

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. В. Брушлинский, А. С. Гольдич, А. С. Десятова, Плазмостатические модели магнитных ловушек-галатей, *Матем. моделирование*, 2012, том 24, номер 8, 81–96

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.135.193.70

10 января 2025 г., 14:02:56



## ПЛАЗМОСТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАГНИТНЫХ ЛОВУШЕК-ГАЛАТЕЙ

© 2012 г. *К.В. Брушлинский<sup>1</sup>, А.С. Гольдич<sup>2</sup>, А.С. Десятова<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

<sup>2</sup> Национальный исследовательский ядерный университет - МИФИ, Москва  
brush@keldysh.ru, alexdeph@gmail.com

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Гранты № 12-01-00071 и № 11-01-12043- офи м)

Равновесные конфигурации плазмы в магнитном поле рассмотрены в трех разновидностях цилиндрических аналогов ловушек-галатей с погруженными в плазменный объем проводниками с током. Математические модели конфигураций, обладающих симметрией, основаны на краевых задачах с двумерным полулинейным уравнением Грэда-Шафранова эллиптического типа. В расчетах получены распределения плазмы, магнитного поля и электрического тока, исследованы их характерные особенности. Общим свойством всех конфигураций является отсутствие тока в местах максимального давления. Максимальный ток в плазме протекает вблизи границ образуемых ею конфигураций.

Ключевые слова: магнитные ловушки-галатей, равновесие плазмы, уравнение Грэда-Шафранова.

## PLASMASTATIC MODELS OF GALATEYA MAGNETIC TRAPS

*K.V. Brushlinsky<sup>1</sup>, A.S. Goldich<sup>2</sup>, A.S. Desyatova<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Keldysh Institute for Applied Mathematics, RAS, Moscow

<sup>2</sup> National Research Nuclear University – MPhI, Moscow

Equilibrium plasma configurations in the magnetic field are considered for three types cylindrical Galateya-traps with conductors immersed in the plasma. Mathematical models of configurations having any symmetry are based on boundary value problems with the two-dimensional semilinear Grad-Shafranov equation of elliptic type. Plasma, magnetic field and electric current spreading in the trap and their properties are investigated in computation. As a common property of all configurations, the electric current vanishes where the plasma pressure is maximum. The maximum current is located near the plasma configuration boundary.

Key words: magnetic traps galateyas, plasma equilibrium, Grad-Shafranov equation.

### Введение

Статья относится к обширному циклу исследований в области математического моделирования и расчетов плазменных конфигураций, находящихся в равновесии в магнитном поле. Исследования связаны с разработкой магнитных ловушек для удержания сжатой и нагретой плазмы и представляют интерес в проблемах управляемого термоядерного синтеза: удержать любое рабочее вещество («топливо») при температуре порядка десятков миллионов градусов способно только магнитное поле. Ниже речь идет об

особом классе ловушек-галатей, предложенных А.И. Морозовым [1,2]: в них проводники с электрическим током, создающие магнитное поле, погружены в плазменный объем. Это расширяет возможности геометрии поля и дает надежду повысить эффективность удержания.

Численное исследование равновесных конфигураций играет существенную роль в рассматриваемой области. Математические модели плотной и горячей плазмы основаны на идеологии механики сплошных сред и используют уравнения магнитной газодинамики. Если не принимать во внимание процессы формирования конфигураций в ловушках и ограничиться их исследованиями в состоянии равновесия, то соответствующие модели относятся к математической и вычислительной плазмостатике, которая в течение десятков лет успешно зарекомендовала себя в расчетах, связанных с разработкой многих известных ловушек. Хорошо известны тороидальные ловушки (токамак, стелларатор), к которым следует отнести и рассматриваемые ниже галатеи. В ряде вопросов достаточно исследовать их упрощенные распрямленные аналоги – вместо тора имеем дело с цилиндром, однородным или периодическим в осевом направлении.

Широко распространены исследования, в которых ловушки по своей конструкции обладают симметрией – плоской, осевой, винтовой, или после несущественных предположений позволяют считать себя симметричными. В этих случаях математический аппарат плазмостатики, вообще говоря, трехмерный, фактически сводится к двумерным краевым задачам с одним скалярным дифференциальным уравнением эллиптического типа для функции магнитного потока – уравнением Грэда-Шафранова [3,4].

Численное решение задач позволяет найти равновесное распределение магнитного поля, электрического тока и давления плазмы в объеме конкретной ловушки и оптимизировать его в нужную сторону за счет варьирования параметров. С этими задачами связаны нетривиальные вопросы существования, единственности и устойчивости решения, общие для полулинейных эллиптических и параболических уравнений, которые участвуют в широком классе моделей взаимодействия процессов реакции и диффузии, например, в теории горения (см.[5-7] с подробной библиографией).

В настоящей работе приведены три примера ловушек-галатей: «Пояса», «Трилистника» и «Стелларатор-галатеи» в их распрямленной в цилиндр модификации. В дополнение к опубликованным ранее результатам расчетов и исследований здесь содержатся: 1) спектральный анализ бифуркаций, связанных с неединственностью решения задач о «Поясе»; 2) расчет конфигурации «Трилистник» с тремя (вместо двух в «Поясе») параллельными проводниками с током; 3) подробный анализ распределения плазмы, магнитного поля и плотности тока в «Стелларатор-галатее» в двух различных вариантах сосредоточения плазмы. Во всех трех примерах обращается внимание на тенденцию к «скиннингованию» электрического тока в плазме, т.е. его сосредоточение на границах плазменных конфигураций.

