



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Савицкий, Т. А. Чистякова, Численное моделирование распространения звуковых пучков конечной амплитуды в нелинейно-диссипативной среде, *Матем. моделирование*, 2014, том 26, номер 3, 49–64

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.119.253.31

28 сентября 2024 г., 07:55:15



УДК 519.6:532.5

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ
В НЕЛИНЕЙНО-ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ**

© 2014 г. *О.А. Савицкий, Т.А. Чистякова*

Технологический институт Южного федерального университета в г. Таганроге
osav66@mail.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.», проект №14.А18.21.0680.

Работа посвящена математическому моделированию распространения звуковых пучков конечной амплитуды в нелинейно-диссипативной среде, а также исследованию построенной дискретной модели. В работе использовался метод расщепления по физическим процессам. При построении дискретной модели предпочтение отдано монотонным схемам. Исследованы эффекты фокусировки в нелинейно-диссипативной среде.

Ключевые слова: уравнение Хохлова-Заболотской-Кузнецова, схема расщепления, схема с весами, вычислительный эксперимент, звуковой пучок, дифракция, нелинейность, диссипация.

**NUMERICAL SIMULATION OF PROPOGATION OF THE SOUND BEAMS
OF FINITE AMPLITUDE IN NONLINEAR DISSIPATIVE MEDIUM**

O.A. Savitsky, T.A. Chistyakova

Taganrog Institute of Technology of the Southern Federal University

The paper is devoted to mathematical modeling of propagation of the sound beams of finite amplitude in nonlinear dissipative medium, as well as to the study of constructed discrete model. We used a method of splitting by physical processes. When constructing a discrete model, preference is given to monotone schemes. The effects of focusing in a nonlinear dissipative medium are researched.

Key words: Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov equation, splitting scheme, the scheme with weights, a numerical experiment, the sound beam, diffraction, nonlinearity, dissipation.

Введение

Нелинейные процессы в ультразвуковых пучках вследствие отсутствия физической дисперсии в большинстве звукопрозрачных сред представляют собой сложные пространственно-временные явления, описываемые квазилинейными уравнениями со степенным характером нелинейных членов. В большинстве практически важных случаев решение модельных уравнений акустики не может быть получено аналитическими ме-

тодами. Единственной возможностью изучения и практического использования нелинейных волновых эффектов является применение методов математического моделирования.

Основными физическими процессами, сопровождающими распространение волновых пучков большой амплитуды, являются дифракционные, диссипативные, нелинейные. Влиянием дисперсии скорости звука в среде в большинстве практически важных случаев можно пренебречь. Указанные процессы могут быть учтены в рамках квазилинейного уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова (ХЗК) [1, 2]. В последнее время интерес к изучению сложных пространственных нелинейных волновых процессов связан с широкими перспективами их практического использования [3, 4].

В настоящее время отсутствуют доступные специализированные математические модели и соответствующее программное обеспечение, позволяющие исследовать численными методами сложные нелинейные процессы в пространственно двумерных и трехмерных звуковых полях и выполнять инженерные расчеты при разработке новых методов и устройств дистанционного зондирования сред. При этом, как правило, результаты по существующим моделям носят частный характер и встречаются в научной литературе по нелинейной акустике [5, 6]. Сложившаяся ситуация сдерживает практическое применение нелинейных эффектов в гидроакустике, неразрушающем контроле, медицинской диагностике.

К настоящему времени в России и за рубежом разработан ряд математических моделей для решения уравнения нелинейных звуковых пучков, использующихся в исследовательских целях. Рассмотрим кратко их основные особенности. Бахвалов Н.С. с соавторами разработал численный метод для решения уравнения ХЗК на основе схемы расщепления по физическим процессам для осесимметричных источников. В предложенном алгоритме дифракционные и диссипативные процессы вычислялись в частотной области, а нелинейный член — во временной области, при этом использовался метод Годунова со специальной разностной схемой для решения уравнений в частных производных [5]. В 1984 году Аанонсен с соавторами [7] разработал алгоритм решения ХЗК в частотной области. Алгоритм использует преобразование Фурье для конвертации ХЗК в набор сдвоенных дифференциальных уравнений в частных производных. Затем использовался метод конечных разностей для решения этих «сдвоенных» уравнений. Позже Бейкер с соавторами [8] обобщил частотный алгоритм Аанонсена для неосесимметричных источников и обобщил метод для импульсных волн (разработанный ими код базировался на алгоритме, также известном как код Бергена). В 1995г. Ли и Гамильтон развили конечно-разностный операторно-расщепленный алгоритм по времени (известный как Техасский код). Для решения ХЗК использовалась схема расщепления по каждому из физических процессов в направлении возрастания осевой координаты. Первоначально данный алгоритм был создан для импульсных возбуждений и для осесимметричных источников. В 2005г. Янг и соавторы [9] обобщили Техасский код на случай неосесимметричных источников, при этом использовалась схема разложения по поперечным пространственным направлениям. В работе [10] был предложен подход для аппроксимации дифракционного члена без разложения его по боковым осям x и y .

Общим недостатком дискретных математических моделей, использующих подход Ли и Гамильтона, является неконсервативность разностных схем, применяемых для учета нелинейного вклада в распространение волны. Другим важным недостатком разно-

видностей Техасского кода является то, что при решении дифракционной задачи направление счета совпадает с направлением роста временной переменной, при этом используются граничные условия первого рода для начального и конечного момента времени, такие же, как и при расчете диссипации. Вследствие этого в указанных моделях выполнение правого граничного условия по времени (для конечного момента времени) при расчете дифракционной задачи не гарантируется.

1. Постановка задачи

Для описания распространения звуковых пучков конечной амплитуды в нелинейно-диссипативной среде использовано уравнение Хохлова-Заболотской-Кузнецова:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial v}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} v \quad (1)$$

с начальным условием:

$$v(0, \theta, r) = V(\theta, r)$$

и следующими граничными условиями:

– условие периодичности сигнала:

$$v(z, 0, r) = v(z, 2\pi, r), \quad v'_{\theta}(z, 0, r) = v'_{\theta}(z, 2\pi, r),$$

– условие симметричности поля:

$$v'_r(z, \theta, 0) = 0,$$

– условие отсутствия источников энергии в бесконечно удаленной точке:

$$v(z, \theta, \infty) = 0,$$

где $v = v(z, \theta, r)$ – величина скорости частиц среды, Γ – диссипативный параметр, θ – время в сопровождающей системе координат, z – нормированное расстояние, N – параметр уравнения, характеризующий соотношение нелинейной и дифракционной длин волны, Δ_{\perp} – поперечный лапласиан в полярной системе координат

$$\left(\Delta_{\perp} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right).$$

Расчетная область по пространственным направлениям x, y, z представляет собой цилиндр (рис. 1).

