



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Яковлев, С. А. Карабасов, В. М. Головизнин, Прямое моделирование взаимодействия вихревых пар, *Матем. моделирование*, 2011, том 23, номер 11, 21–32

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.117.162.193

20 ноября 2024 г., 09:30:49



ПРЯМОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВИХРЕВЫХ ПАР

© 2011 г. П.Г. Яковлев¹, С.А. Карabasov², В.М. Головизнин³

¹ Акустическое отделение ЦАГИ им. М.Е. Жуковского, Москва, Россия

² Технический факультет кембриджского университета, Кембридж, Великобритания

³ Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия

yakovlevpg@ya.ru; sak36@cam.ac.uk; gol@ibrae.ac.ru

Настоящая работа посвящена прямому численному моделированию сопряженной задачи динамики двух пар вихрей и расчета генерируемого ими звукового поля при числах Рейнольдса $Re=5000-10000$ на неподвижной эйлеровой сетке. Расчеты проводились по схеме КАБАРЕ. Для основных интегральных характеристик решения, таких как период про-скальзывания вихревых пар и скорости движения их центра масс, приведено сравнение с аналитическим решением, полученным для случая точечных вихрей в идеальной жидкости. Проведено исследование чувствительности полученных численных решений к сгущению сетки, включающее как гидродинамическое ближнее поле, так и мгновенные и сред-неквадратичные акустические пульсации.

Ключевые слова: газовая динамика, вихревое взаимодействие, акустика, вычислительные методы высокого разрешения, схема КАБАРЕ.

DIRECT SIMULATION OF INTERACTING VORTEX PAIRS

P.G. Yakovlev¹, S.A. Karabasov², V.M. Goloviznin³

¹ TsAGI Acoustics Branch, Moscow, Russia

² Cambridge University Engineering Department, Cambridge, UK

³ Institute of Nuclear Safety RAS, Moscow, Russia

The coupled problem of dynamics and acoustics of two interacting vortex pairs is studied numerically for a range of Reynolds numbers, $Re= 5000-10000$. The computations are performed on a Eulerian grid with the CABARET method. Two main integral characteristics of the vortex system, such as the period of vortex sleep through and the velocity of their centre of mass, as obtained from the computational solution, are compared with the analytical potential theory solution available for point vortices. Numerical grid sensitivity study is performed both for the hydrodynamic near-field and acoustic far-field solutions obtained.

Key words: fluid dynamics, vortex interaction, acoustics, high-resolution computational methods, CABARET scheme.

Введение

Задачи исследования процессов порождения звука вихревыми течениями являются базовыми в теории возникновения звуковых пульсаций в нестационарных и неоднородных гидродинамических потоках, включая турбулентные [1–3]. К их числу можно отнести и задачи генерации звуковых полей когерентными структурами, образуемыми двумерными системами динамически устойчивых концентрированных вихрей [4–6]. В част-

ности, в [6] были рассмотрены две вихревые пары конечного размера, каждая из которых содержит плоские вихри положительной и отрицательной циркуляции, равные по модулю. В процессе взаимодействия вихри начинают перескакивать друг через друга в манере, напоминающей детскую игру «чехарда» и со временем сливаются в один вихрь. При высоких числах Рейнольдса движение вихрей сопровождается генерацией тонких вихревых нитей («филаментов завихренности»), нестационарное взаимодействие которых порождает звуковые пульсации. После слияния, в случае слабовязкого газа, система продолжает поступательное движение как одно целое. При этом «филаменты завихренности» оказываются намотанными на ядро общего вихря, и, за исключением самых мелких структур вблизи ядра вихря, решение выходит на стационарный режим, а генерация звука системой вихрей в значительной мере прекращается.

Задача о проскальзывающих вихрях представляет интерес не только с точки зрения изучения фундаментальных механизмов генерации звука, но и с точки зрения тестирования расчетных методик, поскольку разрешение как самих мелких «филаментов завихренности», так и порождённых ими акустических пульсаций требует повышенной точности расчета. Возможности прямого численного моделирования «вихревой чехарды» на эйлеровой сетке в настоящее время лимитируются доступными вычислительными ресурсами и ограничиваются, в основном, числами Рейнольдса, не превышающими 1000-4000 [7]. Рекордно большое число Рейнольдса $Re=10000$ было достигнуто в [6] только при использовании неконсервативного эйлерово-лагранжевого подхода. В этом методе для описания переноса завихренности использовались «лагранжевы» частицы, которые наряду с завихренностью также переносят дивергенцию скорости.

