



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Рукавишников, О. П. Ткаченко, Численный анализ математической модели гидроупругих колебаний в изогнутом трубопроводе, *Матем. моделирование*, 2011, том 23, номер 1, 51–64

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.15.142.255

14 октября 2024 г., 10:33:26



УДК 519.635:532.595

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГИДРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ В ИЗОГНУТОМ ТРУБОПРОВОДЕ

© 2011 г. *В.А. Рукавишников, О.П. Ткаченко*

Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск
e-mail: vark@mail.redcom.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 10-01-00060) и Президиума ДВО РАН (интеграционный проект 09-П-СО-01-001).

Поставлены численные эксперименты по вычислительной механике внутренних волн в трубопроводах. Исследованы избранные задачи о гидравлическом ударе и акустических колебаниях. Проведено сравнение с результатами, опубликованными в открытой печати. Установлено, что рассмотренная математическая модель удовлетворительно описывает все изученные примеры и может применяться к расчету промышленных трубопроводов.

Ключевые слова: вычислительная механика, изогнутый трубопровод, колебания.

NUMERICAL ANALYSIS OF THE MATHEMATICAL MODEL OF HYDROELASTIC OSCILLATIONS IN A CURVED PIPELINE

V.A. Rukavishnikov, O.P. Tkachenko

Computer Center FEB RAS, Khabarovsk

Numerical experiments on computational mechanics of internal waves in pipes were performed. We study favorites problems of hydraulic impact and acoustic vibrations. A comparison with the results published in the press was performed. It was established that the considered mathematical model adequately describes all the studied samples and can be applied to the calculation of industrial pipelines.

Key words: computational mechanics, curvilinear pipeline, oscillations.

1. Введение

В настоящее время имеется множество математических моделей трубопроводных систем. Это обусловлено широким полем соответствующих инженерных приложений, от технологий добычи и транспортировки нефти до городского водопровода.

Особенно актуальными в последнее время стали вопросы гидроупругости [1], получившие за рубежом название fluid-structure interaction problems (FSI), и выделившиеся в самостоятельное направление вычислительной и прикладной механики [2]. Одной из первых работ в этой области была [3]. Сделать сколько-нибудь полный литературный обзор не представляется возможным, основные ссылки есть в [1], [2].

Нами создана математическая модель [4], позволяющая исследовать широкий класс внутренних волн в изогнутом трубопроводе. Подробно кинематика и динамика изогнутого трубопровода рассмотрена в [5], где исследовалась внешняя задача. Сильно нелинейные внутренние волны в прямолинейной трубе изучались в [6]. Для численного решения возникающих начально-краевых задач эффективны явные разностные схемы.

Здесь рассмотрены задачи о гидравлическом ударе и внутренних колебаниях в различных изогнутых трубах, заполненных жидкостью; численные эксперименты поставлены на основе [4]. Проведены расчеты гидравлического удара в эластичной трубе, акустических колебаний в трубопроводе, гидравлического удара в системе соединенных труб. Проанализированы геометрические параметры промышленных трубопроводов и проведено сравнение теоретических методов учета геометрии труб.

2. Физическая формулировка задачи. Системы координат

Рассматривается металлическая труба длиной L с круглым поперечным сечением радиусом R_0 и малой толщиной стенки h , заполненная потоком сжимаемой жидкости с начальной плотностью ρ_{f0} . Осевая линия недеформированной трубы является плоской кривой Γ с радиусом кривизны ρ_0 и кривизной κ_0 , такими, что мал параметр

$$\lambda = \frac{R_0}{\min |\rho_0|} \ll 1. \quad (1)$$

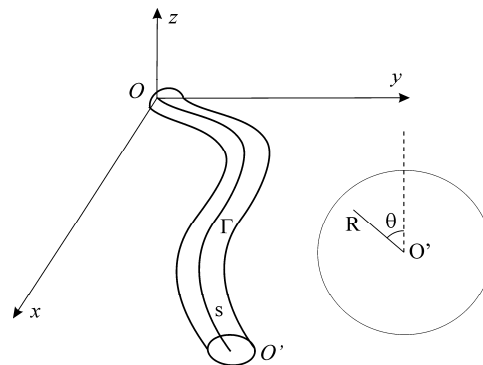


Рис.1. Геометрия системы и координаты.