Для решения поставленной задачи в настоящей работе использовались методы расщепления по физическим процессам, интегро-интерполяционный метод, экономичные прямые методы решения сеточных уравнений, разработанные и хорошо зарекомендовавшие себя при решении задач гидродинамики [11].

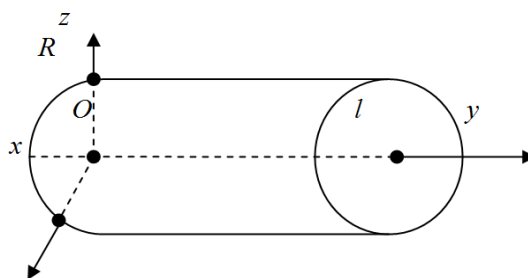


Рис.1. Расчетная область.

2. Построение дискретной модели

Дискретная модель строится на основе метода расщепления по физическим процессам. После конечно-разностной аппроксимации первой пространственной производной и применения метода расщепления исходная задача сводится к решению системы двух дифференциально-разностных уравнений (2) и (4). Первое из полученных уравнений учитывает совместное действие нелинейных и диссипативных процессов, а второе – дифракционных. Предложенный подход позволяет решить задачу получения устойчивой монотонной разностной схемы и избежать появления нефизических осцилляций получаемых решений без применения дополнительных искусственных приемов, применение которых обычно приводит к существенному увеличению вычислительных издержек [6].

Для построения решения разностной схемы вводится равномерная сетка:

$$w_h = \{z_n = nh_z, \theta_j = jh_\theta, r_k = kh_r; n = \overline{1, N_z}, j = \overline{0, M}, k = \overline{0, P}; N_z h_z = l, M h_\theta = 2\pi, P h_r = R\},$$

где n, j, k – индексы по направлениям z, θ, r соответственно; h_z, h_θ, h_r – шаги по направлениям z, θ, r соответственно; N_z, M, P – количество узлов сетки по направлениям z, θ, r соответственно; l, R – высота и радиус цилиндра соответственно.

После аппроксимации уравнения (1) по переменной z и введения новых переменных

$$u^n \equiv v^n, \quad u^{n+1} \equiv w^n \equiv v^{n+\sigma}, \quad w^{n+1} \equiv v^{n+1}, \quad v^{n+\tilde{\mu}} \equiv u^{n+\mu}, \quad v^{n+\tilde{\lambda}} \equiv w^{n+\lambda},$$

где $v^{n+\sigma}$ – значение поля v на промежуточном пространственном слое, $\sigma \in (0;1)$, $u^{n+\mu} = \mu u^{n+1} + (1-\mu)u^n$, $w^{n+\lambda} = \lambda w^{n+1} + (1-\lambda)w^n$, $\mu \in [0;1]$, $\lambda \in [0;1]$, $v^{n+\tilde{\mu}}, v^{n+\tilde{\lambda}}$ – значения поля v на некотором пространственном слое, исходная задача разбивается на две подзадачи, в одной из которых учитываются эффекты нелинейности и диссипации среды уравнением

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{h_z} - u^n \frac{\partial u^{n+\mu}}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 u^{n+\mu}}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями:

$$u(z, 0, r) = u(z, 2\pi, r), \quad u'_\theta(z, 0, r) = u'_\theta(z, 2\pi, r), \quad (3)$$

а в другой – дифракция в квазиоптическом приближении. Такое приближение модели-

рует дифракционные процессы как диффузию амплитуды возмущения в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны, и описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{w^{n+1} - w^n}{h_z} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} w^{n+\lambda} \quad (4)$$

с граничными условиями

$$w'_r(z, \theta, 0) = 0, \quad w(z, \theta, \infty) = 0. \quad (5)$$

Для аппроксимации задач (2), (4) по пространственной переменной z использованы схемы с весами [12].

Дискретный аналог задачи (2)-(3), построенный при помощи интегро-интерполяционного метода, запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{u_{0,k}^{n+1} - u_{0,k}^n}{h_z} - \left(u_{1/2,k}^n \frac{u_{1,k}^{n+\mu} - u_{0,k}^{n+\mu}}{2h_{\theta}} + u_{M-1/2,k}^n \frac{u_{0,k}^{n+\mu} - u_{M-1,k}^{n+\mu}}{2h_{\theta}} \right) - \\ & - \Gamma \frac{u_{1,k}^{n+\mu} - 2u_{0,k}^{n+\mu} + u_{M-1,k}^{n+\mu}}{h_{\theta}^2} = 0 \quad j = 0, \\ & \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{h_z} - \left(u_{j+1/2,k}^n \frac{u_{j+1,k}^{n+\mu} - u_{j,k}^{n+\mu}}{2h_{\theta}} + u_{j-1/2,k}^n \frac{u_{j,k}^{n+\mu} - u_{j-1,k}^{n+\mu}}{2h_{\theta}} \right) - \\ & - \Gamma \frac{u_{j+1,k}^{n+\mu} - 2u_{j,k}^{n+\mu} + u_{j-1,k}^{n+\mu}}{h_{\theta}^2} = 0, \quad 1 \leq j \leq M-2, \\ & \frac{u_{M-1,k}^{n+1} - u_{M-1,k}^n}{h_z} - \left(u_{M-1/2,k}^n \frac{u_{0,k}^{n+\mu} - u_{M-1,k}^{n+\mu}}{2h_{\theta}} + u_{M-3/2,k}^n \frac{u_{M-1,k}^{n+\mu} - u_{M-2,k}^{n+\mu}}{2h_{\theta}} \right) - \\ & - \Gamma \frac{u_{0,k}^{n+\mu} - 2u_{M-1,k}^{n+\mu} + u_{M-2,k}^{n+\mu}}{h_{\theta}^2} = 0, \quad j = M-1, \quad u_{j,k}^0 = V_{j,k}. \end{aligned} \quad (6)$$

Сеточное уравнение (6) решается методом циклической прогонки.