Настоящая работа посвящена прямому численному моделированию сопряженной задачи динамики вихревого квадрупольного поля и расчета генерируемого звукового поля при числах Рейнольдса $Re=5000-10000$ на неподвижной эйлеровой сетке в консервативных переменных. Расчеты проводились по схеме КАБАРЕ [9,10], обладающей вторым порядком аппроксимации как по пространству, так и по времени. Несмотря на формально низкий порядок, она хорошо проявила себя в ряде задач гидро- и газодинамики [11-14]. Отличительными чертами схемы КАБАРЕ являются её чрезвычайно компактный вычислительный шаблон (одна пространственно-временная ячейка для уравнения линейного переноса) и использование отдельных консервативных и потоковых переменных, разнесенных по пространству и времени в шаблоне, напоминающем «чехарду». Особенно ценными свойствами схемы КАБАРЕ является её малодисперсионность и бездиссипативность. Для решения задач нелинейного переноса в схеме Кабаре используется специфический алгоритм нелинейной коррекции потоков на основе принципа максимума для потоковых переменных [15,16].

1. Постановка задачи

На рис.1 приведена система из четырёх вихрей в области с открытой границей. Циркуляция скорости каждого вихря на бесконечности равна $\pm\Gamma$, $\Gamma > 0$. Распределение завихренности задано по гауссову закону:

$$\xi = \frac{1.25\Gamma}{\pi r_0^2} \exp \left[-1.25 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right], \quad (1)$$

где циркуляция $\Gamma = 0.24 \pi \delta a_\infty$ отвечает числу Маха по радиусу вихря $M_0 = 0.28$, r_0 – радиус вихря и $\delta_x = \delta_y = \delta = \frac{10}{3} r_0$ – половина расстояния между центрами соседних вихрей.

Скорость движения центра масс и характерное время между двумя соседними проскальзываниями вихревых пар при этом примерно соответствуют параметрам, полученным для аналитического решения задачи в приближении точечных вихрей в невязком потоке [17].

В силу симметрии задачи относительно центральной оси достаточно ограничиться рассмотрением задачи в одной половине области. Также для уменьшения размеров расчетной области исходная задача решается в инерциальной системе координат, движущейся с постоянной скоростью $-\bar{U}$. Значение этой скорости соответствует средней скорости движения системы вихрей, но знак отвечает противоположному направлению.

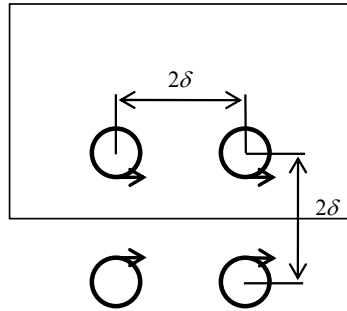


Рис.1. Положение вихрей в расчетной области.

Решение этой задачи наиболее полно описывается уравнениями Навье-Стокса, которые в консервативных переменных и с использованием стандартных обозначений имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} &= \mathbf{Q}_v, & \mathbf{Q}_v &= \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial y}; \\ \mathbf{U} &= (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T, & \mathbf{u} &= (u, v); \\ \mathbf{F} &= (\rho u, \rho u u + p, \rho v u, \rho u E)^T, & \mathbf{G} &= (\rho v, \rho u v, \rho v v + p, \rho v E)^T; \\ \mathbf{F}_v &= (0, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, u \sigma_{xx} + v \sigma_{xy})^T, & \mathbf{G}_v &= (0, \sigma_{yx}, \sigma_{yy}, u \sigma_{yx} + v \sigma_{yy})^T; \\ \sigma_{ij} &= \rho \nu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right], & i, j, k &= 1, 2; \quad x_1 = x, \quad x_2 = y; \\ p &= \rho e (\gamma - 1). \end{aligned} \tag{2}$$

Введем число Рейнольдса по отношению к циркуляции скорости и коэффициенту ламинарной вязкости, $Re_\Gamma = \Gamma / \nu$.

Задание начальных условий в консервативных переменных по заданному распределению завихренности (1) происходит относительно стандартным образом. Основные этапы его заключаются в следующем: используя распределение завихренности, с учетом свойства соленоидальности поля скорости, находится суммарное поле скорости из чис-

ленного решения уравнения Лапласа для функции тока. Далее, подставляя найденные значения поля скорости в уравнения для компонент импульса и численно проинтегрировав получающееся уравнение относительно неизвестных термодинамических величин, с учетом изэнтропичности вихря, находятся искомые начальные распределения плотности и давления.

2. Численный метод решения

Разобьем область решения прямоугольной декартовой сеткой, большинство ячеек которой приходится на равномерную квадратную сетку в центре области с плавным увеличением шага сетки по краям. На рис.2 показаны расчетная область, разбитая сеткой, и фрагмент равномерной сетки в окрестности центра области, где задаются вихри. Плотность сетки соответствует 12 расчетным ячейкам на радиус вихря. Наряду с этой сеткой, в расчетах также использовались сетки плотностью 9 и 6 ячеек на радиус вихря.