## 1. Двумерные математические модели равновесных конфигураций в цилиндре

Конфигурация плазмы и магнитного поля, находящаяся в равновесии, полностью характеризуется тремя величинами: давлением  $p$ , напряженностью магнитного поля  $\mathbf{H}$  и плотностью электрического тока  $\mathbf{j}$ . Распределение этих величин в пространстве подчиняется МГД-уравнению равновесия

$$\nabla p = \frac{1}{c} [\mathbf{j}^{pl}, \mathbf{H}] \quad (1.1)$$

и уравнением Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{j} = \mathbf{j}^{pl} + \mathbf{j}^{ex}$  – сумма индуцированного в плазме («собственного») и заданного в проводниках («внешнего») токов. Краевая задача с уравнениями (1.1)–(1.2) при заданных граничных условиях в области, соответствующей заданной геометрии ловушки, могут служить основанием математических моделей рассматриваемых конфигураций. Хорошо известно [3-7], что в предположении симметрии конфигурации модель существенно упрощается: вместо трех уравнений (1.1)–(1.2) достаточно иметь дело с одним скалярным уравнением Грэда-Шафранова для функции магнитного потока  $\Psi$ .

В цилиндрических ловушках с прямолинейными проводниками, параллельными оси, задачи обладают плоской (трансляционной,  $\partial/\partial z \equiv 0$ ) симметрией, и уравнение Грэда-Шафранова имеет вид

$$\Delta \Psi + 4\pi \frac{dp}{d\Psi} + \left( \frac{4\pi}{c} \right)^2 I \frac{dI}{d\Psi} + \frac{4\pi}{c} j^{ex} = 0. \quad (1.3)$$

Функции  $\Psi$  и  $I$  связаны с магнитным полем и током следующим образом:

$$H_x = \frac{d\Psi}{dy}, \quad H_y = -\frac{d\Psi}{dx}, \quad j_x = \frac{dI}{dy}, \quad j_y = -\frac{dI}{dx}, \quad I = \frac{c}{4\pi} H_z. \quad (1.4)$$

В задачах с винтовыми проводниками вводится дополнительное предположение о винтовой симметрии: в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  все искомые величины зависят от двух пространственных переменных  $r$  и  $\theta = \varphi - \alpha z$ , где  $\alpha = 2\pi/h$ ,  $h$  – шаг винта проводников. В этом случае уравнение (1.3) имеет вид [8]

$$\Delta^{**} \Psi + \frac{4\pi}{c} \frac{dp}{d\Psi} - \frac{8\pi\alpha}{c\eta^2} I + \left( \frac{4\pi}{c} \right)^2 \frac{I}{\eta} \frac{dI}{d\Psi} + \frac{4\pi}{c} j^{ex} = 0, \quad (1.5)$$

где

$$\Delta^{**} \Psi \equiv \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \Psi}{\eta} \right) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{\eta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}, \quad \eta \equiv 1 + \alpha^2 r^2.$$

Роль формул (1.4) играют

$$rH_r = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad H_\theta \equiv H_\varphi - \alpha r H_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial r},$$

$$rj_r = \frac{\partial I}{\partial \theta}, \quad j_\theta = j_\phi - \alpha r j_z = -\frac{\partial I}{\partial r}, \quad (1.6)$$

$$I \equiv \frac{c}{4\pi} (H_z + \alpha r H_\phi).$$

В обеих разновидностях (1.3), (1.5) уравнение Грэда-Шафранова – двумерное эллиптическое уравнение второго порядка. Его младшие члены содержат две произвольные функции одной переменной

$$p = p(\Psi), \quad I = I(\Psi), \quad (1.7)$$

которые описывают распределение давления плазмы и электрического тока между «магнитными поверхностями»  $\Psi = \text{const}$ .

Выбирая их произвольным образом, можно удовлетворить дополнительным требованиям к свойствам рассматриваемых конфигураций. В этом преимущество модели с уравнением Грэда-Шафранова и в то же время их излишняя простота, обязанная недоопределенности функций (1.7) [9].

В рассмотренных ниже задачах давление плазмы задано в виде

$$p = p_0 e^{-(\Psi/q)^2} \quad (1.8)$$

с целью сосредоточить плазму в ловушке в окрестности одной из магнитных поверхностей. Для этого нужно подобрать значение  $\Psi$  на границе области так, чтобы решение удовлетворяло условию  $\Psi = 0$  на указанной поверхности  $\Psi = \text{const}$ .

Функция электрического тока  $I(\Psi)$  в случае плоской симметрии равна осевой ординате  $H_z$  магнитного поля и поэтому в задачах о «Поясе» и «Трилистнике»  $I \equiv 0$ . В задачах о «Стелларатор-галатее» с винтовой симметрией она равна  $I = 3I_c/h = \text{const}$  – отношению заданного тока в трех проводниках к шагу винта, что соответствует проекции магнитного поля  $\mathbf{H}$  на координатную линию  $r = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$ .

Кроме того, уравнения (1.3), (1.5) включают в себя известную функцию пространственных переменных  $j_z^{ex}$  – осевую компоненту заданного тока в проводнике. Это позволяет численно решать задачи во всем объеме ловушек (в односвязной области) без выделения проводников. Функция  $j_z^{ex}$  предполагается непрерывно рассредоточенной в их окрестностях небольшого диаметра, например,

$$j_z^{ex}(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} j_0 e^{-\frac{(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2}{r_c^2}}. \quad (1.9)$$

Здесь  $(x_n, y_n)$  – координаты пересечений центров проводников с плоскостью  $z$ ,  $N$  – число проводников,  $j_0$  – множитель, обеспечивающий равенство

$$\iint_{r < R} j_z^{ex}(x, y) dx dy = NJ_c, \quad (1.10)$$

где  $J_c$  – величина тока в каждом проводнике. Для сравнения заметим, что в первой работе о моделях ловушки «Пояс» [10] токи в проводниках заданы дельта-функциями, непрерывным аналогом которых являются формулы (1.9), (1.10).

Магнитные ловушки, о которых идет речь, – цилиндрической формы, поэтому область решения краевых задач с уравнениями (1.3) и (1.5) – круг  $r < R$ , содержащий внутри два или три проводника с током, которые расположены на расстоянии  $r_0$  от оси и представлены формулой (1.9). Предполагается, что граница цилиндра  $r = R$  непроницаема для магнитного поля ( $H_n = 0$ ), т.е.

$$\Psi = \Psi_r = \text{const}. \quad (1.11)$$

Таким образом, математические модели рассматриваемых магнитоплазменных конфигураций основаны на решении первой краевой задачи с уравнением (1.3) или (1.5) в круге  $r < R$  с граничным условием (1.11). Они существенно зависят от выбора функций (1.7) в каждой конкретной задаче.