Решение задачи (4)-(5) находится методом гармоник (тригонометрическая интерполяция). Функцию скорости частиц среды можно представить усеченным рядом Фурье, полученным в результате применения тригонометрической интерполяции следующим образом:

$$w = \sum_{j=-N/2}^{N/2} c_j \exp(i\omega j \theta), \quad (7)$$

где w – частота первой гармоники, j – номер гармоники, N – количество дискретных зна-

чений величины скорости частиц среды на периоде. Так как функции $\exp(i\omega j\theta)$ для различных j линейно независимы, то получим уравнение

$$i\omega j \frac{(c_j^{n+1} - c_j^n)}{h_z} = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} c_j^{n+\lambda}.$$

Дискретный аналог полученного уравнения с граничными условиями (5) может быть записан следующим образом:

$$i\omega j \frac{c_{j,k}^{n+1} - c_{j,k}^n}{h_z} = N \frac{c_{j,1}^{n+\lambda} - c_{j,0}^{n+\lambda}}{h_r^2}, \quad k=0,$$

$$i\omega j k \frac{c_{j,k}^{n+1} - c_{j,k}^n}{h_z} = \frac{N}{4} \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{c_{j,k+1}^{n+\lambda} - c_{j,k}^{n+\lambda}}{h_r^2} - \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{c_{j,k}^{n+\lambda} - c_{j,k-1}^{n+\lambda}}{h_r^2} \right), \quad 0 < k < P, \quad (8)$$

$$c_{j,k}^{n+1} = 0, \quad k=P.$$

Коэффициенты $c_{j,k}^n$ на предыдущем временном слое находятся при помощи алгоритма быстрого преобразования Фурье из поля $w_{j,k}^n$.

3. Исследование дискретной модели

На основе принципа максимума выполнено исследование устойчивости разностной схемы (6), выполнение которого также гарантирует монотонность разностной схемы. Для доказательства устойчивости разностной схемы (8) был использован энергетический метод. Разностная схема (6) устойчива и монотонна при следующих ограничениях на величину шагов по временной и пространственной переменным:

$$h_{\theta} \leq \frac{2\Gamma}{|u|}, \quad h_z \leq \frac{h_{\theta}^2}{2\Gamma(1-\sigma)}.$$

Разностная схема (8) абсолютно устойчива при $\lambda \geq 1/2$ и имеет второй порядок погрешности аппроксимации при $\lambda = 1/2$. Погрешность аппроксимации математической модели (6)-(8) равна $O(h_z + h_{\theta}^2)$. Для повышения порядка погрешности аппроксимации уравнения (2) по пространственной координате z можно использовать следующие дискретные аналоги диссипативного и нелинейного членов уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \Big|_{(z_{n+1/2}, \theta_j, r_k)} = \frac{u_{j+1,k}^{n+\mu} - 2u_{j,k}^{n+\mu} + u_{j-1,k}^{n+\mu}}{h_{\theta}^2} + O(h_z^2 + h_{\theta}^2) \quad \text{при} \quad \mu = 1/2,$$

$$u \frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{(z_{n+1/2}, \theta_j, r_k)} = \left(u_{j+1/2,k}^n \frac{u_{j+1,k}^{n+1} + u_{j,k}^{n+1}}{2h_{\theta}} - u_{j-1/2,k}^n \frac{u_{j,k}^{n+1} + u_{j-1,k}^{n+1}}{2h_{\theta}} \right) + O(h_z^2 + h_{\theta}^2). \quad (9)$$

При этом условия устойчивости и монотонности запишутся в следующем виде:

$$h_0 \leq \frac{\Gamma}{|u|}, \quad h_z \leq \frac{h_0^2}{2\Gamma} \leq \left(\frac{\Gamma}{h_0^2} + \frac{u_{j+1,k}^n - u_{j-1,k}^n}{2h_0} \right)^{-1}. \quad (10)$$

Трудоёмкость алгоритма (6)-(8) составляет $Q = 20PM \log_2 M + 51PM$ арифметических операций. Наиболее трудоёмкой частью данного алгоритма является расчет коэффициентов ряда Фурье для перехода от полевого описания к спектральному и обратно согласно формуле (7). При использовании аппроксимаций (9) ограничение сверху на шаг h_0 уменьшается в два раза, а на шаг h_z уменьшается в 8 раз, что приводит к увеличению минимальных размеров расчетных массивов в два раза и времени счета более чем в 16 раз. Вместе с тем, при выполнении условий (10) разностные схемы, использующие аппроксимации (9), дают заведомо более точный результат.

Для разностных схем (6)-(9) несложно показать, что при распространении волн в виде нелинейных звуковых пучков только лишь приграничные узлы являются источниками (стоками) поля скоростей, что соответствует непрерывному физическому процессу в рассматриваемой открытой области. Другими словами, данная дискретная модель соответствует ее непрерывному аналогу с точки зрения баланса энергии и является консервативной.

4. Программная реализация

Разработка программного комплекса, реализующего построенную математическую модель, предполагала достижение следующих основных целей: создание мощного инструмента для проведения исследований в области теории нелинейных волновых процессов; разработка современных программных средств для выполнения инженерных расчетов при создании новых образцов техники, основанной на принципах нелинейной акустики.

Программный комплекс реализует два основных подхода к описанию нелинейных волновых процессов – полевой и спектральный. Предложенные программно-алгоритмические решения позволяют выполнять расчеты поля скорости частиц среды в акустической волне и порядка нескольких тысяч гармонических составляющих нелинейно искажающегося временного профиля. В структуру программного комплекса входят следующие блоки:

- управляющий блок (в данном блоке осуществляются следующие действия: выделение памяти для используемых переменных, ввод начальных условий, задание вспомогательных массивов для быстрого преобразования Фурье; и вызываются функции: расчет скорости частиц среды с учетом диссипации и нелинейности процесса распространения волновых пучков, расчет коэффициентов ряда Фурье для функции скорости частиц среды, расчет скорости частиц среды с учетом дифракции, расчет функции скорости частиц среды по коэффициентам ряда Фурье, функции вывода данных и удаления массивов);

- блок расчета скорости частиц среды с учетом диссипации и нелинейности процесса распространения волн в виде пучков;

- блок построения сеточных уравнений для расчета скорости частиц среды с учетом диссипации и нелинейности процесса распространения волновых пучков;

- блок прямого хода быстрого преобразования Фурье (в данном блоке в матрице скоростей v для каждой строки как для вектора применяется быстрое преобразование Фурье и полученные векторы заносятся в матрицу коэффициентов Фурье C);
- блок обратного хода быстрого преобразования Фурье (в данном блоке в матрице коэффициентов Фурье C для каждой строки выполняется комплексное сопряжение и как для вектора применяется быстрое преобразование Фурье, затем полученные векторы заносятся в матрицу скоростей v);
- блок быстрого преобразования Фурье;
- блок расчета методом прогонки СЛАУ с комплексной матрицей;
- блок расчета скорости частиц среды с учетом дисперсии скорости распространения волновых пучков;
- блок расчета СЛАУ методом циклической прогонки.