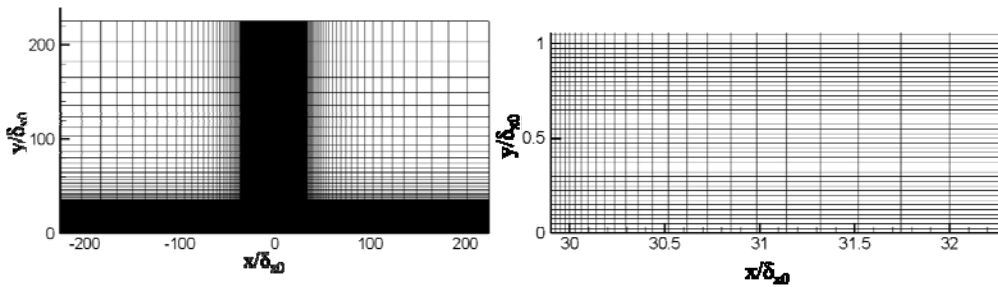


Рис.2. Пример расчетной сетки, радиус вихря соответствует $r_0 = 0.06$ и половина расстояния между вихрями $\delta = 0.2$.

Основные этапы использования схемы Кабаре для решения уравнений Навье-Стокса (2) совпадают со схемой Кабаре для решения уравнений Эйлера. Кратко их перечислим.

Зададим на сетке консервативные переменные, относящиеся к центрам ячеек, и потоковые – к серединам сторон, $(x, y, t) \rightarrow (i, j, n)$. Дробные индексы относятся к центру ячейки и середине временного слоя, целые – к узлам в серединах сторон ячейки и к целым временным слоям. Алгоритм разбивается на три этапа:

- Консервативный полушаг (предиктор)

$$\frac{U_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - U_{i+1/2, j+1/2}^n}{\tau^n} + \frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{h_x} + \frac{G_{j+1}^n - G_j^n}{h_y} = Q_v. \quad (3)$$

- Расчет потоковых переменных на новом временном слое с учетом декомпозиции решения на локальные инварианты Римана $U \rightarrow R_q$, $q = 1, 2, 3, 4$, нахождение базиса локальных инвариантов в ячейках, граничащих с узлом, где ищется поток, слева (L) и справа (R); экстраполяция локальных инвариантов в потоковый узел на новом временном слое $\tilde{R}_q^{n+1} = (2R_q^{n+1/2})_c - (R_q^n)_f$, где индексы c и f обозначают величины, относящиеся к центру ячейки и к стороне, противоположной той, где ищется поток; нелинейная коррекция потоков на основе принципа максимума с учётом

допустимых минимума и максимума на старом временном слое (n), которую можно выписать в следующем виде:

$$\left(R_q^{n+1}\right)_{L/R} = \max\left(\min(\max(R_q)^n, \tilde{R}_q^{n+1}), \min(R_q)^n\right)_{L/R},$$

и построение потоков схемы $F^{GC} = H\left(\left(R_q^{n+1}\right)_L, \left(R_q^{n+1}\right)_R\right)$, отвечающих минимальной локальной вариации решения с использованием обобщения метода Годунова [18].

- Консервативный полшаг (корректор)

$$\frac{U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{\tau^n / 2} + \frac{F_{i+1}^{n+1} - F_i^{n+1}}{h_x} + \frac{G_{j+1}^{n+1} - G_j^{n+1}}{h_y} = Q_v. \quad (4)$$

Вязкие члены аппроксимируются центральными разностями со вторым порядком. На нижней границе области ставится условие проскальзывания в характеристических переменных и на свободных границах области ставятся одномерные «безотражающие» характеристические граничные условия. На боковых границах области эти условия соответствуют входящему однородному потоку со скоростью $-\bar{U}$. Отметим, что в силу использования разнесенных переменных схемы Кабаре, реализованные одномерные «безотражающие» условия обеспечивают более слабое отражение волн, выходящих под углом к нормали к границе, по сравнению со стандартными одномерными характеристическими условиями типа Томпсона [19]. Также дополнительно использованное расширение сетки у границ расчетной области, с учётом отсутствия у схемы Кабаре нефизичного отражения волн от грубых сеток [11], сводит паразитное отражение волн от открытых границ к минимуму. Для валидации граничных условий был проведен ряд тестов в области с удвоенным количеством ячеек по вертикали и горизонтали. Результаты тестов показали, что при переходе на область большего размера численное решение, включая дальнее поле, меняется незначительно.

Более подробное изложение консервативной части алгоритма Кабаре, а также декомпозиции решения на локальные инварианты, их экстраполяция на новый временной слой и процедура нелинейной коррекции, включая постановку характеристических граничных условий, могут быть найдены в ряде предыдущих публикаций [11,16] и в настоящей работе эти детали опущены.

3. Результаты численных расчетов

На рис.3 представлена эволюция завихренности системы вихрей по мере проскальзывания вихревых пар друг относительно друга при числе Рейнольдса 9400. Сетка соответствует плотности 6 ячеек на радиус вихря. Как показало сравнение решений, именно при этом числе Рейнольдса решение Кабаре больше всего соответствует решению, полученному в [6] для числа Рейнольдса 10000. Небольшое отличие в числах Рейнольдса двух решений возможно связано с различием в аппроксимации вязких членов при использовании консервативной формы записи уравнений импульса и энергии в схеме Кабаре и в методе лагранжевых частиц [6], не использующем консервативную форму записи.

