №15-07-08795, а также грантом Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф14Д-002).

Рассматриваются представление функции плотности вероятности перехода (ФПВП) и других величин, характеризующих решение стохастического дифференциального уравнения, через функциональный интеграл и методы приближенного вычисления возникающих функциональных интегралов. Для записи ФПВП через функциональный интеграл используются Onsager-Machlup функционалы. С помощью этих функционалов можно записать выражение для ФПВП на малом промежутке времени Δt, которое верно с точностью до слагаемых, имеющих относительно Δt порядок выше первого. Для возникающих функциональных интегралов рассматривается метод приближенного вычисления этих интегралов, основанный на использовании разложения действия относительно классической траектории. В качестве примера рассматривается вычисление с помощью предложенного метода некоторых характеристик решения уравнения для модели типа Cox Ingersoll Ross.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, Onsager-Machlup функционалы, функциональные интегралы.

APPLICATION OF FUNCTIONAL INTEGRALS TO STOCHASTIC EQUATIONS

***E.A. Ayryan*[1]*, A.D. Egorov*[2]*, D.S. Kulyabov*[1,3]*, V.B. Malyutin*[2]*, L.A. Sevastyanov*[3,4]**

[1]Laboratory of Information Technologies, Joint Institute for Nuclear Research
[2]Institute of Mathematics, The National Academy of Sciences of Belarus
[3]Department of Applied Probability and Informatics, Peoples' Friendship University of Russia
[4]Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research

Representation of the probability density function (PDF) and other quantities, describing solution of stochastic differential equation, by means of functional integral is considered in this paper. Method of approximate evaluation of appearing functional integrals is presented. Onsager-

Machlup functionals are used to represent PDF by means of functional integral. Using these functionals the expression for PDF on small time interval Δt can be written. This expression is true up to terms having order higher than the first in comparison with Δt. Method of approximate evaluation of appearing functional integrals is considered. This method is based on expansion of action along classical path. As an example the application of proposed method to evaluation of some quantities for solution of equation for the Cox Ingersoll Ross type model is considered.

Key words: stochastic differential equations, Onsager-Machlup functionals, functional integrals.

1. Введение

Разнообразные физические, химические и биологические системы с наличием флуктуаций или шума описываются стохастическими дифференциальными уравнениями в смысле Ито

$$dx(t) = f(x,t)dt + g(x,t)dw(t) \tag{1}$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$, где $w(t)$ – винеровский процесс.

Описание с помощью стохастических дифференциальных уравнений моделей взаимодействующих популяций, таких как "хищник-жертва", симбиоз, конкуренция и их модификации, приведено в [1,2].

Во многих приложениях часто требуется найти в аналитическом виде или аппроксимацию функции плотности вероятности перехода (ФПВП) для стохастической переменной $x(t)$, моментов для ФПВП, математического ожидания функции от решения уравнения (1) и других величин. Для вычисления этих величин можно использовать методы решения стохастических дифференциальных уравнений [3,4], уравнения Фоккера-Планка и численные методы решения этих уравнений [5]. Для этих целей можно также использовать метод функционального интегрирования.

Функциональные интегралы давно и успешно применяются в квантовой теории поля, статистической механике [6-10], а также в теории стохастических дифференциальных уравнений [7,11,12]. Они обеспечивают удобный инструмент для аналитического и приближенного вычисления различных характеристик стохастических моделей.

В этой работе рассматриваются представление ФПВП через функциональный интеграл и методы приближенного вычисления возникающих функциональных интегралов.

Во втором разделе исследуется Onsager-Machlup функционал для записи ФПВП через функциональный интеграл. В третьем разделе рассматривается метод приближенного вычисления функциональных интегралов, основанный на использовании разложения действия относительно классической траектории. В четвертом разделе в качестве примера предлагается аналог модели Cox Ingersoll Ross.