Рис.2. Схема алгоритма программы.

Схема алгоритма программы представлена на рис.2. Для тестирования разработанного программного комплекса использовалась модельная задача распространения первоначально синусоидального звукового пучка конечной амплитуды с гауссовым поперечным распределением. Такая задача хорошо исследована и может считаться эталонной для проверки правильности работы построенной математической модели и ее программной реализации. При $N \gg 1$ приведенная задача имеет известное аналитическое решение [3].

5. Аналитические решения

Рассмотрим возможные предельные случаи для исходного уравнения:

- преобладание нелинейных и диссипативных процессов над дифракционными ($N \ll \Gamma < 1$), тогда имеет место следующее уравнение Бюргерса:

$$\frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial v}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0, \quad (11)$$

– преобладание дифракционных процессов над нелинейными и диссипативными ($\Gamma \ll N$, $N \gg 1$), тогда получаем параболическое уравнение теории дифракции

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial z} = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} v. \quad (12)$$

Точное решение уравнения (11) имеет вид

$$v(\theta, z) = 2\Gamma \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \left\{ \frac{1}{\sqrt{4\pi\Gamma z}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{1}{2\Gamma} \int_0^{\theta'} v(\theta'', 0) d\theta'' - \frac{(\theta - \theta')}{4\Gamma z} \right] d\theta' \right\}. \quad (13)$$

Решение уравнения (12) в случае гауссова пучка гармонических волн имеет вид

$$A(r, x) = \frac{ika^2 A_0}{2x + ika^2} \exp \left(-\frac{ikr^2}{2x + ika^2} \right). \quad (14)$$

В стандартной записи (13) примет вид

$$A(r, x) = \frac{ka^2 A_0}{(4x^2 + k^2 a^4)^{1/2}} \exp \left(-\frac{k^2 a^4 r^2}{4x^2 + k^2 a^4} - i \left(\frac{2xkr^2}{4x^2 + k^2 a^4} - \arctg \left(\frac{2x}{ka^2} \right) \right) \right). \quad (15)$$

Учитывая, что $N = L_d / L_p$, $z = x / L_p$, $L_d = (ka^2) / 2$, $R = r / a$, получим:

$$A(r, z) = \frac{1}{(N^2 z^2 + 1)^{1/2}} \exp \left(-\frac{R^2}{N^2 z^2 + 1} - i \left(\frac{R^2 Nz}{(Nz)^2 + 1} - \arctg(Nz) \right) \right). \quad (16)$$

Решения (13), (16) использовались для верификации построенной математической модели и отладки разработанного программного обеспечения.

6. Результаты численных экспериментов для гауссового пучка

В настоящем разделе рассмотрены гармонические пучки с начальным гауссовским распределением: $V(\theta, r) = \exp(-r^2) \sin(\theta)$. На рис.3 более темным цветом изображена исходная функция скорости частиц среды (при $z=0$), а более светлой поверхности соответствует решение исходного уравнения при следующих параметрах: $z=0.5$, $\Gamma=0.001$, $N=0.4$, $P=100$, $M=2^{12}$. На рис.4 представлено решение при $z=1$.

На рис.5 приведена функция двух переменных $v(\theta, r)$ при фиксированных значениях $z=0, 1, 2, 4$. При этом вертикальная ось соответствует переменной r , а горизонтальная – переменной θ . С ростом z положительный и отрицательный фронты сближаются.

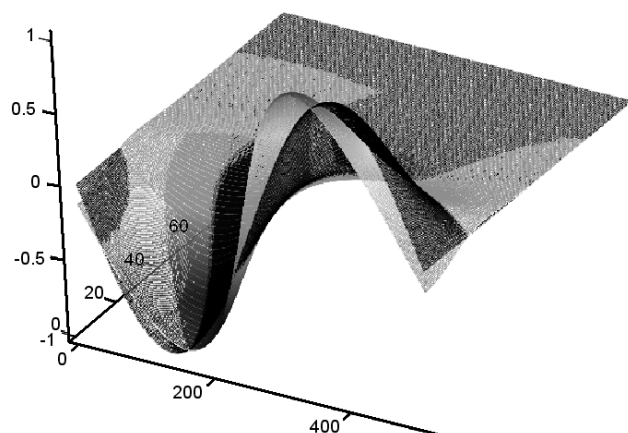


Рис.3. Функции скорости частиц среды при $z=0$ и $z=0.5$.

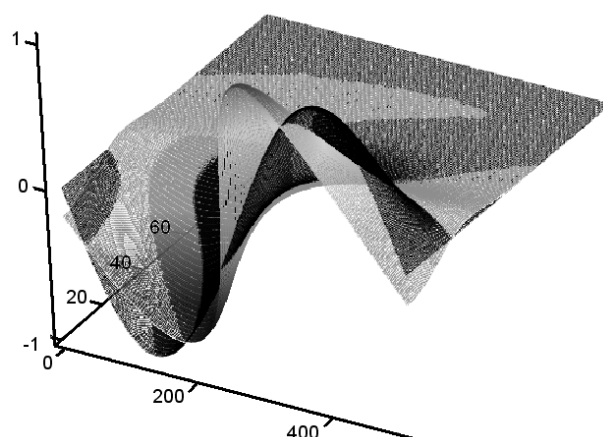


Рис.4. Функции скорости частиц среды при $z=0$ и $z=1$.