Численное решение задач ведется в безразмерной форме. Единицы измерения всех величин образованы из основных размерных параметров, общих для всех рассмотренных ниже вариантов задачи

$$r_u = r_0, \quad H_u = \frac{2J_c}{cr_0}, \quad \Psi_u = H_u r_u, \quad p_u = \frac{H_u^2}{4\pi}, \quad j_u = \frac{cH_u}{4\pi r_u}. \quad (1.12)$$

Уравнение Грэда-Шафранова в безразмерных переменных в случаях плоской (1.3) и винтовой (1.5) симметрии с указанными выше значениями функции  $I(\Psi)$  имеет вид

$$\Delta \Psi + \frac{dp}{d\Psi} + j^{ex}(r, \varphi) = 0 \quad (1.13)$$

или

$$\Delta^{**} \Psi + \frac{dp}{d\Psi} - \frac{6\alpha^2}{\eta^2} + j^{ex}(r, \theta) = 0, \quad (1.14)$$

где

$$j^{ex} = \frac{2}{a^2} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\left(\frac{r-1}{a}\right)^2 - \left(\frac{\theta - 2\pi k/N}{a}\right)^2}, \quad (1.15)$$

$r, \varphi$  – полярные координаты в круге  $r < R$ ,  $\theta = \varphi - \alpha z$ ,  $\alpha = 2\pi r_0/h$ , в частности,  $\alpha = 0$  в задачах с плоской симметрией.

Разностные аналоги краевых задач с уравнениями

$$\Delta\Psi + g(\Psi) = 0 \quad (1.16)$$

решаются итерационными методами типа установления

$$\frac{\Psi^{n+1} - \Psi^n}{\tau} = \Lambda[\Psi^{n+1}] + g(\Psi^n). \quad (1.17)$$

Здесь  $\Lambda$  – разностный аналог оператора  $\Delta$  или его модификация в каком-либо методе переменных направлений. Нелинейное слагаемое отнесено к предыдущей итерации, т.е. считается известным при решении линейных систем уравнений для  $\Psi^{n+1}$ . Это позволяет избежать выбора граничного значения  $\Psi_r$  в серии расчетов и получить максимальное давление в нужной точке области, заменив формулу (1.8) на

$$p = p_0 e^{-\left(\frac{\Psi - \Psi_0}{q}\right)^2}, \quad (1.18)$$

где параметр  $\Psi_0$  полагается равным значению  $\Psi$  в выбранной точке. В установившемся решении роль потенциала  $\Psi$  играет разность  $\Psi - \Psi_0$  (см. подробнее [5,11]).

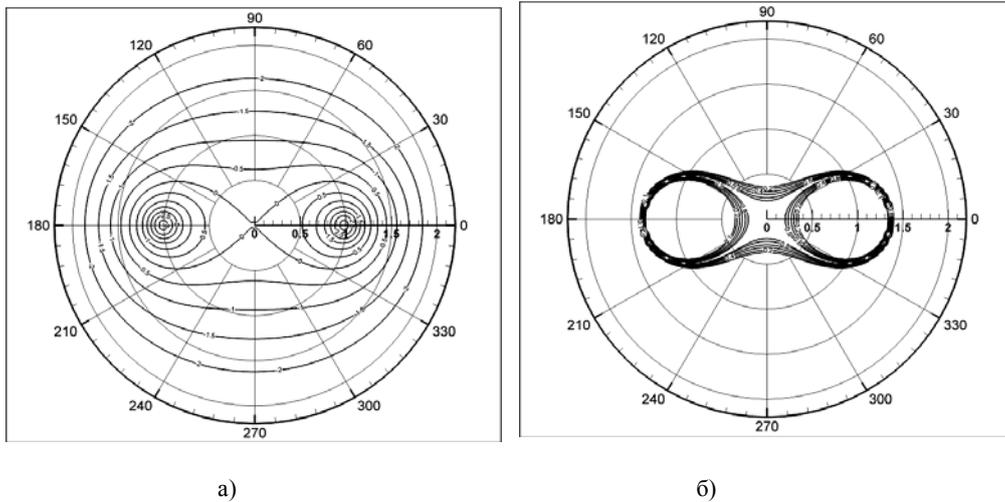
## 2. Ловушка «Пояс»

Магнитная ловушка «Пояс» – плазменный тор с погруженными в него двумя параллельными друг другу кольцевыми проводниками предложена в [10]. Там же рассмотрен ее распрямленный в цилиндр аналог с проводниками, параллельными оси, приведены некоторые теоретические соображения о простейших равновесных конфигурациях в нем. Сделана также попытка воспользоваться результатами экспериментальных исследований нейтрального токового слоя, инициированных С.И. Сыроватским на близкой по своей конструкции установке. Простейший анализ равновесия плазмы в областях с постоянным по пространству током выполнен в [12]. Численная модель равновесной конфигурации в цилиндре в терминах краевой задачи с уравнением Грэда-Шафранова построена в [11]. На рис.1 – воспроизведенные из нее распределения магнитного поля (линии  $\Psi = \text{const}$ ) и давления. Плазма сосредоточена в основном в центральной области, имеющей форму криволинейного четырехугольника со сторонами, выпуклыми внутрь, и тонкой периферией, окружающей проводники. Ток в проводниках предполагается положительным. Ток в плазме

$$j_z^{pl} = \frac{dp}{d\Psi} \quad (2.1)$$

отрицателен в областях вокруг проводников внутри сепаратрисы магнитного поля, проходящей через центр, и положителен вне ее. В частности, ток равен нулю на сепаратрисе, где давление плазмы максимально. Это значит, что в рассчитанной модели равновесная конфигурация имеет вид «токового бислоя», т.е. отличается от предполагавшегося в [10] «токового слоя»<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Численная модель образования токового слоя в окрестности нулевой линии квадрупольного магнитного поля рассмотрена в [13].