2. Представление величин с помощью функционального интеграла

Для записи ФПВП через функциональный интеграл используется Onsager-Machlup функционал [5,11-13]. В общем случае мы не можем найти ФПВП на малом промежутке времени Δt, соответствующую произвольному стохастическому дифференциальному уравнению. Однако можно найти выражение для ФПВП на малом промежутке времени Δt, которое верно с точностью до слагаемых, имеющих относительно Δt порядок выше первого. Это выражение для уравнения (1) в случае схемы Ито и функций, не зависящих от времени, имеет вид [12]

$$p(x,t+\Delta t,y,t)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi g^2(y)\Delta t}}\exp\left\{-\frac{(x-y-(f(y)-\frac{1}{2}g'(y)g(y))\Delta t)^2}{2g^2(y)\Delta t}\right\}. \qquad (2)$$

Используя выражение (2), можно записать ФПВП в виде

$$p(x,t,x_0,t_0)=\lim_{N\to\infty}\int\ldots\int\prod_{i=1}^{N-1}dx_i\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi g^2(x_{i-1})\Delta t}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(x_{i+1}-x_i-(f(x_i)-\frac{1}{2}g'(x_i)g(x_i))\Delta t)^2}{2g^2(x_i)\Delta t}\right\}. \qquad (3)$$

В предельном случае формула (3) имеет вид

$$p(x,t,x_0,t_0)=Z[0]=\int D[x]\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}\frac{(\dot{x}(\tau)-(f(x(\tau))-\frac{1}{2}g'(x(\tau))g(x(\tau))))^2}{2g^2(x(\tau))}d\tau\right\}, \qquad (4)$$

где $D[x]=\lim\limits_{N\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{N-1}\frac{dx_i}{\sqrt{2\pi g^2(x_i)\Delta t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi g^2(x)\Delta t}}$.

Выражение $D[x]$ формально расходится и имеет смысл только вместе с экспонентой под знаком интеграла в (4), а строго математически функциональный интеграл в правой части равенства (4) определяется как предел интегралов конечной кратности.

Функционал в показателе экспоненты в формуле (4) называется Onsager-Machlup функционал. Моменты для ФПВП записываются в виде

$$<\prod_{i=1}^{n}x(\tau_i)>=Z[0]^{-1}\int D[x]\prod_{i=1}^{n}x(\tau_i)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}\frac{(\dot{x}(\tau)-(f(x(\tau))-\frac{1}{2}g'(x(\tau))g(x(\tau))))^2}{2g^2(x(\tau))}d\tau\right\}. \qquad (5)$$

От формул (4),(5) можно перейти к формулам с постоянным коэффициентом при $\dot{x}(\tau)^2$. Это преобразование в случае стохастических дифференциальных уравнений аналогично Lamperti transformation [14] или замене функции с помощью формулы Ито, при которой исходное уравнение приводится к уравнению с постоянным коэффициентом диффузии.

Пусть функции G и φ такие, что $dG(y)/dy=1/g(y)$, $G(\varphi(y))=y$. Тогда если сделать замену $x(\tau)=\varphi(y(\tau))$, получим $\dot{\varphi}(y(\tau))/g(\varphi(y(\tau)))=\dot{y}(\tau)$. Формула (4) после такой замены будет иметь вид

$$p(y,t,y_0,t_0)=Z[0]=\int D[y]\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(\dot{y}(\tau)-\frac{f(\varphi(y(\tau)))-\frac{1}{2}g'(\varphi(y(\tau)))g(\varphi(y(\tau)))}{g(\varphi(y(\tau)))})^2d\tau\right\},$$

где $y=\varphi^{-1}(x),\ y_0=\varphi^{-1}(x_0)$, $D[y]=\lim\limits_{N\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{N-1}\frac{dy_i}{\sqrt{2\pi\Delta t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi g^2(\varphi(y))\Delta t}}$.

$Z[0]$ можно записать в виде $Z[0]=\frac{1}{g(\varphi(y))}\overline{Z}[0]$,

где

$$\overline{Z}[0]=\int D[y]\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(\dot{y}(\tau)-\frac{f(\varphi(y(\tau)))-\frac{1}{2}g'(\varphi(y(\tau)))g(\varphi(y(\tau)))}{g(\varphi(y(\tau)))})^2d\tau\right\}, \qquad (6)$$

$$D[y]=\lim_{N\to\infty}\prod_{i=1}^{N-1}\frac{dy_i}{\sqrt{2\pi\Delta t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}}.$$

3. Вычисление функциональных интегралов

Перейдем к методу вычисления функциональных интегралов вида (6). Функциональный интеграл в формуле (6) – это интеграл по функциям или траекториям, удовлетворяющим условиям $y(t_0)=\varphi^{-1}(x_0),\ \ y(t)=\varphi^{-1}(x)$. Выражение

$$\frac{1}{2}\left(\dot{y}(\tau)-\frac{f(\varphi(y(\tau)))-\frac{1}{2}g'(\phi(y(\tau)))g(\varphi(y(\tau)))}{g(\varphi(y(\tau)))}\right)^2$$