Введены следующие системы координат: декартова система отсчета $\{Oxyz\}$ и криволинейные координаты $\{Os\theta R\}$, рис.1. Здесь s – длина дуги вдоль Γ от O до точки O' , являющейся пересечением текущего поперечного сечения трубы и Γ ; $\{\theta, R\}$ – полярные координаты в сечении:

$$x_1 = s, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = R. \quad (2)$$

Осевая линия трубы во всем процессе движения лежит в плоскости (xOy) . В связи с характером движения трубопровода здесь не различаются начальная, сопутствующая ла-

гранжевы криволинейные системы координат и эйлера криволинейная система координат [7].

Строя систему криволинейных координат с помощью (2) и формул из [7], найдем геометрические параметры:

$$g_{11} = (1 + R\kappa_0(s)\sin\theta)^2, \quad g_{22} = R^2, \quad g_{33} = 1; \quad H_1 = g_{11}^{1/2}, \quad H_2 = g_{22}^{1/2}, \quad H_3 = g_{33}^{1/2}; \quad (3)$$

g_{ij} – ненулевые компоненты метрического тензора, H_i – коэффициенты Ламе [8]. Для срединной поверхности стенки трубы выполнены геометрические соотношения:

$$A_0 = 1 + R_0\kappa_0(s)\sin\theta, \quad B_0 = R_0, \quad k_1 = \frac{\sin\theta}{\rho_0(s) + R_0\sin\theta}, \quad k_2 = 1/R_0; \quad (4)$$

k_1, k_2 – главные кривизны срединной поверхности. Коэффициенты Ламе из (4):

$$H_1 = A_0(1 + k_1\gamma), \quad H_2 = B_0(1 + k_2\gamma), \quad \gamma = R - R_0. \quad (5)$$

Формулы (3) опубликованы только для тороидальных координат с постоянной κ_0 (см., например, [9]), (5) есть в [8].

Перемещения стенки трубы полагаются малыми. Ее торцы закреплены в основаниях из такого же материала, что и сама труба. Положение стенок, кинематические параметры потока жидкости в начальный момент времени $t = t_0$ считаются известными. Внешняя среда полагается вязкоупругой, учет ее влияния осуществляется через краевые условия на внешней стенке трубы.

В начальный момент времени система полагается находящейся в стационарном состоянии. При $t = t_0$ это состояние нарушается посредством возмущения движения жидкости на входе или выходе трубопровода (например, гидравлическим ударом). Трением и силой тяжести в колебательных процессах в жидкости пренебрегаем. Построенная математическая модель описывает дальнейшее движение системы. Физическое обоснование теоретических выкладок и подробности вывода уравнений см. [4].

3. Теоретическое построение математической модели

3.1. Математическая модель движения стенок трубы. Теоретически предполагается, что выполнены условия применимости теории технических полубезмоментных оболочек [8]:

$$h/R_0 \leq 0,1; \quad \min(L, \rho_0)/R_0 \geq 4, \quad (6)$$

но в инженерной практике эти условия часто расширяются.

В [10] оригинальным способом выведена система уравнений движения технической оболочки, с точностью до обозначений совпадающая с общими уравнениями [8]:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial I^{(0)}}{\partial s} - \frac{1-\nu}{B} \frac{\partial \chi_0}{\partial \theta} + (1-\nu) \left(k_1 k_2 u - \frac{k_2}{A} \frac{\partial w}{\partial s} \right) = -\frac{1-\nu^2}{Eh} (X - k_1 m_\theta),$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{B} \frac{\partial I^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{1-\nu}{A} \frac{\partial \chi_0}{\partial s} + (1-\nu) \left(k_1 k_2 \nu - \frac{k_1}{B} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = -\frac{1-\nu^2}{Eh} (Y + k_2 m_s), \\
& -(k_1 + k_2) \cdot I^{(0)} + \frac{1-\nu}{AB} \left[2ABk_1 k_2 w + \frac{\partial}{\partial s} (Bk_2 u) + \frac{\partial}{\partial \theta} (Ak_1 v) \right] - \frac{h^2}{12} \nabla^2 \left[(k_1^2 + k_2^2) w \right] - \\
& - \frac{h^2}{12} \nabla^2 \nabla^2 w = -\frac{1-\nu^2}{Eh} \left\{ Z + \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (Am_s) - \frac{\partial}{\partial s} (Bm_\theta) \right] \right\}; \\
& \nabla^2 = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial \cdot}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial \cdot}{\partial \theta} \right) \right]. \tag{7}
\end{aligned}$$