**Рис.1.** Магнитное поле (а) и давление (б) в "Поясе" при  $p_0 = 0.5$ ,  $a = 0.1$ ,  $q = 0.1$ .

Максимальные значения плотности тока (положительного или отрицательного) достигаются у границ плазменной конфигурации, т.е. ток имеет тенденцию к «скинированию». Это созвучно аналитической модели плоской фигуры равновесия «дублет» [2,6], в которой давление бесконечно проводящей плазмы постоянно, а ток течет только по поверхности.

Известно, что решение первой краевой задачи

$$\Delta\Psi + g(\Psi) = 0, \quad \Psi = \Psi_\Gamma \quad \text{при } r = R \tag{2.2}$$

существует, единственно и в некотором смысле устойчиво (поскольку легко находится в процессе установления) лишь при определенном ограничении на функцию  $g(\Psi)$  [5]. В рассматриваемом классе задач это ограничение касается безразмерного параметра  $p_0$  в формуле (1.8)

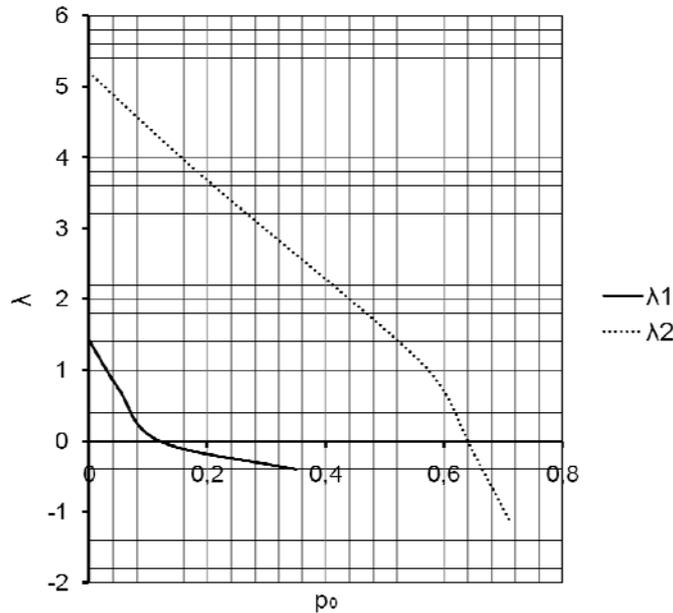
$$p_0 < p_1^{cr}. \tag{2.3}$$

При  $p_0 = p_1^{cr}$  происходит бифуркация решения, после чего одному и тому же значению  $\Psi_\Gamma$  отвечают три решения, из которых только одно удовлетворяет требованию  $\Psi(0) = 0$  [11]. Два других решения могут быть найдены итерационным методом численного решения задачи с функцией  $p(\Psi)$  в виде (1.8). Нужное решение получается с помощью изложенного выше варианта метода с формулой (1.18) при значениях  $p_1^{cr} < p_0 < p_2^{cr}$  до следующей бифуркации при  $p_0 = p_2^{cr}$ . Найденные в [11] значения  $p^{cr}$  в зависимости от параметра  $q$  соответствуют именно второй бифуркации.

Причина бифуркаций – в природе итерационного процесса установления. Его малые возмущения являются решением линейной задачи

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U + g'(\Psi)U \equiv -L[U], \quad U = 0 \quad \text{при } r = R, \quad (2.4)$$

которое при  $t \rightarrow \infty$  имеет вид  $U(t, r, \varphi) \approx e^{-\lambda_1 t} V_1(r, \varphi)$ . Здесь  $\lambda_1$  – старшее собственное значение, а  $V_1(r, \varphi)$  – соответствующая ему собственная функция оператора  $L$ . При  $p_0 = 0$   $L \equiv -\Delta$  и  $\lambda_1 > 0$ , а при возрастании  $p_0$  значение  $\lambda_1$  убывает. Первая бифуркация  $p_0 = p_1^{cr}$  имеет место при  $\lambda_1 = 0$ . Если итерации используют формулу (1.18) с выбором  $\Psi_0$  указанным способом, то возмущение  $U = 0$  в центре круга, и первая собственная функция  $V_1$  (она отлична от нуля при  $r = 0$ ) не участвует в решении. Асимптотика решения при  $t \rightarrow \infty$  определяется одним из следующих собственных значений  $\lambda_2$  с собственной функцией  $V_2(0) = 0$ , и вторая бифуркация  $p_0 = p_2^{cr}$  имеет место при  $\lambda_2 = 0$ .



**Рис.2.** Собственные значения  $\lambda_1(p_0)$ ,  $\lambda_2(p_0)$  оператора  $L$  в "Поясе".

Для иллюстрации этой тенденции нами найдены численно значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в зависимости от  $p_0$  при  $q = 0.1$  (рис.2). Они приблизительно определяются в процессе численного решения задачи (2.4) практически тем же итерационным методом, что и нелинейная задача. Значение  $\lambda_1$  получается при граничном условии  $\partial U / \partial r = 0$  в центре круга, а  $\lambda_2$  – при  $U(0) = 0$ . Значения  $p_0 = p_1^{cr}$  и  $p_0 = p_2^{cr}$  соответствуют  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_2 = 0$  и приблизительно совпадают с таковыми, полученными в процессе расчета нелинейной задачи (2.2).

### 3. «Трилистник»

Численная модель равновесия плазмы в цилиндрической ловушке с тремя погруженными в нее прямыми проводниками рассмотрена кратко в качестве обобщения аналогичной конфигурации «Пояс» с двумя проводниками. Она же является предельным частным случаем стелларатор-галатеи (см. ниже) с винтовыми проводниками при  $\alpha \rightarrow 0$ , т.е. при стремлении шага винта к бесконечности. Расчеты конфигурации в изложенной выше модели позволили найти значения ее характерных параметров и сопоставить их с аналогичными значениями в «Поясе» для сравнительного анализа.