в формуле (6) можно рассматривать как лагранжиан системы $L(\dot{y},y,\tau)$, а величину $S=\int\limits_{t_0}^{t}L(\dot{y},y,\tau)d\tau$ – как действие. Используя принцип наименьшего действия [6], можно из всех возможных траекторий выделить классическую траекторию $y_{кл}$, для которой действие S принимает экстремальное значение. Классическая траектория находится как решение уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0.$$

Далее для вычисления интеграла можно использовать разложение действия S относительно классической траектории $y_{кл}$

$$S[y(\tau)]\approx S[y_{кл}(\tau)]+\frac{1}{2}\delta^2S[y_{кл}(\tau)].$$

Вариацию второго порядка $\delta^2S[y_{кл}(\tau)]$ можно записать в виде

$$\delta^2 S[y_{кл}(\tau)] = \int\limits_{t_0}^{t} \delta y \Lambda \delta y d\tau ,$$

где $y = y_{кл} + \delta y$,

$$\Lambda = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\right)_{y_{кл}} + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \dot{y}}\right)_{y_{кл}} \frac{d}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \dot{y}}\right)_{y_{кл}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}^2}\right)_{y_{кл}} \frac{d}{dt} .$$

После этих преобразований интеграл (6) запишется в виде

$$\overline{Z}[0] = \int D[x] \exp\left\{ -S[y_{кл}(\tau)] - \frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{t} x \Lambda x d\tau \right\}, \tag{7}$$

где интегрирование выполняется по траекториям $x = \delta y$, удовлетворяющим условиям $x(t_0) = 0,\ x(t) = 0$,

$$D[x] = \lim_{N \to \infty} \prod_{i=1}^{N-1} \frac{dx_i}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} .$$

Для вычисления интеграла (7) используем разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j ,$$

где функции u_j являются решениями задачи Штурма-Лиувилля, ассоциированной с оператором Λ, то есть

$$\Lambda u_j = \lambda_j u_j , \tag{8}$$

$\int\limits_{t_0}^{t} u_j(\tau) u_i(\tau) d\tau = \delta_{ji}$, $\quad u(t_0) = 0,\ u(t) = 0$, $\quad \lambda_j$ – собственные значения.

Тогда интеграл (7) запишется в виде

$$\overline{Z}[0] = \exp\{-S[y_{кл}(\tau)]\} J \int D[a] \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j^2 \right\}, \tag{9}$$

где J – якобиан перехода от переменной x к переменной a,

$$D[a] = \lim_{N \to \infty} \prod_{i=1}^{N-1} da_i .$$

Обозначим

$$K(t_0, t) = J \int D[a] \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j^2 \right\}. \tag{10}$$

Так как якобиан J инвариантен относительно операторов Λ [6,12], то

$$K(t_0,t)\prod_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{1/2} = K_{free}(t_0,t)\prod_{j=1}^{\infty}\lambda_{free,j}^{1/2} ,$$

где

$$K_{free}(t_0,t) = J\int D[a]\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{free,j}a_j^2\right\},$$

$\lambda_{free,j}$ – собственные значения задачи Штурма-Лиувилля, ассоциированной с оператором $\Lambda_{free} = -d^2/dt^2$.

$$K_{free}(t_0,t) = \int D[x]\exp\{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} x\Lambda_{free}x d\tau\} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int\ldots\int\prod_{i=1}^{N-1}\frac{dx_i}{\sqrt{2\pi\Delta t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}}\exp\left\{-\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2\Delta t}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} .$$

Следовательно

$$K(t_0,t) = K_{free}(t_0,t)\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_{free,j}^{1/2}}{\lambda_j^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_{free,j}^{1/2}}{\lambda_j^{1/2}} . \tag{11}$$

Таким образом, из (9)-(11) следует, что

$$\overline{Z}[0] = \exp\{-S[y_{кл}(\tau)]\}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_{free,j}^{1/2}}{\lambda_j^{1/2}} . \tag{12}$$