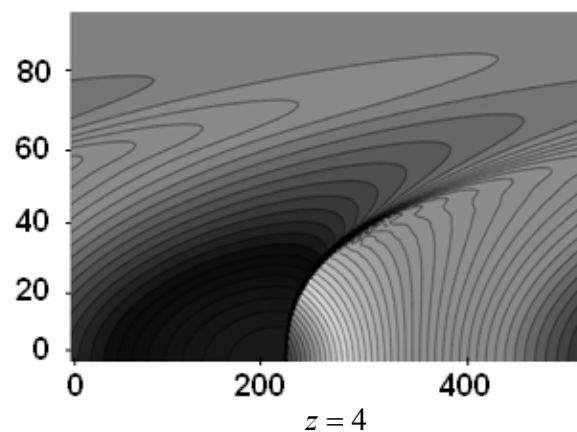
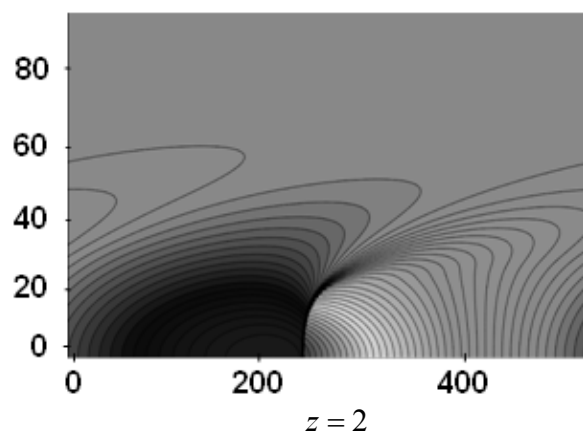
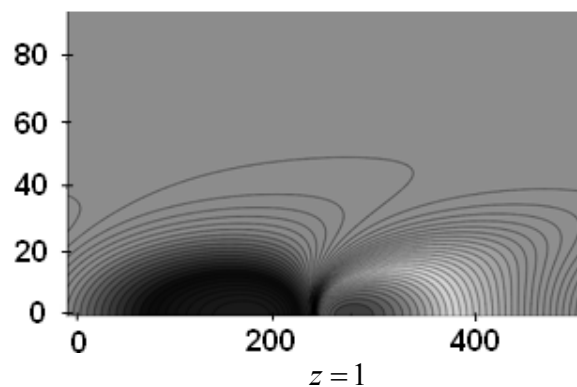
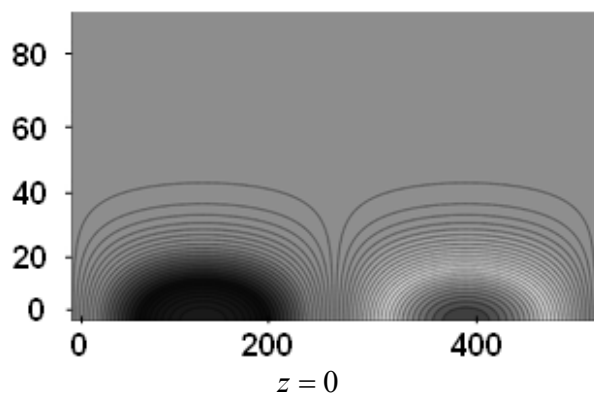


Рис.5. Функция двух переменных $v(\theta, r)$ при фиксированных значениях z .

Из рис.3-5 видно, как с ростом z в приосевой области формируется ударный фронт с одновременным расплыванием интенсивности поля в поперечном направлении и трансформацией первоначально плоского волнового фронта в квазисферический.

7. Пример применения программного комплекса для исследования сложных нелинейных пространственных эффектов

Построенная математическая модель и ее программная реализация позволяет выполнять исследования широкого спектра сложных нелинейных явлений в неоднородных

звуковых полях. В частности, разработанное программное обеспечение использовалось при изучении нелинейных волновых процессов в поле фокусированных звуковых пучков, интерес к которым в последнее время возрастает в связи с развитием ультразвуковых методов воздействия на биологические ткани и органы.

Рассмотрены пучки с распределением, равномерным по амплитуде и квадратичным по фазе: $V(\theta, r) = \sin(\theta + kr^2)$, $k = 1,6\pi$. На рис.6 изображена исходная функция скорости частиц среды, а на рис.7 – функция скорости при следующих параметрах: $z = 0,5$, $\Gamma = 0,001$, $N = 0,2$, $P = 100$, $M = 2^{16}$. Видно, что происходит фокусировка звукового пучка.

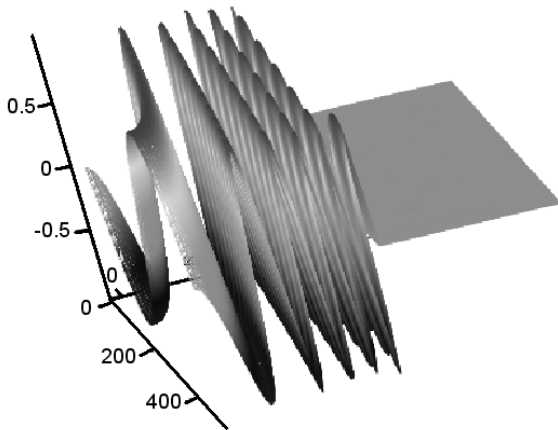


Рис.6. Функция скорости частиц среды при $z = 0$.

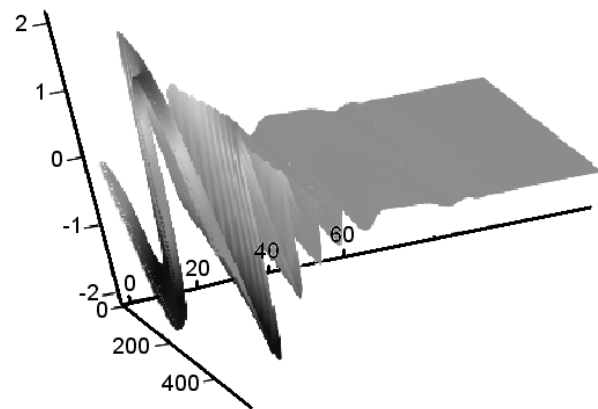


Рис.7. Функция скорости частиц среды при $z = 0,5$.

На рис.8 представлены графики зависимостей скорости частиц среды v от переменной θ на оси симметрии ($r = 0$) при разных z : $z = 0, 0,5, 1, 1,5$. Крестами обозначены максимальные значения скорости частиц среды при фиксированных $z = 0, 0,1, 0,2, \dots, 1,5$, а кругами – минимальные значения скорости при тех же значениях z .