Здесь I_0 – первый инвариант тензора деформаций, χ_0 – линейное кручение, u, v, w – перемещения срединной поверхности трубы в направлениях s, θ, R соответственно, E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно, X, Y, Z – внешние поверхностные силы, действующие на трубу и приведенные к ее срединной поверхности, m_s, m_θ – моменты внешних поверхностных сил, $A = A_0, B = B_0$.

Итак, исходные уравнения движения стенки трубы совпадают с известными уравнениями для оболочки (7), теоретическим условием их применимости является (6).

3.2. Математическая модель движения жидкости. В качестве исходных выбраны уравнения Эйлера движения сжимаемой жидкости с учетом трения стационарного потока о стенку, как в теории шероховатых труб [11]. В координатах (2), (3) эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{v_s}{1 + R\kappa_0 \sin \theta} \cdot \frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{v_\theta}{R} \cdot \frac{\partial v_s}{\partial \theta} + v_R \cdot \frac{\partial v_s}{\partial R} + \frac{v_s}{\rho_0 + R \sin \theta} \cdot (v_\theta \cos \theta + v_R \sin \theta) = \\
& = -\frac{1}{\rho_f (1 + R\kappa_0 \sin \theta)} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{1}{\rho_f} |\Phi(v_{0f})| + \frac{1}{\rho_f} F(t, s); \\
& \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{v_s}{1 + R\kappa_0 \sin \theta} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial s} + \frac{v_\theta}{R} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_R \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial R} - \frac{v_s^2}{\rho_0 + R \sin \theta} \cdot \cos \theta + \frac{v_R v_\theta}{R} = -\frac{1}{\rho_f R} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta}; \\
& \frac{\partial v_R}{\partial t} + \frac{v_s}{1 + R\kappa_0 \sin \theta} \cdot \frac{\partial v_R}{\partial s} + \frac{v_\theta}{R} \cdot \frac{\partial v_R}{\partial \theta} + v_R \cdot \frac{\partial v_R}{\partial R} - \frac{v_s^2}{\rho_0 + R \sin \theta} \cdot \sin \theta - \frac{v_\theta^2}{R} = -\frac{1}{\rho_f} \cdot \frac{\partial p}{\partial R}; \\
& \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{1}{1 + R\kappa_0 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial s} (\rho_f v_s) + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho_f v_\theta) + \frac{\partial}{\partial R} (\rho_f v_R) + \rho_f \cdot \frac{v_R}{R} + \\
& + \frac{\rho_f}{\rho_0 + R \sin \theta} \cdot (v_\theta \cos \theta + v_R \sin \theta) = 0. \tag{8}
\end{aligned}$$

Здесь ρ_f – переменная плотность потока жидкости, v_s, v_θ, v_R – проекции скорости жидкости на соответствующие единичные векторы криволинейной системы координат, Φ – плотность силы трения потока о стенку, p – давление в жидкости.

В [9] изучался поток вязкой жидкости в трубе, состоящей из прямолинейного и изогнутого участков, причем радиус изгиба ρ_0 был постоянным. Были использованы модифицированные тороидальные координаты, в которых вместо угла ϕ взята длина дуги $\rho_0\phi$, угол θ совпадает с нашей переменной θ , как и радиальная координата R . С поправкой на постоянство ρ_0 в [9] для левых частей и коэффициентов при давлении p получены те же выражения, что и (8). Формулы для силы трения Φ приведены в [11].

В [12] исследовались геометрические свойства волнового оператора применительно к идеальной жидкости в слабо изогнутой трубе, но без формулировки конкретных задач механики. Использовалась криволинейная система координат на основе соотношений Френе для пространственной кривой, получены аналоги формул (3), (4).