В нашем случае

$$L(\dot{y},y,\tau) = \frac{1}{2}\left(\dot{y}(\tau) - \frac{f(\varphi(y(\tau))) - (1/2)g'(\varphi(y(\tau)))g(\varphi(y(\tau)))}{g(\varphi(y(\tau)))}\right)^2 = \frac{1}{2}(\dot{y}(\tau) - F(y(\tau)))^2 .$$

Траектория $y_{кл}$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{y}_{кл}(\tau) - F(y_{кл}(\tau))F'(y_{кл}(\tau)) = 0 . \tag{13}$$

Следовательно,

$$\int_{t_0}^{t}\dot{y}_{кл}^2(\tau)d\tau = \dot{y}_{кл}(t)y_{кл}(t) - \dot{y}_{кл}(t_0)y_{кл}(t_0) - \int_{t_0}^{t}F(y_{кл}(\tau))F'(y_{кл}(\tau))y_{кл}(\tau)d\tau ,$$

$$S[y_{кл}(\tau)] = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}F(y_{кл}(\tau))(F(y_{кл}(\tau)) - F'(y_{кл}(\tau))y_{кл}(\tau))d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}(\dot{y}_{кл}(t)y_{кл}(t) - \dot{y}_{кл}(t_0)y_{кл}(t_0)) - \int_{t_0}^{t}F(y_{кл}(\tau))dy_{кл}(\tau) . \tag{14}$$

Оператор Λ в уравнении (8) имеет вид

$$\Lambda = F'(y_{кл}(\tau))^2 + F(y_{кл}(\tau))F''(y_{кл}(\tau)) - d^2 / dt^2 . \qquad (15)$$

Для приближенного вычисления собственных значений λ_j оператора Λ заменим функции $u_j(\tau)$, $y_{кл}(\tau)$, $t_0 \le \tau \le t$, векторами $\mathbf{u}_j = (u_j(\Delta t), u_j(2\Delta t), ..., u_j((N-1)\Delta t))$, $\mathbf{y}_{кл} = (y_{кл}(\Delta t), y_{кл}(2\Delta t), ..., y_{кл}((N-1)\Delta t))$, $\Delta t N = t - t_0$, оператор $\Lambda = F'(y_{кл}(\tau))^2 + F(y_{кл}(\tau))F''(y_{кл}(\tau)) - d^2 / dt^2$ заменим матрицей размерности $(N-1)\times(N-1)$

$$\overline{\Lambda} = \frac{1}{\Delta t^2}\begin{pmatrix} 2+\Delta t^2 f_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2+\Delta t^2 f_2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2+\Delta t^2 f_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2+\Delta t^2 f_{N-1} \end{pmatrix},$$

где $f_j = F'(y_{кл}(j\Delta t))^2 + F(y_{кл}(j\Delta t))F''(y_{кл}(j\Delta t)), \ 1 \le j \le N-1$.

Оператор $\Lambda_{free} = -d^2 / dt^2$ заменим матрицей размерности $(N-1)\times(N-1)$

$$\overline{\Lambda}_{free} = \frac{1}{\Delta t^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Для вычисления собственных значений $\lambda_j, \lambda_{free,j}$ матриц $\overline{\Lambda}, \overline{\Lambda}_{free}$ можно воспользоваться методом последовательностей Штурма [15]. Можно вычислять $\prod_{j=1}^{N-1}\lambda_j = \det\overline{\Lambda}$, $\prod_{j=1}^{N-1}\lambda_{free,j} = \det\overline{\Lambda}_{free}$.

4. Аналог модели Cox Ingersoll Ross

В качестве примера рассмотрим аналог модели Cox Ingersoll Ross, описываемый стохастическим дифференциальным уравнением

$$dx(t) = (ax(t) + b)dt + \sigma\sqrt{x(t)}dw(t) . \qquad (17)$$

ФПВП, соответствующая стохастическому дифференциальному уравнению (17), на малом промежутке времени Δt имеет вид

$$p(x,t+\Delta t,y,t)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y\Delta t}}\exp\left\{-\frac{(x-y-(ay+b-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{2})\Delta t)^2}{2\sigma^2 y\Delta t}\right\}. \tag{18}$$

ФПВП можно записать в виде

$$p(x,t,x_0,t_0)=\lim_{N\to\infty}\int\ldots\int\prod_{i=1}^{N-1}dx_i\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x_i\Delta t}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(x_{i+1}-x_i-(ax_i+b-\sigma^2/4)\Delta t)^2}{2\sigma^2 x_i\Delta t}\right\}. \tag{19}$$