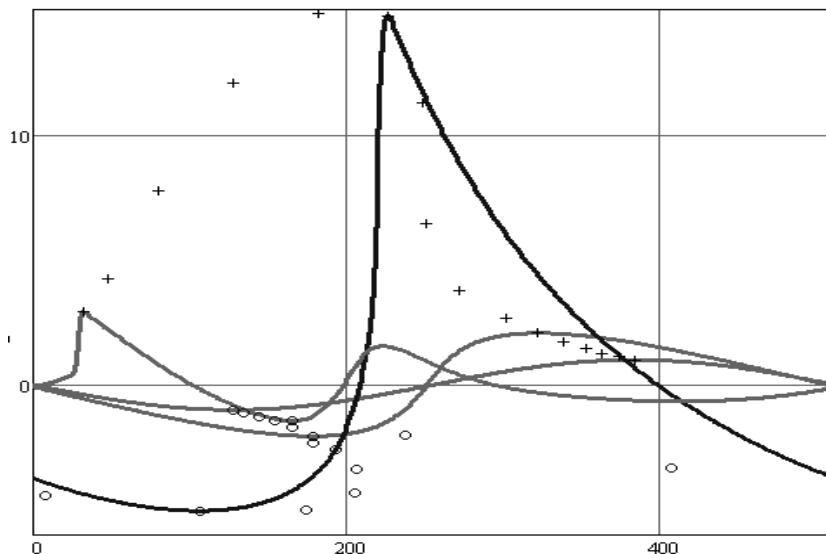


Рис.8. Зависимости скорости частиц среды от θ на оси симметрии при разных z : $z = 0, 0,5, 1, 1,5$.

На рис.9 изображены графики зависимости скорости частиц среды v от переменной z на оси симметрии ($r = 0$), при этом верхнему графику соответствует функция $v^+(z) = \max_{\theta, r=0} \{v(z, \theta, r)\}$, а нижнему – $v^-(z) = \min_{\theta, r=0} \{v(z, \theta, r)\}$.

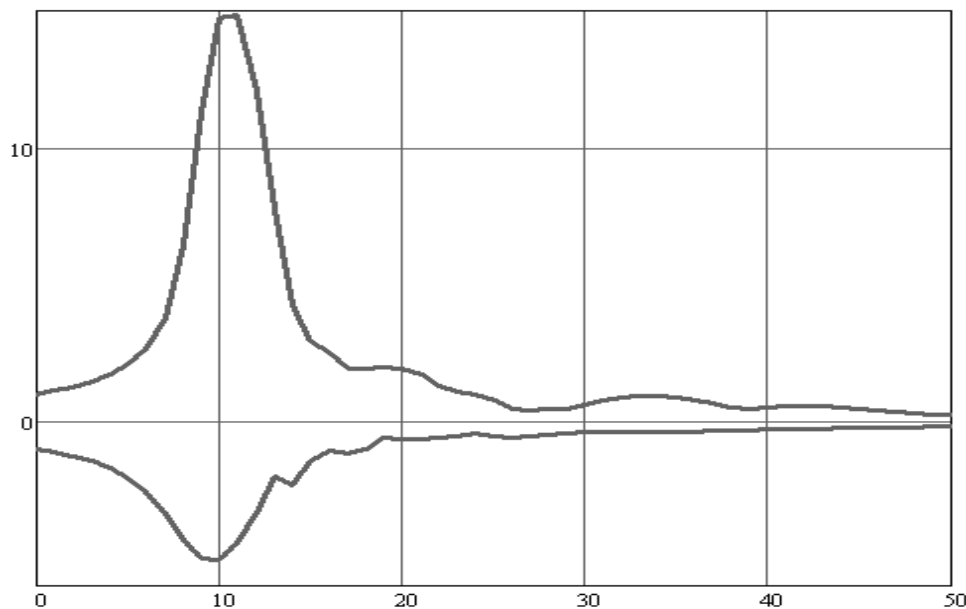


Рис.9. Зависимости скорости частиц среды от z на оси симметрии.

Таким образом, гауссовский пучок с ростом координаты z расширяется, его интенсивность снижается, а пучок, имеющий начальное распределение $V(\theta, r) = \sin(\theta + kr^2)$, фокусируется с ростом z и его интенсивность возрастает.

8. Верификация результатов работы программного комплекса

Для проверки корректности работы программного комплекса моделирования распространения звуковых пучков в квадратично-нелинейной среде без дисперсии (MSB) выполнялись расчеты при стандартных начальных условиях в виде гауссова звукового пучка с гармонической временной зависимостью при различных значениях внешних параметров N и Γ модельного уравнения ХЗК. Такая методика проверки позволяет выполнить ее для всех предельных случаев соотношения масштабов проявления нелинейных, дифракционных и диссипативных процессов.

В работе выполнялся качественный и количественный анализ результатов расчетов из различных источников. Для количественной оценки различий поведения волнового профиля использовалась величина σ среднего квадратического отклонения, выраженного в процентах по отношению к амплитуде исходной волны.

Для одномерного случая существуют решения Римана (уравнения простых волн) и точное решение уравнения Бюргерса, записанное в интегральной форме (13). Как известно, уравнение ХЗК переходит в уравнение простых волн при $N \rightarrow 0$, $\Gamma \rightarrow 0$, а в уравнение Бюргерса – при $N \rightarrow 0$.

В работе был выполнен анализ формы волнового профиля на оси звукового пучка при $N \ll 1$, $\Gamma \ll 1$, что соответствует преобладанию нелинейных процессов над дифракционными и диссипативными. Сравним его с волновым профилем, являющимся решением уравнения простых волн (само решение) для первоначально гармонической волны.

Сравнение результатов работы разработанной нами программы с точным аналитическим решением уравнения простых волн выполнялось при значениях параметров модели $\Gamma=0.001$ и $N=0.001$ при $R=0$. Результаты сравнений представлены на рис.10. Из сравнения видно, что имеет место не только качественное, но и количественное хорошее совпадение вплоть до области формирования ударного фронта.