При числе Рейнольдса 9400 в решении Кабаре вихревые пары успевают совершить

четыре проскальзывания друг относительно друга, рис.3б, г, д, е, интервалы между которыми становятся с каждым разом все короче. При меньших числах Рейнольдса сливание вихрей происходит быстрее. Например, при $Re=5000$ вихри сливаются в один уже после трёх оборотов. Для сравнения можно также указать, что при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности (коэффициент ламинарной вязкости равен нулю), на этой же сетке, решение Кабаре будет соответствовать шести проскальзываниям вихрей друг относительно друга. Отметим, что свойство решения Кабаре оставаться чувствительным к такому малому коэффициенту ламинарной вязкости даже на достаточно грубой сетке говорит о малой диссипативности этого численного метода.

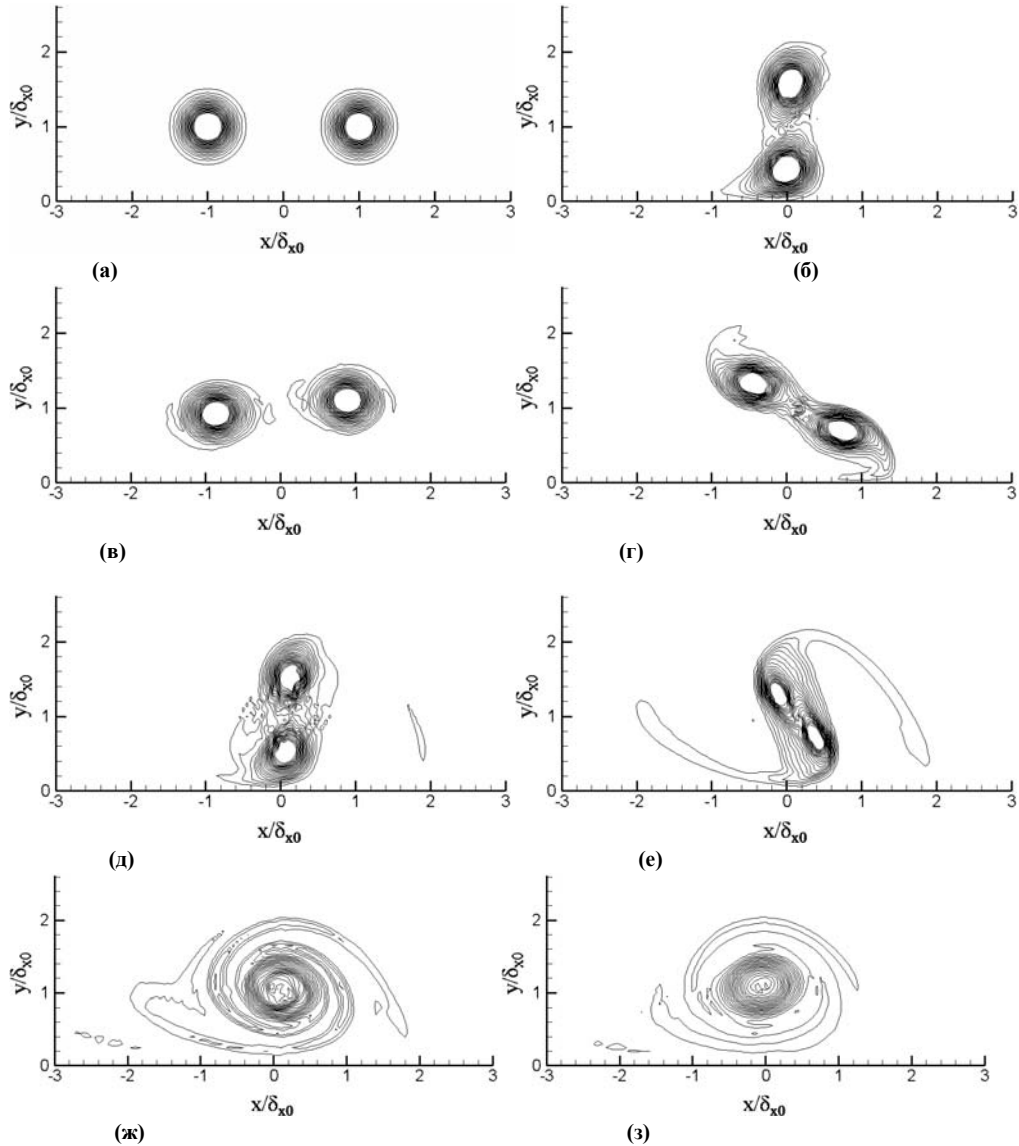


Рис.3. Распределение завихренности системы вихрей в характерные моменты времени $a_\infty t / \delta = 0$ (а), 18 (б), 36 (в), 54 (г), 72 (д), 90 (е), 108 (ж), 120 (з).