Сделаем замену переменных $x=\varphi(y)=\frac{\sigma^2}{4}y^2$, $dx=\frac{\sigma^2}{2}ydy$. Получим

$$\frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x\Delta t}}=\frac{dy}{\sqrt{2\pi\Delta t}},\quad \frac{\left(\dot{x}-\left(ax+b-\sigma^2/4\right)\right)^2}{2\sigma^2 x}=\frac{1}{2}\left(\dot{y}-\left(\frac{ay}{2}+\frac{4b-\sigma^2}{2\sigma^2 y}\right)\right)^2.$$

Таким образом,

$$p(y,t,y_0,t_0)=\lim_{N\to\infty}\int\ldots\int\prod_{i=1}^{N-1}\frac{dy_i}{\sqrt{2\pi\Delta t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\varphi(y)\Delta t}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\Delta t\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta t}-\left(\frac{ay_i}{2}+\frac{4b-\sigma^2}{2\sigma^2 y_i}\right)\right)^2\right\}, \tag{20}$$

где $y=\varphi^{-1}(x)=2\sqrt{x}/\sigma,\ y_0=\varphi^{-1}(x_0)=2\sqrt{x_0}/\sigma$.

Рассмотрим случай $\sigma=2\sqrt{b}$. Выражение (20) можно записать в виде функционального интеграла по винеровской мере $dw(y)$:

$$p(x,t,x_0,t_0)=\frac{1}{\sigma\sqrt{\varphi(y)}}\exp\left\{\frac{a}{4}(y^2(t)-y^2(t_0))\right\}\times\int\exp\left\{-\frac{a^2}{8}\int_{t_0}^{t}y^2(\tau)d\tau\right\}dw(y).$$

Для вычисления интегралов по винеровской мере можно использовать методы, разработанные в [10,16,17].

Следуя предложенной схеме, интеграл в (20) запишем в виде

$$p(y,t,y_0,t_0)=Z[0]=\frac{1}{\sigma\sqrt{\varphi(y)}}\overline{Z}[0]=\frac{1}{\sigma\sqrt{\varphi(y)}}\int D[y]\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(\dot{y}(\tau)-\frac{a}{2}y(\tau))^2d\tau\right\}, \tag{21}$$

где $D[y] = \lim\limits_{N\to\infty} \prod\limits_{i=1}^{N-1} \frac{dy_i}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}}$.

В данном случае лагранжиан имеет вид

$$L(\dot{y}, y, \tau) = \frac{1}{2}\left(\dot{y}(\tau) - \frac{a}{2}y(\tau)\right)^2.$$

Из (13) получаем, что уравнение Эйлера-Лагранжа для классической траектории имеет вид

$$\ddot{y}_{кл}(\tau) - (a/2)^2 y_{кл}(\tau) = 0. \tag{22}$$

Из (14) следует, что

$$S[y_{кл}(\tau)] = \frac{1}{2}(\dot{y}_{кл}(t)y_{кл}(t) - \dot{y}_{кл}(t_0)y_{кл}(t_0)) - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{a}{2} y_{кл}(\tau)dy_{кл}(\tau) =$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{y}_{кл}(t)y_{кл}(t) - \dot{y}_{кл}(t_0)y_{кл}(t_0)) - \frac{a}{4}(y_{кл}^2(t) - y_{кл}^2(t_0)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{y}_{кл}(t)y - \dot{y}_{кл}(t_0)y_0) - \frac{a}{4}(y^2 - y_0^2).$$

Из этого равенства и (12) получаем выражение для $\overline{Z}[0]$

$$\overline{Z}[0] = \exp\left\{-\frac{1}{2}(\dot{y}_{кл}(t)y - \dot{y}_{кл}(t_0)y_0) + \frac{a}{4}(y^2 - y_0^2)\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \prod_{j=1}^{N-1} \frac{\lambda_{free,j}^{1/2}}{\lambda_j^{1/2}},$$

где $\lambda_j, \lambda_{free,j}$ – собственные значения матриц $\overline{\Lambda}, \overline{\Lambda}_{free}$ размерности $(N-1)\times(N-1)$.