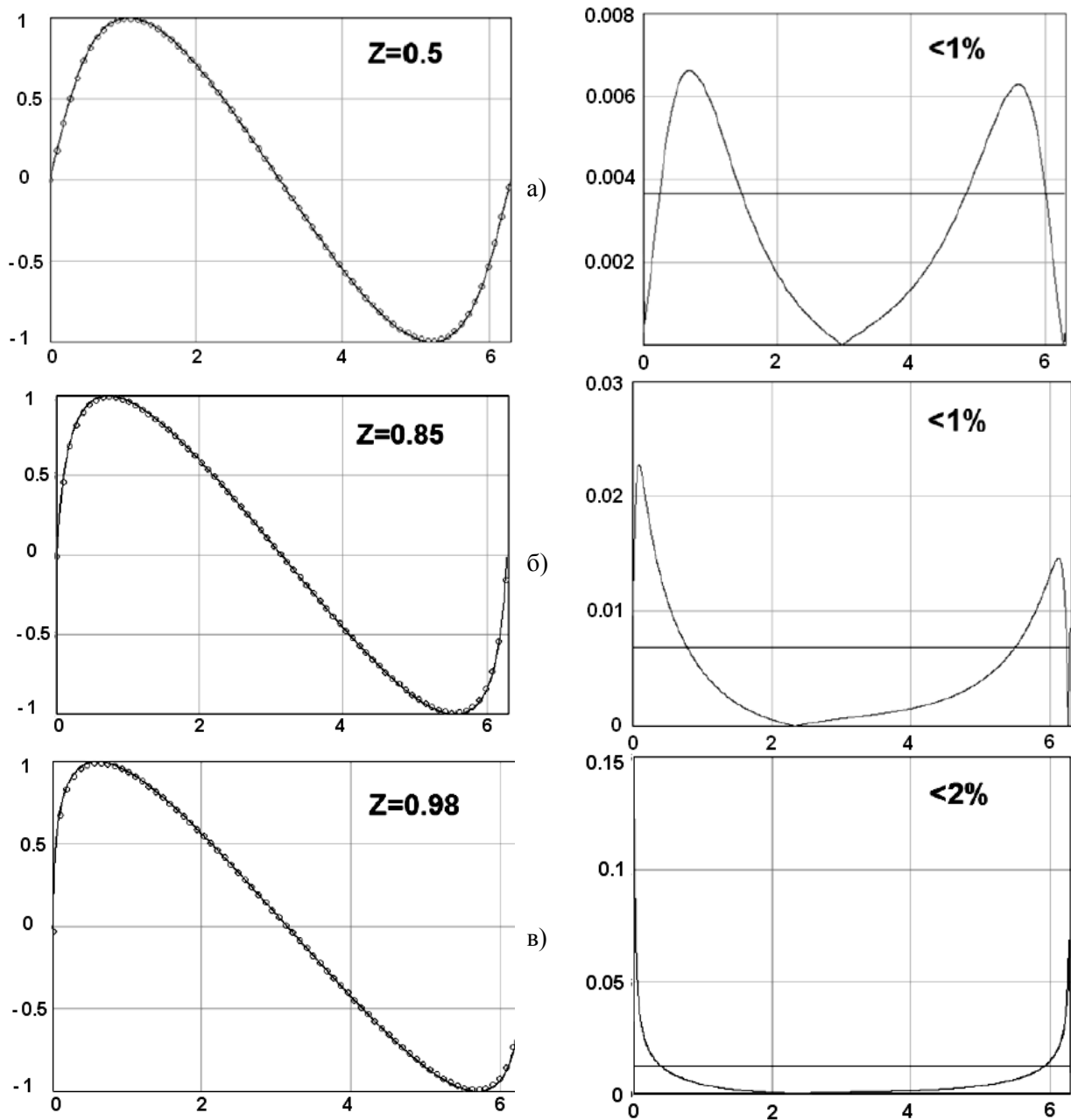


Рис.10. Результаты верификации математической модели для предельного случая (11) (слева – расчетные профили, справа – погрешность счета).

На рис.11-12 представлены осевые ($R=0$) распределения амплитуды и фазы основной гармоники в гауссовом пучке соответственно для предельного случая (12). Сравнимые зависимости получены путем расчета по формуле (4) и при помощи программного комплекса MSB ($N=10$).

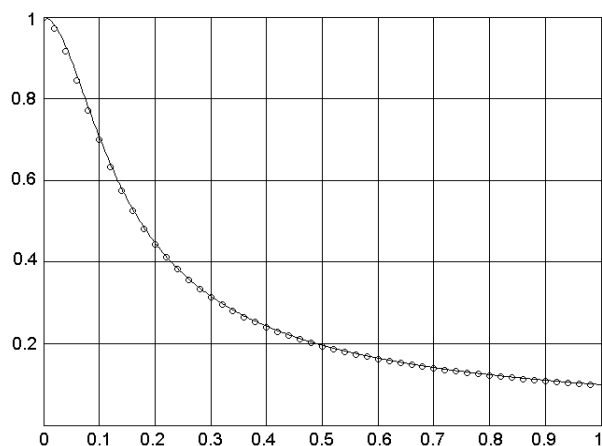


Рис.11. Сравнение пространственных распределений амплитуды основной гармоники при $R=0$ ($N=10$).

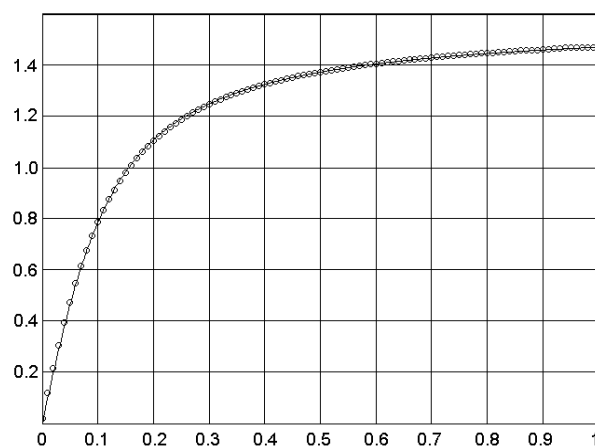


Рис.12. Сравнение пространственных распределений фазы основной гармоники при $R=0$ ($N=10$).

Как видно из рис.11,12, сравниваемые зависимости практически совпадают. Количественное значение погрешности для амплитуды и фазы составляет менее 0.5%.

9. Сравнение с результатами вычислительных экспериментов, выполненных другими авторами

На следующем этапе верификации программного комплекса выполнялась проверка работы программного комплекса для промежуточных значений внешних параметров уравнения ХЗК. Для этого использовались данные вычислительных экспериментов из монографии [5].

Результаты наложения волновых профилей при соответствующих значениях параметров N, Z, Γ представлены на рис.13.

Так как в каждом из предельных случаев разработанное программное обеспечение дает погрешность всего лишь в пределах 2%, то можно предположить, что значительное расхождение с источником [5] не связано с ошибочностью результатов работы программного комплекса MSB. Авторы же монографии [5] упоминают о сравнительно небольшом количестве исследуемых точек, что видимо и дает такое существенное расхождение, в том числе и с аналитическими результатами.