Для более детального изучения свойств решения на рис.4 показаны контуры дилатации (а–в) и завихренности (г–е), полученные из решения Кабаре на сетке плотности 6 и 12 ячеек на радиус вихря, и отдельно решение [6], полученное из расчета по методу лагранжевых частиц, переносящих завихренность и дивергенцию. Дилатация определяется как дивергенция скорости, умноженная на плотность, и характеризует «сжимаемость» гидродинамического поля. Её минимумы и максимумы можно связать с зонами зарождения наиболее сильных акустических пульсаций. Положительные контуры решения показаны сплошной линией, отрицательные – пунктиром. Момент времени отвечает тонкой вихревой структуре и соответствующим мелкомасштабным акустическим пульсациям, возникающим непосредственно перед слиянием вихревых пар, максимально сблизившихся друг с другом. Отметим, что в отличие от метода вихрей, решение Кабаре соответствует разностному дифференцированию решения в первичных переменных (производные в ячейках выражались через потоковые переменные Кабаре) и выглядит менее гладким. Какое-либо косметическое сглаживание производных решения Кабаре на сетке не проводилось. Тем не менее, несмотря на наличие мелкомасштабного «шума» в решении Кабаре, основные черты всех трёх решений неплохо совпадают.

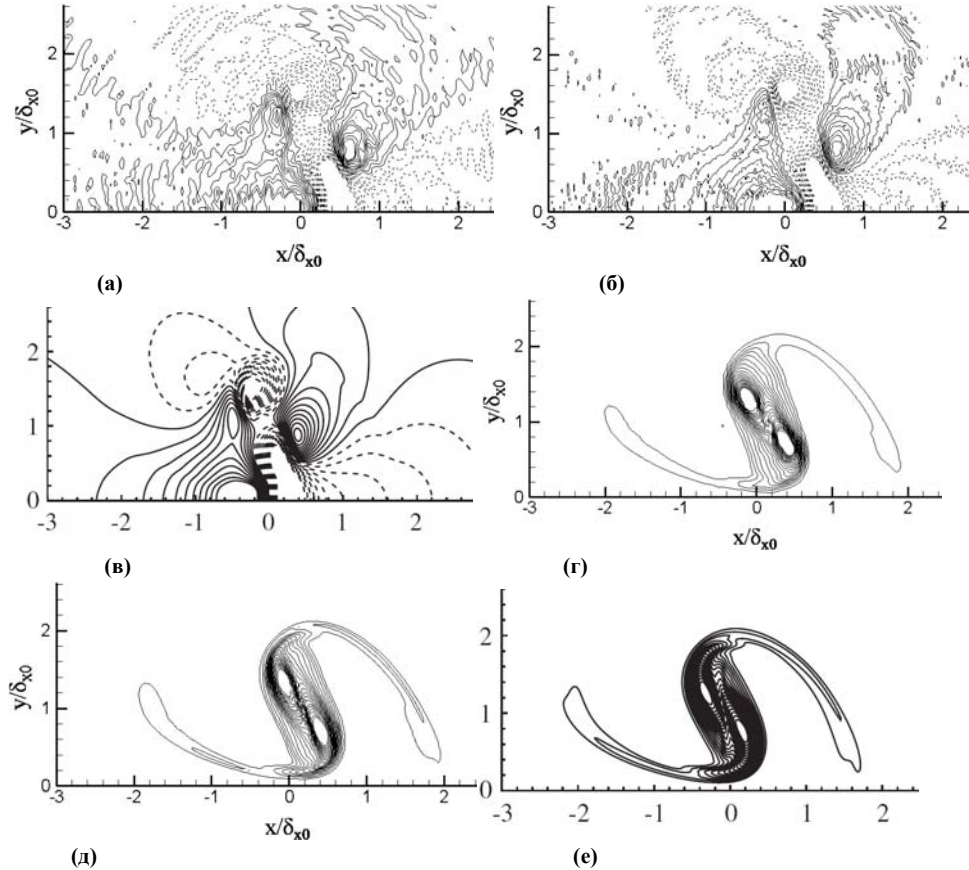


Рис.4. Распределения дилатации и завихренности системы вихрей при $a_{\infty}t/\delta = 90$, полученные из решения Кабаре на сетке плотностью 6 (а,г) и 12 (б,д) ячеек на радиус вихря, а также соответствующие распределения полученные методом лагранжевых частиц [6], (в) и (е).