Из (15) следует, что

$$\Lambda = a^2/4 - d^2/dt^2,$$

а матрица $\overline{\Lambda}$ имеет вид

$$\overline{\Lambda} = \frac{1}{\Delta t^2}\begin{pmatrix} 2+\Delta t^2\omega^2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2+\Delta t^2\omega^2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2+\Delta t^2\omega^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2+\Delta t^2\omega^2 \end{pmatrix},$$

где $\omega = a/2$, $\Delta t N = t - t_0$. Матрица $\overline{\Lambda}_{free}$ определяется равенством (16).

Вычисляя определители матриц $\overline{\Lambda}, \overline{\Lambda}_{free}$, получаем, что при $t_0 = 0$, $t = 1$, $\omega = 1$,

$$N = 20, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \prod_{j=1}^{N-1} \frac{\lambda_{free,j}^{1/2}}{\lambda_j^{1/2}} = 0.36808.$$

В данном случае функцию $y_{кл}(\tau)$, $t_0 \le \tau \le t$, можно найти в явном виде, так как можно найти в аналитическом виде решение уравнения (22). Это решение имеет вид

$$y_{кл}(\tau) = \frac{1}{\sinh(\omega(t-t_0))}(x_0 \sinh(\omega(t-\tau)) + x \sinh(\omega(\tau - t_0))).$$

Но так как в общем случае мы не можем найти в аналитическом виде решение уравнения Эйлера-Лагранжа, то будем вычислять функцию $y_{кл}(\tau)$ приближенно. Приближенные значения функции $y_{кл}(\tau)$, $t_0 \le \tau \le t$, находим, решая уравнение (22) с помощью метода сеток для решения нелинейных граничных задач [18].

С помощью полученных приближенных значений для $\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \prod_{j=1}^{N-1} \frac{\lambda_{free,j}^{1/2}}{\lambda_j^{1/2}}$ и $y_{кл}(\tau)$ находим приближенные значения для $\overline{Z}[0] = Z[0]\sigma^2 y/2$. В табл.1 и 2 приведены приближенные и точные значения $\overline{Z}[0]$ для переменной y, связанной с переменной x соотношением $x = \varphi(y) = \sigma^2 y^2/4$. Точные значения $\overline{Z}[0]$ получены из явного выражения

$$\overline{Z}[0] = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2\pi \sinh(\omega(t-t_0))}} \exp\left\{\omega \frac{x^2 - x_0^2}{2} + \omega \frac{4x_0 x - 2\cosh(\omega(t-t_0))(x_0^2 + x^2)}{4\sinh(\omega(t-t_0))}\right\}. \tag{23}$$

Таблица 1. Приближенные и точные значения $\overline{Z}[0]$. $a = 2,\ \sigma = 1,\ b = 1/4,\ t_0 = 0,\ t = 1,\ y_0 = 0.$

y	–3	–2	–1	–0.6	–0.3	0	0.3	0.6	1	2	3
$\overline{Z}[0]_П$	0.093	0.199	0.316	0.348	0.363	0.368	0.363	0.348	0.316	0.199	0.093
$\overline{Z}[0]_T$	0.090	0.196	0.315	0.348	0.363	0.368	0.363	0.348	0.315	0.196	0.090

Таблица 2. Приближенные и точные значения $\overline{Z}[0]$. $a = 2,\ \sigma = 1,\ b = 1/4,\ t_0 = 0,\ t = 1,\ y_0 = 1.$

y	e–3	e–2	$e-1$	e–0.6	$e-0.3$	e	e+0.3	e+0.6	$e+1$	e+2	$e+3$
$\overline{Z}[0]_П$	0.090	0.198	0.320	0.356	0.374	0.381	0.379	0.359	0.327	0.209	0.098
$\overline{Z}[0]_T$	0.090	0.197	0.315	0.348	0.363	0.368	0.363	0.348	0.315	0.197	0.090

Выражение (23) получено из явного выражения для ядра оператора $\exp\left\{-t\frac{1}{2}\left((\frac{d}{dt})^2 + x^2 - 1\right)\right\}$, задаваемого формулой Мелера [9]

$$p_t(x_0, x) = \frac{e^{t/2}}{\sqrt{2\pi \sinh(t)}} \exp\left\{\frac{4x_0 x - 2\cosh(t)(x_0^2 + x^2)}{4\sinh(t)}\right\}.$$

Рассмотрим приближенное вычисление математического ожидания решения уравнения (17) с помощью полученных приближенных значений для $\overline{Z}[0]$ и с учетом нормирующего множителя $\exp\left(-\omega(t-t_0)/2\right)$.