Итак, установлена эквивалентность исходных уравнений рассматриваемой математической модели и вышеупомянутых теоретических результатов [8], [9], [11], [12].

3.3. Переменные и уравнения математической модели. Для безразмерных перемещений стенки трубы

$$u' = u/R_0, \quad v' = v/R_0, \quad w' = w/R_0,$$

скоростей и давления жидкости

$$v_s' = v_s/c_f, \quad v_\theta' = v_\theta/c_f, \quad v_r' = v_r/c_f, \quad p' = p/p_a,$$

c_f – скорость звука в жидкости, p_a – стандартное атмосферное давление, определены приближенные решения в виде

$$u'(s, \theta, t) = u_0(s, t) + \lambda u_1(s, t) \sin \theta + \lambda u_2(s, t) \cos \theta + O(\lambda^2);$$

$$v'(s, \theta, t) = v_0(s, t) + \lambda v_1(s, t) \sin \theta + \lambda v_2(s, t) \cos \theta + O(\lambda^2);$$

$$w'(s, \theta, t) = w_0(s, t) + \lambda w_1(s, t) \sin \theta + \lambda w_2(s, t) \cos \theta + O(\lambda^2);$$

$$v_s' = v_{s0}(s, R, t) + \lambda v_{s1}(s, R, t) \sin \theta + \lambda v_{s2}(s, R, t) \cos \theta + O(\lambda^2);$$

$$v_\theta' = v_{\theta0}(s, R, t) + \lambda v_{\theta1}(s, R, t) \sin \theta + \lambda v_{\theta2}(s, R, t) \cos \theta + O(\lambda^2);$$

$$v_r' = v_{r0}(s, R, t) + \lambda v_{r1}(s, R, t) \sin \theta + \lambda v_{r2}(s, R, t) \cos \theta + O(\lambda^2);$$

$$p' = p_0(s, R, t) + \lambda p_1(s, R, t) \sin \theta + \lambda p_2(s, R, t) \cos \theta + O(\lambda^2). \quad (9)$$

В результате уравнения (7), (8) упростились, и стало возможным их численное решение. Уравнения итоговой математической модели [4]:

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2} + \alpha v \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} - c^{-2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} - h_- \tilde{\beta} v_{0f}^2 / \alpha^2 \right) - h_+ \delta_k \frac{\partial}{\partial \tau} \left(u_0 - 0.5 \cdot h^* \alpha \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \right) = 0; \\ & (1 + h_+ KR_0 / E^*) w_0 + \alpha v \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} + \frac{h^*}{12} \cdot \left(\alpha^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \zeta^2} + \alpha^4 \frac{\partial^4 w_0}{\partial \zeta^4} \right) + c^{-2} (1 + \rho_{f0} h_- / 2\rho_t) \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} + \\ & + \frac{h_- v_{0f} \rho_{f0} c^{-2}}{2\rho_t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau \partial \zeta} + 0.5 \alpha (1 + 0.5 h^*) \delta_k \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \zeta} \left(u_0 - 0.5 h^* \alpha \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \right) = \\ & = \frac{P_a}{E^*} \left[h_- (1 + l\beta v_{0f}^2 (L - \zeta) / \rho_{f0} \alpha^2 + p_0) - h_+ p_{ex} / p_a \right]; \\ & c^{-2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2} + (1 - \nu) u_1 / 2 + \frac{\delta_k}{h^*} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + 0.5 \cdot (1 + \nu) \alpha \frac{\partial v_2}{\partial \zeta} - \alpha v \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} = (1 - \nu) f u_0 / 2 - \\ & - 2\alpha^2 f \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2} - \delta_k f \frac{\partial u_0}{\partial \tau} + (1 - \nu) \alpha f \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} - \tilde{\beta} f v_{0f}^2; \\ & c^{-2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \tau^2} - \alpha^2 \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \zeta^2} + v_2 + \frac{\delta_k}{h^*} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left(v_2 - \frac{h^*}{2} w_1 \right) - w_1 - \frac{1 + \nu}{2} \alpha \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} = f w_0 - \frac{3 - \nu}{2} \alpha f \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}; \\ & (1 + KR_0 / E^* h^*) w_1 + \frac{h^*}{12} \alpha^2 \left(\alpha^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial \zeta^4} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} \right) + c^{-2} \left(1 + \frac{\rho_{f0}}{\rho_t h^*} \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} + \frac{\rho_{f0} v_{0f}}{\rho_t h^* c^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau \partial \zeta} - v_2 - \\ & - \frac{\delta_k}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(v_2 - h^* w_1 / 2 - \alpha \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \right) + \alpha v \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} = h^* \alpha^4 \frac{f}{3} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \zeta^4} - 2\nu f w_0 - (1 - \nu) f \alpha \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} + Z_0^1 / E^*; \\ & Z_0^1 = \frac{p_{am} v_{0f} f}{ah^*} (v_{0f} + 2v_{s0}) + \frac{\rho_{f0} \omega^2 R_0^2}{h^*} v_{0f} \left(3f \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau \partial \zeta} - 0.25 \cdot \tilde{F}_1(\tau, \zeta) \right) - \\ & - 0.5 \cdot p_a f \left[1 + \frac{l\beta v_{0f}^2}{\rho_{f0} a} (L - \zeta) - \frac{\alpha^2}{2a} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} + v_{0f} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau \partial \zeta} \right) + p_{ex} / p_a + KR_0 w_0 / p_a \right]; \\ & \frac{\partial v_{s0}}{\partial \tau} + v_{0f} \frac{\partial v_{s0}}{\partial \zeta} = -a \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} + F(\tau, \zeta); \quad a \left(\frac{\partial p_0}{\partial \tau} + v_{0f} \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial v_{s0}}{\partial \zeta} + 2 \frac{\partial w_0}{\partial \tau} = 0; \quad v_{r0} = \alpha r \frac{\partial w_0}{\partial \tau}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= 2rv_{0f}fv_{s0}/a + \frac{\alpha^2 r}{a} \left[3fv_{0f} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau \partial \zeta} - \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} + v_{0f} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau \partial \zeta} \right) + (r^2 - 3)v_{0f} \tilde{F}_1/8 \right]; \\
\tilde{F}_1(\tau, \zeta) &= 2f \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + v_{0f} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 v_{s0} + \frac{af}{v_{0f}} \frac{\partial^2 p_0}{\partial \zeta^2} + 7f \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau \partial \zeta} - \frac{l\beta f}{\rho_{f0}} \frac{\partial w_0}{\partial \tau} - \\
&- f \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + v_{0f} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left(2a \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} + \frac{1}{v_{0f}} \left(\frac{\partial v_{s0}}{\partial \zeta} - \frac{\partial w_0}{\partial \tau} \right) \right); \quad \tilde{F}_2 = 0, \quad 1 \leftrightarrow 2. \quad (10)
\end{aligned}$$

Здесь сделан переход к безразмерным координатам $\zeta = s/l$, $r = R/R_0$ и времени $\tau = \omega t$; опущены уравнения первого приближения по λ , получающиеся заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$. В (10) обозначено:

$$\begin{aligned}
c^{-2} &= \rho_t R_0^2 \omega^2 / E^*; \quad E^* = E / (1 - \nu^2); \quad \tilde{\beta} = \alpha \beta l / 2\rho_t; \quad \delta_k = k \omega R_0 \rho_{gr} g h_0 / E^*; \quad h^* = h / R_0; \\
\alpha &= R_0 / l; \quad a = p_a / \rho_{f0} c_f^2; \quad f = \min \rho_0 / \rho_0;
\end{aligned}$$

l, ω – характерные размеры по координате s и времени t соответственно; ρ_t – плотность материала трубы, k – коэффициент вязкого трения внешней среды, β – коэффициент трения внутреннего потока, p_{ex} – постоянное давление внешней среды, ρ_{f0} – плотность жидкости, v_{0f} – скорость потока на входе трубы. Уравнения (10) являются одномерными по пространству (по координате r не производится дифференцирование) и рассматриваются на интервале $0 \leq s \leq L$.

Краевые условия для перемещений стенки трубы во всех рассмотренных примерах однородные:

$$u_i = w_i = v_i = 0; \quad \frac{\partial u_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial v_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial w_i}{\partial \zeta} = 0; \quad i = 0, 1, 2 \quad (11)$$

на краях интервала изменения переменной s .