На рис.3 приведена типичная картина магнитных силовых линий (поверхностей в цилиндре) и линий уровня давления плазмы. По-прежнему существенную роль играет сепаратриса (трехлиственная), которая проходит через центр и отделяет силовые линии, окружающие каждый проводник в отдельности от линий на периферии, охватывающих все три проводника. Плазма занимает в основном область в центре, которая имеет вид криволинейного шестиугольника с узкими ответвлениями, опоясывающими проводники. Максимальное значение давления – в центре и на сепаратрисе. Электрические токи в проводниках и в плазме вблизи них различны по направлению ( $j^{ex} > 0$ ,  $j^{pl} < 0$ ), а на периферии цилиндра – совпадают ( $j^{pl} > 0$ ). В результате амперова сила  $[\mathbf{j}, \mathbf{H}]$  отжимает плазму от проводника, не допуская их соприкосновения, и направлена везде в сторону сепаратрисы. Плазменный ток обращается в нуль в центре и на сепаратрисе, т.е. сосредоточен у границ упомянутой шестиугольной области.

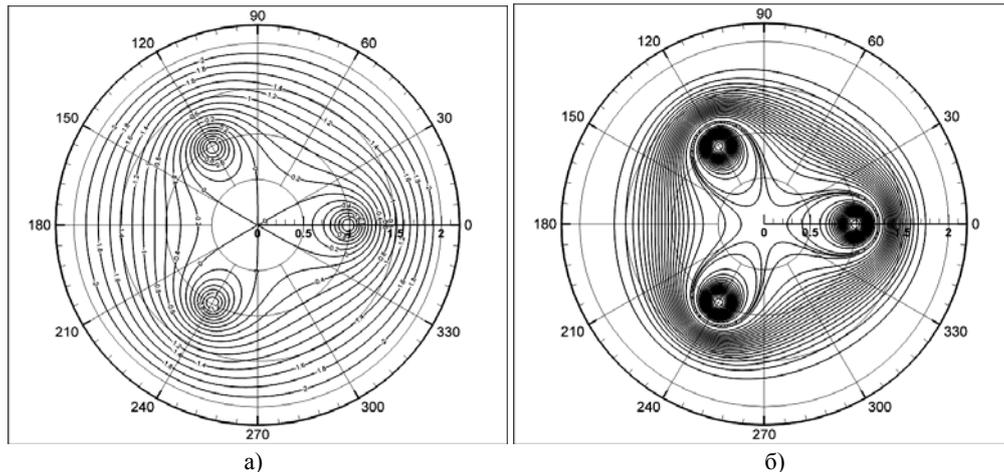


Рис.3. Магнитное поле (а) и давление (б) в "Трилистнике" при  $p_0 = 0.9$ ,  $a = 0.1$ ,  $q = 0.94$ .

Интегральные значения тока, отрицательного внутри сепаратрисы и положительного вне ее, получены в расчетах для различных значений параметров  $p_0$  и  $q$  и приведены в табл.1. Сравнивая их с аналогичными таблицами для «Пояса» в [11], можно заключить, что плазменный ток обоих знаков в «Трилистнике» меньше, чем в «Поясе», т.е. его значения убывают с добавлением третьего проводника.

**Таблица.1.** а) Отрицательный  $I^-$  и б) положительный  $I^+$  плазменные токи в «Трилистнике» при различных параметрах  $p_0$  и  $q$ .  $a=0.1$ ;  $R=2$ .

$p_0 \setminus q$	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0
0.1	-0.054	-0.051	-0.044	-0.030	-0.018
0.2	-0.109	-0.103	-0.089	-0.059	-0.035
0.5	-	-0.257	-0.219	-0.145	-0.086
0.8	-	-0.404	-0.345	-0.227	-0.136

а)

$p_0 \setminus q$	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0
0.1	0.124	0.095	0.082	0.082	0.109
0.2	0.249	0.191	0.165	0.164	0.217
0.5	-	0.482	0.411	0.404	0.525
0.8	-	0.770	0.656	0.637	0.816

б)

Ограничения на максимум давления  $p_0 < p^{cr}$ , связанные с переходом границы спектра оператора (2.4) через нуль в область отрицательных значений, имеют место и в модели «Трилистник». Полученные в расчетах значения  $p^{cr}$  приведены в табл.2. По сравнению с «Поясом» [11] они оказались в 1.5-2 раза выше, т.е. при добавлении третьего проводника указанное ограничение становится слабее.

**Таблица 2.** Зависимость  $p_0^{cr}$  от  $q$  в «Трилистнике» при  $a=0.1$ ;  $R=2$ .

$q$	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0
$p_0^{cr}$	0.43	0.95	2.2	4.56	10

#### 4. "Стелларатор-галатея"

Конфигурация «Трилистника» становится более сложной и перспективной в надеждах на эффективное удержание, если придать прямым проводникам винтовую форму. Идея «Стелларатор-галатеи» – ловушки с погруженными в нее тремя винтовыми проводниками высказана в [14]. Математическая модель ее распрямленного в прямой плазменный цилиндр аналога, возникшие связанные с ней вопросы и результаты первых расчетов изложены в [15]. Модель дополнительно предполагает согласованную с проводниками винтовую симметрию всей конфигурации плазмы и поля и рассматривает ее в терминах уравнения Грэда-Шафранова в форме (1.5). В [15], в частности, авторы впервые в задачах плазмостатики столкнулись с возможностью неединственности и неустойчивости решения краевых задач с этим уравнением.