Из (19)–(21) получаем, что приближенные значения математического ожидания вычисляются по формуле

$$Mx = \lim_{N\to\infty}\int\ldots\int x_N\prod_{i=1}^{N}dx_i\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x_i\Delta t}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(x_{i+1}-x_i-ax_i\Delta t)^2}{2\sigma^2 x_i\Delta t}\right\}\exp\left\{-\frac{\omega(t-t_0)}{2}\right\}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int\ldots\int\frac{\sigma^2}{4}y_N^2\frac{1}{\sigma\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}y_N^2}}\frac{\sigma^2}{2}y_N\prod_{i=1}^{N}\frac{dy_i}{\sqrt{2\pi\Delta t}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\Delta t\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta t}-\frac{ay_i}{2}\right)^2\right\}\exp\left\{-\frac{\omega(t-t_0)}{2}\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{\omega(t-t_0)}{2}\right\}\int\frac{\sigma^2}{4}y^2\overline{Z}[0]dy.$$

Точное значение математического ожидания вычисляется из уравнения

$$dMx(t)=\left(aMx(t)+\sigma^2/4\right)dt,\quad Mx(0)=x_0$$

и равно

$$Mx(t)=x_0\exp\{a(t-t_0)\}+\frac{\sigma^2}{4a}(\exp\{a(t-t_0)\}-1).$$

При $a=2$, $\sigma=1$, $b=1/4$, $t_0=0$, $t=1$, $x_0=0$ приближенное значение математического ожидания равно 0.824, точное значение равно 0.799. При $a=2$, $\sigma=1$, $b=1/4$, $t_0=0$, $t=1$, $x_0=1/4$ приближенное значение математического ожидания равно 2.81, точное значение равно 2.65.

5. Заключение

Существует большое число математических моделей в естествознании, приводящих к стохастическим дифференциальным уравнениям (СДУ). Одной из наиболее часто встречающихся на практике задач построения моделей такого рода является введение в динамическую модель, описываемую дифференциальными уравнениями, случайных флуктуаций, обусловленных наличием шума в системе (как, например, в радиотехнике, термодинамике, кинетике химических реакций и др.). Другим источником моделей, основанных на СДУ, является предельный переход в описании системы (например, модели генной диффузии, диффузионная аппроксимация систем массового обслуживания и др.).

Стохастическое дифференциальное уравнение часто используют для описания стохастического поведения системы, но как правило стохастический член уравнения представляется как внешнее случайное воздействие на систему [21]. С позиций математического моделирования одной из актуальнейших задач является конструирование такого стохастического дифференциального уравнения для моделируемой системы, чтобы стохастический член был связан со структурой изучаемой системы [1,2]. Одним из возможных решений этой задачи является получение стохастической и детерминистической частей из одного и того же исходного уравнения. Для этих целей удобно использовать основное кинетическое уравнение.

Системы, в которых временная эволюция происходит в результате взаимодействия ее элементов, удобно описывать с помощью основного кинетического уравнения, (другое название – управляющее уравнение [19], а в англоязычной литературе оно носит название Master equation [5]). Т.о. встает вопрос, как получить описание исследуемой системы, описываемой одношаговыми процессами, с помощью стохастического дифференциального уравнения в форме уравнения Ланжевена из основного кинетического уравнения. Поэтому для решения этой задачи предлагается аппроксимировать основное кинетическое уравнение уравнением Фоккера-Планка, для которого можно записать эквивалентное ему стохастическое дифференциальное уравнение в форме уравнения Ланжевена.

В работах части авторов [1,2,20] задача конструирования СДУ, стохастический член которых связан со структурой изучаемой системы, частично решена. В настоящее время закончена рукопись, завершающая этот цикл исследований. Представление функции плотности вероятности перехода для решения полученных СДУ через функциональный интеграл и методы приближенного вычисления такого функционального интеграла будут рассмотрены в одной из последующих публикаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Д.С. Кулябов, А.В. Демидова.* Введение согласованного стохастического члена в уравнение модели роста популяций // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика», 2012, №3, с.69-78;
D.S. Kuliabov, A.V. Demidova. Vvedenie soglasovannogo stokhasticheskogo chlena v uravnenie modeli rosta populiatsii // Vestnik RUDN. Seriia «Matematika. Informatika. Fizika», 2012, №3, s.69-78.
2. *А.В. Демидова.* Уравнения динамики популяций в форме стохастических дифференциальных уравнений // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика», 2013, №1, с.67-76;
A.V. Demidova. Uravneniia dinamiki populiatsii v forme stokhasticheskikh differentsialnykh uravnenii // Vestnik RUDN. Seriia «Matematika. Informatika. Fizika»., 2013, №1, s.67-76.
3. *P.E. Kloeden, E. Platen.* Numerical solution of stochastic differential equations. – Springer-Verlag. 1992.
4. *Д.Ф. Кузнецов.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. С.-Петербург, 2001;
D.F. Kuznetsov. Chislennoe integrirovanie stokhasticheskikh differentsialnykh uravnenii. –S.-Peterburg, 2001.