Перейдя к количественному анализу полученного решения, сравним среднюю скорость центра масс системы вихрей и характерные времена между соседними проскальзываниями вихревых пар с аналитическим решением для двумерных точечных вихрей в невязком потоке. Решение для точечных вихрей является классическим и может быть получено на основе теории потенциала [17]. В частности, для периода и средней скорости потока получены следующие формулы [6]:

$$T_p = \frac{32\pi\delta_x^2}{\Gamma k^2(1+k)} \left(E(k) - (1-k^2)K(k) \right), \quad \bar{U} = \frac{\delta_y \cdot \Gamma}{4\pi\delta_x^2} \left[\frac{k^2 E(k)}{E(k) - (1-k^2)K(k)} \right], \quad (5)$$

где $k = 1 / \left[1 + (\delta_y / \delta_x)^2 \right]$, δ_y, δ_x – расстояния между центрами вихрей по вертикали и горизонтали, $K(k), E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода. При $\delta_y = \delta_x = \delta$ и значениях потока на бесконечности $p_\infty = 1, \rho_\infty = 1$ и $\delta = 0.2$ эти интегральные параметры системы, с точностью до четвертого знака, равны

$$T_p = \frac{54.46\delta^2}{\Gamma} = 12.21, \quad \bar{U} = \frac{0.1437 \cdot \Gamma}{\delta} = 0.1282. \quad (6)$$

Данные значения можно сравнить с величинами средней скорости и временами между первым и вторым $(T_p)_1$ и вторым и третьим $(T_p)_2$ проскальзываниями вихрей, приведенными в табл. 1. Значения в таблице были определены из решения Кабаре на сетках плотности 6, 9 и 12 ячеек на радиус вихря. Разница между значениями средней скорости и временами между соседними проскальзываниями вихрей при измельчении шага сетки не превышает 1%. Расчетное значение средней скорости потока, полученное на самой грубой сетке, отличается от теоретического значения для системы точечных вихрей также не более чем на 1%.

Таблица 1.

Шаг сетки, h	$r_0 / 6$	$r_0 / 9$	$r_0 / 12$
\bar{U}	0.1271	0.1277	0.1279
$(T_p)_1$	10.85	10.9	10.9
$(T_p)_2$	7.9	8.1	8.2

Отличие в характерных временах между соседними проскальзываниями вихрей и теоретическим значением для точечных вихрей больше, оно составляет порядка 10-15%. Таким образом, для этого параметра отличие между численным решением Кабаре для конечных вихрей и решением для точечных вихрей составляет порядка квадрата отношения радиуса вихря к расстоянию между вихрями $(r_0 / \delta)^2 = 0.16$. Поправка в квадратичном члене относительно теории точечных вихрей может объясняться эффектом конечности радиуса вихря, когда при усреднении периода $T_p \sim \delta^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2$ по всем точкам

пространственно распределенных вихрей $0 < r < r_0$ с центрами в x и y линейные по возмущению члены сокращаются.

Наряду с динамикой вихрей в ближнем поле также было проанализировано распределение пульсационной компоненты давления на контрольной поверхности. В качестве такой поверхности была выбрана окружность, покоящаяся относительно центра масс вихрей и расположенная на расстоянии 20δ от центра вихрей. На рис.5 представлены диаграммы направленности среднеквадратичной пульсации давления, отвечающие усреднению сигнала за промежутки времени до и после слияния вихрей. Жирными и тонкими линиями показаны распределения, отвечающие решениям на сетке плотностью 6 и 12 ячеек на радиус. Как видно из графика, решения, полученные на сетках разной плотности, практически неотличимы друг от друга. Из диаграммы видно, что среднеквадратичные пульсации давления до слияния вихрей заметно больше, чем после слияния, и сама направленность имеет четко выраженный максимум по направлению движения.

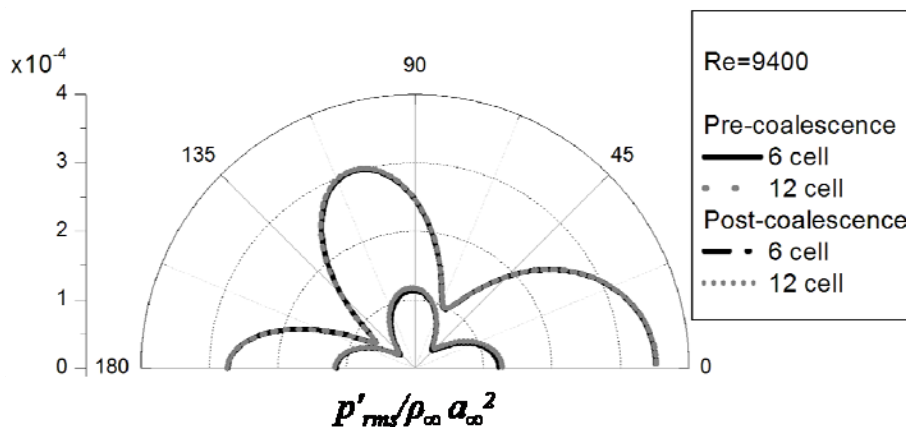


Рис.5. Распределение среднеквадратичных пульсаций акустического поля по полярному углу, начало отсчета совпадает с направлением движения вихрей.