Винтовые проводники внесли качественное изменение в геометрию магнитного поля, которое представлено на рис.4. Винтовая природа проводников проявляется в том, что сепаратриса магнитного поля, разделяющая различные по структуре области, не проходит через центр. Помимо областей, окружающих проводники, появляется область в виде криволинейного треугольника в центральной части цилиндра, в которой магнитное поле ориентировано по часовой стрелке. Если сосредоточить плазму, как и выше, на сепаратрисе, получим конфигурацию сложной формы. В [16] изложены преимущества

этого по существу «галатейного» варианта конфигурации перед традиционным стелларатором, в котором плазма сосредоточена в центре, т.е. на оси цилиндра. Рассматриваемая модель конфигураций позволяет сравнить между собой оба варианта.

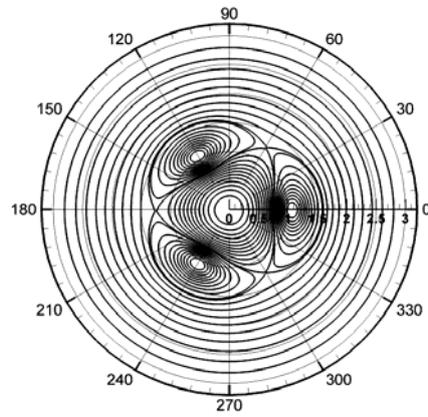


Рис.4. Вакуумное магнитное поле в "стелларатор-галатее".

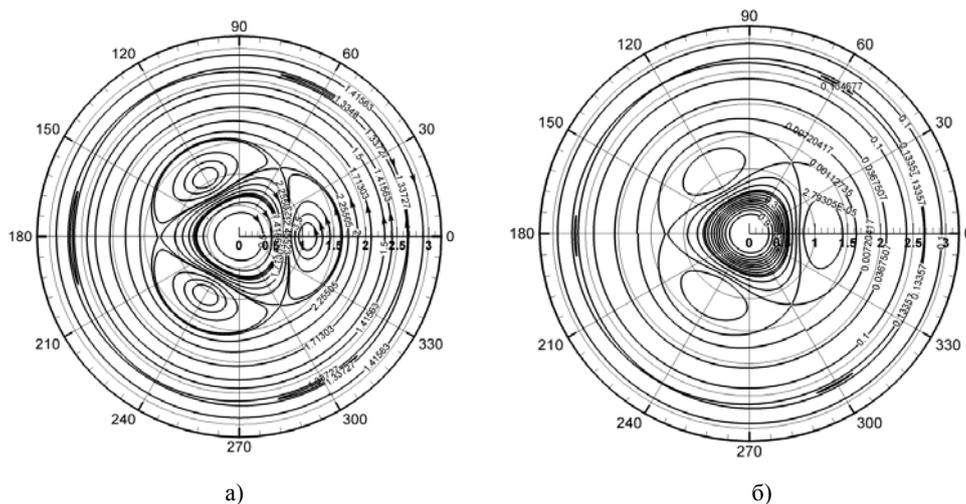


Рис.5. Магнитное поле (а) и давление (б) в "стелларатор-галатее" с максимумом давления в центре при  $p = 0.2664$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $q = 0.94$ ,  $a = 0.2$ .

В последнее время нами проведена серия расчетов "стелларатор-галатей" в обеих разновидностях. Возможности современных компьютеров позволили иметь дело с существенно более мелкими расчетными сетками и подробнее исследовать детали и закономерности, оставшиеся вне поля зрения в предыдущих работах.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> В работах [15-18] значения параметров  $p_0$  и  $q$  очень малы, а здесь в аналогичных вариантах – порядка единицы. Это объясняется более удачным выбором единиц измерения (1.12) по сравнению с [15].

На рис.5 представлено характерное распределение магнитного поля (силовые линии) и давления (изобары) и в ситуации традиционного стелларатора:  $p = \max$  в центре. По сравнению с вакуумным полем (рис.4) обращает на себя внимание дополнительный пояс особых точек на периферии и соответствующие им «островки» поля в форме бананов. За особыми точками меняет знак азимутальное магнитное поле, т.е. направлено по часовой стрелке. При значении  $q = 0.91$  такого пояса нет, если давление мало и появляется при  $p_0 \geq 0.03$ .

Бифуркации решения с ростом  $p_0$  имеют место при  $p_{cr,1} \approx 0.15$  и при  $p_{cr,2} \approx 0.26$ . В диапазоне  $p_{cr,1} < p_0 < p_{cr,2}$  краевая задача имеет три решения (см. [18]), из которых представляет интерес наименее устойчивое ( $\Psi = \Psi_0$  при  $r = 0$ ), полученное в специально организованном итерационном процессе (см. п.1). В расчетах найдены также старшие собственные значения оператора  $L$ , иллюстрирующие сходимость итерационных процессов:  $\lambda_1(p_0)$  получено при свободном граничном условии в центре (ограниченности решения в особой точке соответствует  $\partial U / \partial r = 0$ ), а  $\lambda_2(p_0)$  - при  $U(0) = 0$ . Они приведены на рис.6, где переходы от  $\lambda > 0$  к  $\lambda < 0$  приблизительно совпадают с найденными в расчете нелинейной задачи значениями  $p_1^{cr}$  и  $p_2^{cr}$ .

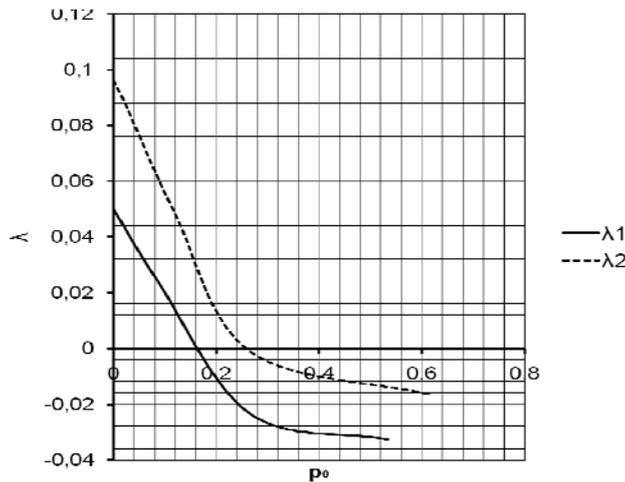


Рис.6. Собственные значения  $\lambda_1(p_0)$ ,  $\lambda_2(p_0)$  оператора  $L$  в "стелларатор-галатее".