5. *H. Risken.* The Fokker-Plank equation: methods of solution and applications. – Springer-Verlag, 1984.
6. *R.P. Feynman, A.R. Hibbs.* Quantum mechanics and path integrals. – McGraw-Hill, New York. 1965.
7. *H. Kleinert.* Path integrals in quantum mechanics, statistics polymer physics, and financial markets. – Singapore: World Scientific Publishing, 2004.
8. *Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. – М.: 1976;
   N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov. Vvedenie v teoriiu kvantovannykh polei. – M.: 1976.
9. *Дж. Глимм, А. Джаффе.* Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов. – М.: 1984;
   J. Glimm, A. Jaffe. Quantum Physics. A Functional Integral Point of View. – Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1981, 417 p.
10. *А.Д. Егоров, Е.П. Жидков, Ю.Ю. Лобанов.* Введение в теорию и приложения функционального интегрирования. – М.: Физматлит, 2006;
    A.D. Egorov, E.P. Zhidkov, Iu.Iu. Lobanov. Vvedenie v teoriiu i prilozheniia funktsionalnogo integrirovaniia. – M.: Fizmatlit, 2006.
11. *F. Langouche, D. Roekaerts, E. Tirapegui.* Functional integration and semi-classical expansions. – D. Reidel Pub.Co., Dordrecht, 1982.
12. *Horacio S. Wio.* Application of path integration to stochastic process: an introduction. – World Scientific Publishing Company, 2013.
13. *L. Onsager, S. Machlup.* // Phys. Rev., 1953, 91, p.1505.
14. *J.W. Lamperti.* Semi-stable stochastic processes // Trans. Amer. Math. Soc., 1962, 104, p.62-78.
15. *J.H. Wilkinson.* The algebraic eigenvalue problem. – Oxford, 1965.
16. *А.Д. Егоров, П.И. Соболевский, Л.А. Янович.* Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. – М.: Наука и техника, 1985;
    A.D. Egorov, P.I. Sobolevskii, L.A. Ianovich. Priblizhennye metody vychisleniia kontinualnykh integralov. – M.: Nauka i tekhnika, 1985.
17. *A.D. Egorov, P.I. Sobolevsky and L.A. Yanovich.* Functional integrals: Approximate evaluation and applications. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993.
18. *В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный.* Вычислительные методы высшей математики, т.2. – Минск: 1975;
    V.I. Krylov, V.V. Bobkov, P.I. Monastyrnyi. Vychislitelnye metody vysshei matematiki. T.2. – Minsk: 1975.
19. *К.В. Гардинер* . Стохастические методы в естественных науках. − М.: Мир, 1986.
    C.W. Gardiner. Handbook of Stochastic Methods: For Physics, Chemistry, and the Natural Sciences. Springer-Verlag; 2 Sub edition (January 1986), 442 p.
20. *А.В. Демидова, М.Н. Геворкян, А.Д. Егоров, Д.С. Кулябов, А.В. Королькова, Л.А. Севастьянов.* Влияние стохастизации на одношаговые модели // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика», 2014, №1, с.71-85;
    A.V. Demidova, M.N. Gevorkian, A.D. Egorov, D.S. Kuliabov, A.V. Korolkova, L.A. Sevastianov. Vliianie stokhastizatsii na odnoshagovye modeli // Vestnik RUDN. Seriia «Matematika. Informatika. Fizika», 2014, №1, s.71-85.
21. *G.A. Gottwald, J. Harlim.* The role of additive and multiplicative noise in filtering complex dynamical systems // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2013, v.469.

Поступила в редакцию 12.05.15