Выводы

В работе построена конечно-разностная модель второго порядка точности для квазилинейного уравнения, описывающего распространение звуковых пучков конечной амплитуды в нелинейно-диссипативной среде без физической дисперсии. При построении математической модели использовался метод расщепления по физическим процессам, предпочтение отдано монотонным схемам. Доказана консервативность, устойчивость и сходимости построенной модели. Выполнены вычислительные эксперименты, на основе которых установлен эффект существования в квадратично-нелинейных средах без физической дисперсии явлений компрессии и декомпрессии звуковых импульсов. С помощью построенной модели выполнен численный эксперимент и доказана возможность существования фокусировки звуковых пучков.

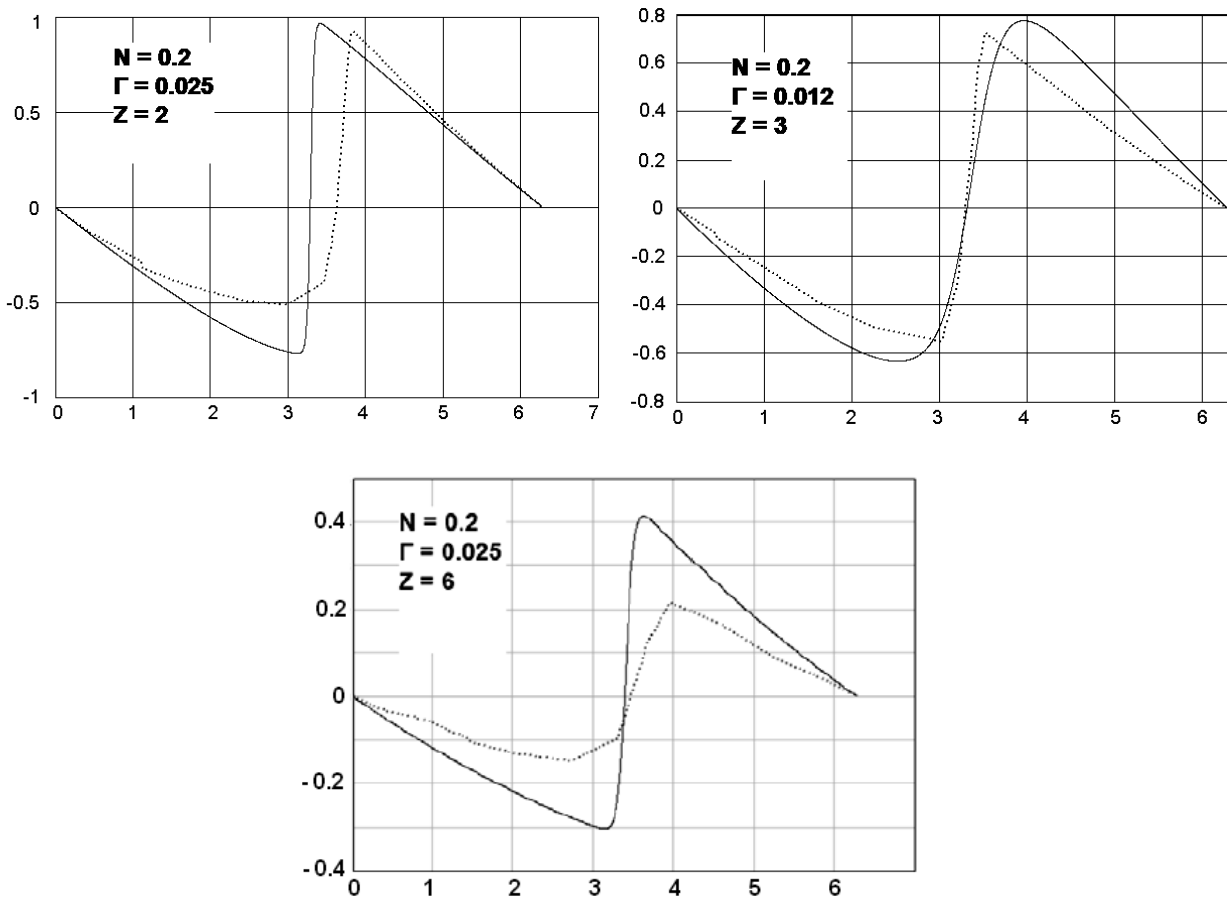


Рис.13. Результаты наложения волновых профилей.

Отличительной особенностью разработанных алгоритмов является высокая точность при низких вычислительных затратах, что достигается за счет использования монотонных разностных схем. Также следует отметить, что разработанные алгоритмы обладают устойчивостью в широком диапазоне значений параметров решаемой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савицкий О.А., Чистякова Т.А. Математическая модель распространения ультразвуковых пучков высокой интенсивности // Известия ЮФУ. Технические науки. – Таганрог: Изд-во Технологического института ЮФУ, 2010, № 6(107), с.168-174.
2. Савицкий О.А., Чистякова Т.А. Сжатие и декомпрессия импульсов при взаимодействии с низкочастотными волнами конечной амплитуды в звуковых пучках // Известия ЮФУ. Технические науки. – Таганрог: Изд-во Технологического института ЮФУ, 2011, № 8(121), с.122-129.
3. Савицкий О.А., Нагучев Д.Ш., Сахаров В.Л. Предпосылки и концепция создания современных параметрических профилографов в ОКБ «Ритм» ЮФУ // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2008, т.89, № 12, с.89-94.
4. Савицкий О.А. Нелинейный источник звука для зондирования донных структур // Сборник трудов Научной конференции "Сессия Научного совета РАН по акустике и XXIV сессия Российского акустического общества". Т. I. – М.: ГЕОС, 2011, с.173-177.
5. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. – М.: Наука, 1982.

6. Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. – М.: Физматлит, 2008, 496с.
7. Aanonsen S.I., Barkve T., Tjøtta J.N., and Tjøtta S. Distortion and harmonic generation in the near-field of a finite amplitude sound beam // J. Acoust. Soc. Am., 1984, v.75, p.749-768.
8. Baker A.C., Berg A.M., Sahin A., and Tjøtta J.N. The nonlinear pressure field of plane rectangular apertures: experimental and theoretical results // J. Acoust. Soc. Am., 1995, v.97, p.3510-3517.
9. Yang X. and Cleveland R.O. Time domain simulation of nonlinear acoustic beams generated by rectangular pistons with application to harmonic imaging // J. Acoust. Soc. Am., 2005, v.117, p.113-123.
10. Hajihassani M. et al. A novel numerical solution to the diffraction term in the KZK nonlinear wave equation // 38th Annual Symposium of the Ultrasonic Industry Association (UIA). – IEEE, 2009, p.1-9.
11. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Матем. моделирование, 2011, т.23, №3, с.3-21.
12. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.
13. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 28.08.2012.