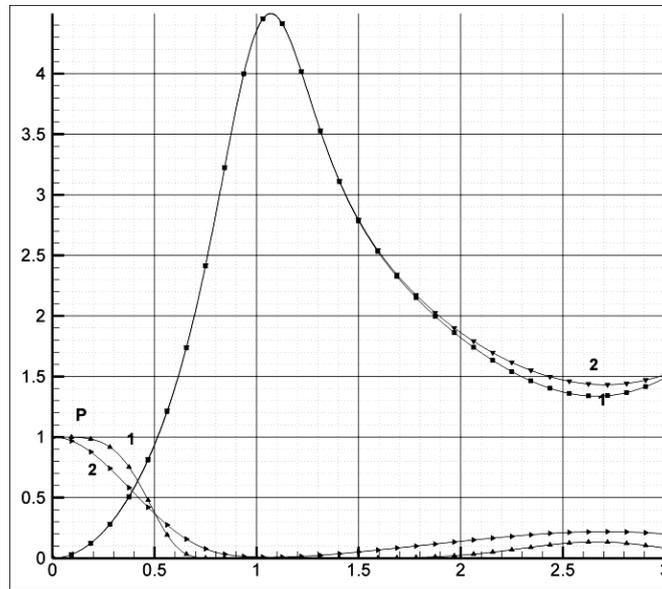
Уделим, как и выше, внимание распределению электрического тока в полученных конфигурациях. Он обращается в нуль в центре, где давление плазмы максимально. Это естественно вытекает из выбранной в данной модели зависимости  $p(\Psi)$  (1.8): если  $p = \max$  при  $\Psi = 0$ , то

$$j^{pl} = \frac{dp}{d\Psi} = -p_0 \frac{2\Psi}{q^2} = 0. \quad (4.1)$$

Ток максимален там, где  $p(\Psi)$  быстро убывает у границы области, занятой плазмой, т.е. имеет тенденцию к «скинированию» в этой области. Указанное обстоятельство – достаточно общего характера, т.к. производная (4.1) равна нулю в максимуме функции, если сама зависимость  $p(\Psi)$  гладкая. Однако в данной конкретной ситуации с максимумом на границе  $r=0$  диапазона  $0 < r < R$  в центре можно получить отличный от нуля и даже максимальный ток, если задать давление в виде

$$p(\Psi) = p_0 e^{-|\Psi/q|}. \quad (4.2)$$

В этом случае  $\Psi = 0$  при  $r = 0$  является граничным значением и  $p(\Psi)$  имеет максимум без обращения производной в нуль. На рис.7 приведены графики  $\Psi(r)$  и  $P(r)$  вдоль луча  $\theta = 0$ , полученные в расчетах двух вариантов модели: с формулами а) (1.8) и б) (4.2).



**Рис.7.** Функция магнитного потока  $\Psi$  и давление  $p$  в "стелларатор-галатее" вдоль луча  $\theta = 0$  в расчетах с зависимостью  $p(\Psi)$ : 1) (1.18) 2) (4.2) при  $p_0 = 0.2664$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $q = 0.94$ ,  $a = 0.2$ .

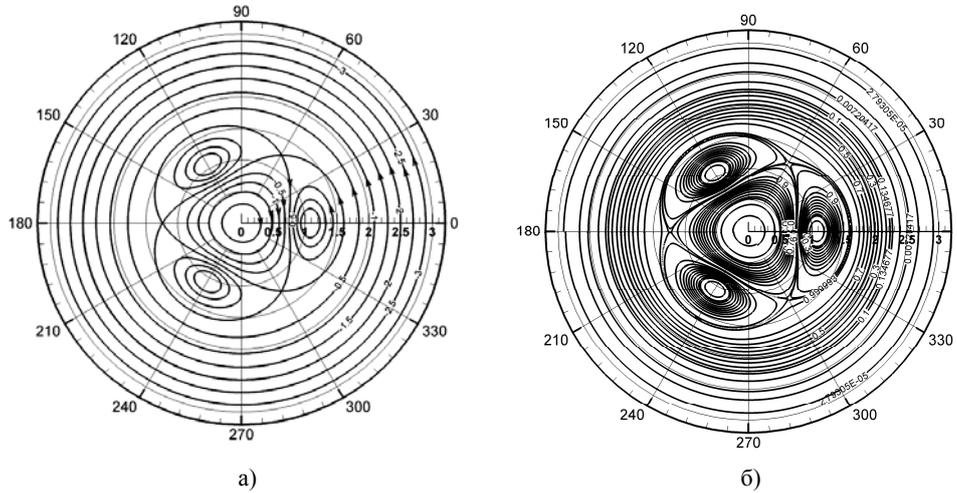
В конфигурациях с плазмой в центре плазменный ток везде отрицателен, т.е. противоположен по направлению токам в проводниках. Сила Ампера  $[\mathbf{j}, \mathbf{H}]$  отжимает плазму от проводников в основном в сторону центра, а небольшое количество в пространстве за проводниками – в противоположную сторону. При малых давлениях  $p_0$  ее удерживает неподвижная граница, вблизи которой можно заметить небольшое повышение давления. При более высоких значениях  $p_0$  плазму удерживает от разлета изменившееся

направление азимутальное поле за упомянутым выше вторым поясом особых точек. В табл.3 приведены значения полного плазменного тока в зависимости от параметров.

**Таблица 3.** Полный плазменный ток  $I^-$  в «стелларатор-галатее» с максимумом давления в центре при различных параметрах.