Для более тонкого анализа решения представляет интерес сравнить акустические сигналы, поступившие в отдельные точки контрольной поверхности, расположенные под разными углами к движению системы вихрей и сравнить решения при разных числах Рейнольдса. На рис.6 представлены результаты расчета акустических пульсаций в точках контрольной поверхности, отвечающих углам 0 и 90 градусов относительно направления движения центра масс вихрей. Показанные результаты отвечают числам Рейнольдса 5000 и 9400 и были получены на сетках плотностью 6 и 12 ячеек на радиус вихря.

Пики акустических пульсаций соответствуют моментам проскальзывания вихревых пар друг относительно друга, соответственно, их количество – полному количеству проскальзываний. Видно, как после нескольких периодов проскальзываний, сопровождающихся бурным выделением акустической энергии, следует «затишье», отвечающее этапу слияния. Амплитуда пульсаций, переносимых под малым углом, рис.6а, б, в 1.5-2 раза превышает амплитуду пульсаций под 90 градусов к направлению движения потока

(в,г). Увеличение ламинарной вязкости в 2 раза несколько снижает амплитуду пульсаций, однако наиболее существенное влияние вязкость оказывает на высокочастотные пульсации, возникающие в системе уже после слияния вихрей ($a_\infty t / \delta > 120$ на графиках). По сравнению со случаем $Re=9400$ (а,в), для $Re=5000$ (б,г) амплитуда этих высокочастотных пульсаций заметно меньше. Можно предположить, что эти высокочастотные пульсации вызваны нестационарностью мелких пространственных структур, возникающих в ядре общего вихря, и наиболее эффективно вязкость действует именно на эти мелкомасштабные структуры. Следует отметить также, что решение на сетках плотности 6 и 12 ячеек на радиус до слияний вихрей практически неразличимы. Небольшая разница между решениями на двух сетках имеется только в мелкомасштабных пульсациях, возникающих после слияния вихрей при более высоком числе $Re=9400$. На более грубой сетке амплитуды этих пульсаций на 10-15% занижены относительно решения на мелкой сетке. При $Re=5000$ решения на сетках разной плотности можно считать неразличимыми во всем диапазоне масштабов.

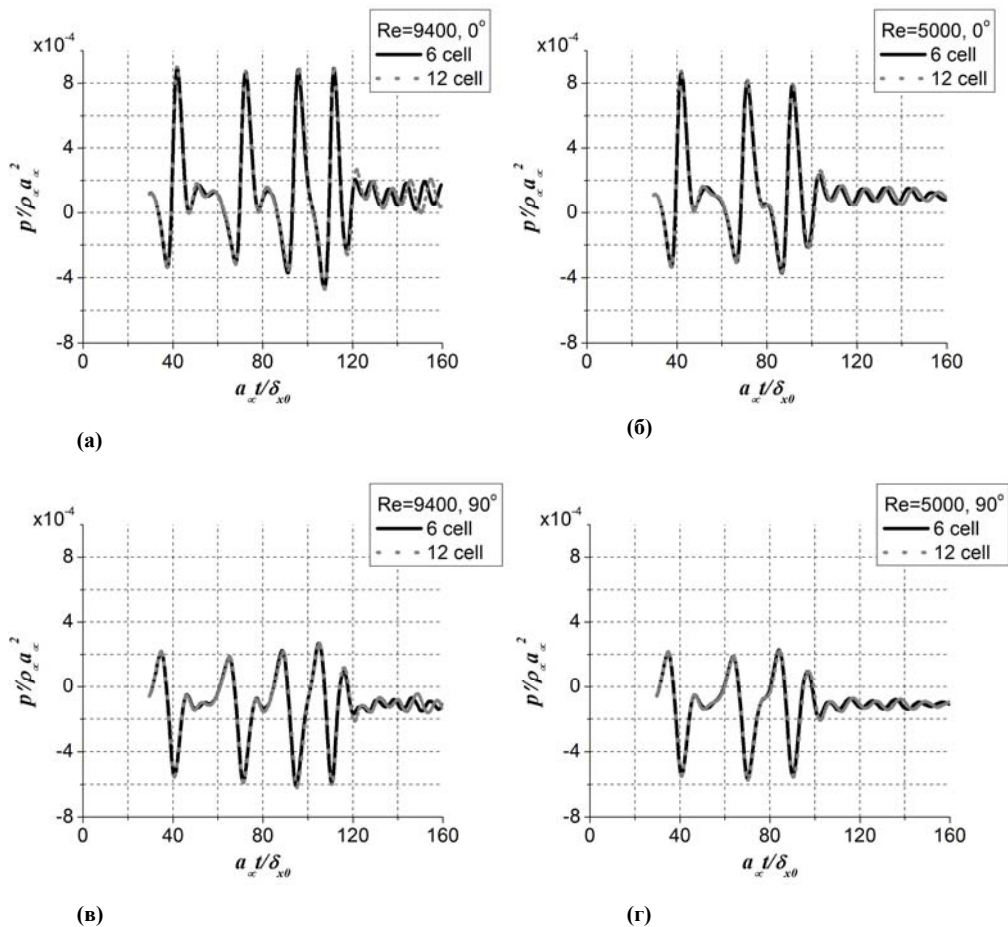


Рис.6. Акустические пульсации поля вихрей на контрольной поверхности под разными углами к потоку и при разных значениях ламинарной вязкости.