$p_0 \setminus q$	0.1	0.2	0.5	1.0
0.1	-0.594	-0.456	-0.294	-0.132
0.2	-1.122	-0.900	-0.582	-0.246
0.5	-	-2.106	-1.440	-0.558

Более интересны конфигурации, в которых плазма сосредоточена вблизи сепаратрисы. На рис.8 – магнитное поле и давление плазмы в одном из вариантов расчета. Здесь плазма, очевидно, занимает гораздо большую часть объема цилиндра. Пределы допустимых значений  $p^{cr}$  выше, чем в рассмотренных раньше конфигурациях. Эти обстоятельства согласуются с результатом работы [16] и еще раз демонстрируют преимущества ловушек-галатей перед традиционными стеллараторами.



**Рис.8.** Магнитное поле (а) и давление (б) в "стелларатор-галатее" с максимумом давления на сепаратрисе при  $p_0 = 0.2664$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $q = 0.94$ ,  $a = 0.2$ .

В рассмотренном диапазоне параметров  $p_0$  и  $q$  не появляется дополнительный пояс особых точек на периферии: магнитное поле здесь почти строго азимутально и направлено против часовой стрелки ( $H_\phi > 0$ ).

Направление тока в плазме отлично от рассмотренных выше вариантов. Ток по-прежнему отрицателен и способствует отжатию плазмы от проводников в их окрестности, т.е. внутри лепестков сепаратрисы, а в центральном треугольнике и вне сепаратрисы положителен. Таким образом, во всем объеме цилиндра амперова сила  $[\mathbf{j}, \mathbf{H}]$  направлена в сторону сепаратрисы и удерживает плазму в нужной области. На самой сепаратрисе

направление тока меняет знак, т.е.  $j^{pl} = 0$ , конфигурация плазмы на ней, как и в «Поясе», имеет характер токового «бислоя», а не слоя. Максимальный по величине ток обоих знаков протекает в районе границ конфигураций, т.е. как и выше испытывает тенденцию к «скинированию». Значения полного тока в плазме – положительного и отрицательного – приведены в табл.4.

**Таблица 4.** а) Отрицательный  $I^-$  и б) положительный  $I^+$  плазменные токи в «стелларатор-галатее» с максимумом давления на сепаратрисе при различных параметрах.

$p_0 \setminus q$	0.1	0.2	0.5	1.0
0.1	-1.584	-1.086	-0.624	-0.236
0.2	-2.424	-1.830	-1.230	-0.552
0.5	-4.704	-3.378	-2.070	-1.344
0.8	-6.408	-4.722	-2.994	-2.088

а)

$p_0 \setminus q$	0.1	0.2	0.5	1.0
0.1	4.254	3.606	3.096	1.194
0.2	5.232	4.452	3.510	3.414
0.5	23.838	6.090	4.536	2.520
0.8	34.032	7.110	5.502	3.660

б)

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов А.И. О галатеех – плазменных ловушках с омываемыми плазмой проводниками // Физ. плазмы, 1992, т.18, вып.3, с.305-316.
2. Морозов А.И., Савельев В.В. О галатеех – ловушках с погруженными в плазму проводниками // Усп. физ. наук, 1998, т.168, №11, с.1153-1194.
3. Шафранов В.Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // ЖЭТФ, 1957, т.33, вып.3(9), с.710-722.
4. Grad H., Rubin H. Hydromagnetic equilibria and force-free fields // Proc. 2<sup>nd</sup> United Nations Int.Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, v.31, p.190. Columbia Univ. Press, N.Y., 1959.
5. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2009, 200 с.
6. Брушлинский К.В., Савельев В.В. Магнитные ловушки для удержания плазмы // Матем. моделирование, 1999, т.11, №5, с.3-36.
7. Костомаров Д.П., Медведев С.Ю., Сычугов Д.Ю. Математическое моделирование МГД – равновесия плазмы // Матем. моделирование, 2008, т.20, №5, с.3-34.
8. Johnson J.L., Oberman C.R., Kulsrud R.M., Frieman E.A. Some stable hydromagnetic equilibria // Phys. Fluids, 1958, v.1, №4, p.281-296.
9. Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А. О равновесии плазмы в магнитном поле ловушек-галатей // Матем. моделирование, 2010, т.22, №6, с.3-14.
10. Морозов А.И., Франк А.Г. Тороидальная магнитная ловушка-галатее с азимутальным током // Физ. плазмы, 1994, т.20, №11, с.982-989.
11. Брушлинский К.В., Игнатов П.А. Плазмостатическая модель магнитной ловушки "галатее"

- пояс" // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2010, т.50, №12, с.2184-2194.
12. Морозов А.И., Мурзина М.В. Простейшие равновесные конфигурации галатей типа "Пояс" // Физ. плазмы, 1996, т.22, №6, с.551-563.
  13. Брушлинский К.В., Заборов А.М., Сыроватский С.И. Численный анализ токового слоя в окрестности магнитной нулевой линии // Физ. плазмы, 1980, т.6, вып.2, с.297-311.
  14. Морозов А.И., Пустовитов В.Д. О стеллараторе с левитирующими обмотками // Физ. плазмы, 1991, т.17, вып.10, с.1276.
  15. Брушлинский К.В., Зуева Н.М., Михайлова М.С., Морозов А.И., Пустовитов В.Д., Тузова Н.Б. Численное моделирование прямых винтовых шнуров с проводниками, погруженными в плазму // Физ. плазмы, 1994, т.20, №3, с.284-292.
  16. Брушлинский К.В., Морозов А.И., Петровская Н.Б. Численное моделирование равновесной винтовой конфигурации с плазмой на сепаратрисе // Матем. моделирование, 1998, т.10, №11, с.29-36.
  17. Брушлинский К.В., Зуева Н.М., Михайлова М.С., Петровская Н.Б. Зависимость свойств винтовых плазменных шнуров от шага винта // Физ. плазмы, 1995, т.21, №3, с.221-225.
  18. Брушлинский К.В., Зуева Н.М., Михайлова М.С., Петровская Н.Б. О единственности и устойчивости решений двумерных задач плазмостатики // Матем. моделирование, 1995, т.7, №4, с.73-86.

Поступила в редакцию 05.12.11