4. Выводы

- Показано хорошее качественное соответствие решений полученных по схеме Кабаре на сетках плотностью 6 и 12 точек на радиус вихря с решением, полученным в [6] с использованием метода лагранжевых частиц.
- Приведено сравнение с известным аналитическим решением для пар точечных вихрей в невязком потоке. Показано хорошее соответствие численного и аналитического решений для средней скорости движения системы и времени между соседними проскальзываниями вихревых пар. Показана незначительная чувствительность полученных параметров к плотности расчетной сетки.
- Рассмотрена пульсационная составляющая решения в дальнем поле. Исследовано влияние вязкости потока и угла наблюдения на излучаемый звук, включая как среднеквадратичные пульсации, так и рассмотрение временного сигнала в нескольких контрольных точках. Отмечен эффект усиления звука под малыми углами к потоку и влияния вязкости на мелкомасштабные структуры вблизи ядра вихря. Показана незначительная зависимость рассмотренных эффектов от плотности расчетной сетки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Powell A.* Theory of vortex sound // *Journal of the Acoustical Society of America*, 1964, v.36(1), p.177–195.
2. *Ffowcs Williams J.E.* Hydrodynamic Noise // *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1969, v.1, p.197–222.
3. *Koenig M., Cavalieri A., Jordan P., Delville J., Gervais Y., Papamoschoux D., Samimy M., Lele S.* Filtering and source imaging for the study of jet noise // *AIAA 2010-3779*, 16th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference and Exhibit.
4. *Mitchell B.E., Lele S.K., Moin P.* Direct computation of the sound from a compressible co-rotating vortex pair // *Journal of Fluid Mechanics*, 1995, v.285, p.181–202.
5. *Tang S.K., Ko N.W.M.* Sound sources in the interactions of two inviscid two-dimensional vortex pairs // *Journal of Fluid Mechanics*, 2000, v.419, p.177–201.
6. *Eldridge J.D.* The dynamics and acoustics of viscous two-dimensional leapfrogging vortices // *J. Sound Vib.*, 2007, v.301, p.74–92.
7. *Inoue O.* Sound generation by the leapfrogging between two coaxial vortex rings // *Physics of Fluids*, 2002, v.14 (9), p.3361–3364.
8. *Mohring W.* On vortex sound at low Mach number // *Journal of Fluid Mechanics*, 1978, v.85, p.685–691.
9. *Самарский А.А., Головизнин В.М.* Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // *Матем. моделирование*, 1998, т.10, №1, с.86–100.
10. *Самарский А.А., Головизнин В.М.* Некоторые свойства разностной схемы “кабаре” // *Матем. моделирование*, 1998, т.10, №1, с.101–116.
11. *Karabasov S.A. and Goloviznin V.M.* Compact Accurately Boundary Adjusting high-Resolution Technique for Fluid Dynamics // *J. Comput. Phys.*, 2009, v.228, p.7426–7451.
12. *Tucker P.G. and Karabasov S.A.* Unstructured grid solution of the eikonal equation for acoustics // *Int. J. Aeroacoustics*, 2009, v.8 (6), p.535–554.

13. *Karabasov S.A., Berloff P.S. and Goloviznin V.M.* CABARET in the Ocean Gyres // *J. Ocean Model.*, 2009, v.30, p.155–168.
14. *Karabasov S.A. and Goloviznin V.M.* A New Efficient High-Resolution Method for Non-Linear problems in Aeroacoustics // *AIAA Journal*, 2007, v.45, №12, p.2861–2871.
15. *Головизнин В.М., Карабасов С.А.* Нелинейная коррекция схемы Кабаре // *Матем. моделирование*, 1998, т.10, №12, с.107–123.
16. *Головизнин В.М.* Балансно-характеристический метод численного решения одномерных уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных // *Матем. моделиров.*, 2006, т.18, №11, с.14–30.
17. *Hicks W.M.* On the mutual threading of vortex rings // *Proceedings of the Royal Society of London A*, 1922, v.10, p.111–131.
18. *Головизнин В.М., Канаев А.А.* Метод минимальной вариации схемы Кабаре // *Журн. Выч. Матем. и Мат. Физики*, 2011, т.5.
19. *Thompson K.W.* Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems, II. // *Journal of Computational Physics*, 1990, v.89, p.439-461.

Поступила в редакцию 14.02.2011.