Для жидкости краевые условия зависят от решаемой задачи и имеют вид

$$\mu_1 v_{s0}(0, \tau) + \mu_2 p_0(0, \tau) = F_{01}(\tau); \quad \mu_3 v_{s0}(L, \tau) + \mu_4 p_0(L, \tau) = F_{02}(\tau), \quad (12)$$

где $\mu_i = 0; 1$ в зависимости от решаемой задачи.

Здесь в качестве результата представлены, если не указано иное, значения усредненного по сечению динамического давления $\bar{p}'(s, t)$ и продольной скорости стенки $\bar{u}'(s, t)$. Соответствующие полные функции (9) зависят от всех переменных.

При расчете движения стенки трубы использованы явные трехслойные разностные схемы для каждого компонента вектора перемещения. При расчете движения жидкости применены известные конечные разности против потока.

4. Сравнение результатов численного моделирования

4.1. Гидравлический удар в эластичной изогнутой трубе. В [13] рассмотрен гидравлический удар в полимерном трубопроводе, рис.2 (из [13]). Параметры течения и материала трубы следующие: $E = 3.2$ ГПа, $\nu = 0.4$, $\rho_t = 1470$ кг/м³ – плотность материала трубы, $L = 624$ мм, $h = 1,5$ мм, $R_0 = 20$ мм, заполняющая жидкость – вода с начальной скоростью $v_{0f} = 0$ м/с. Параметры (1), (6) равны

$$\lambda \approx 0.143; h/R_0 = 0.075; \min \rho_0/R_0 = 7.$$

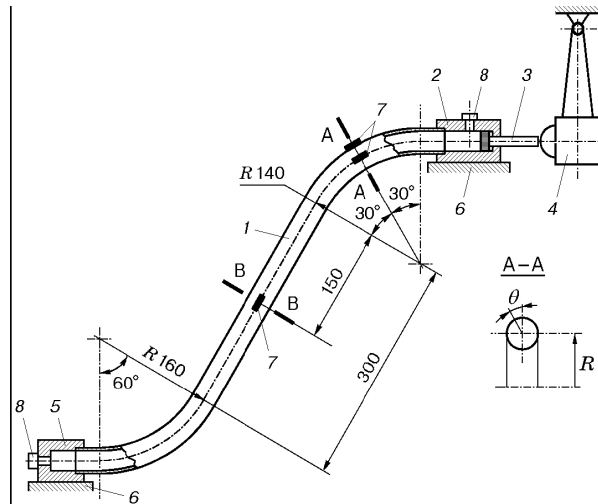


Рис.2. Установка по гидравлическому удару в полимерной трубе. Опубликовано в [13].

Таблица 1. Значения давления при гидравлическом ударе в полимерном трубопроводе.

t , мс	0.2	0.32	4	5.1	8	9	10	12	14	16	18	19
p , МПа эксперимент [13]	0.08	0.55	0.7	0.68	1.05	1.4	1.25	1.1	1.6	1.52	1.15	1.15
p , МПа по модели (10)	0.06	0.1	0.49	0.3	0.92	1.42	1.64	0.96	1.2	1.43	1.09	0.985
p , МПа по модели [13]	0.1	0.9	0.55	0.68	1.05	1.57	1.25	0.85	1.4	1.52	1.25	1.15
t , мс	20	23	25	27								
p , МПа эксперимент [13]	1.2	0.6	0.45	0.1								
p , МПа по модели (10)	1.0	0.61	0.51	0								
p , МПа по модели [13]	1.25	0.7	1.1	0								

Гидроупругие колебания возбуждались ударом копра 5 по поршню 4, и значения давления считывались в начале и конце трубы. В [13] также построена математическая модель и проведено сравнение численных и экспериментальных результатов.

Нами проведены численные эксперименты по математической модели (10)-(12). В качестве краевого условия при $s=0$ использованы результаты измерения давления из [13], как и в первоисточнике. При $s=L$ скорость жидкости равна нулю. Результаты расчета давления на нижнем конце трубы вместе с экспериментальными данными приведены в табл.1 и на рис.3. Из табл.1 видно, что обе математические модели [13] и (10) примерно с одинаковой точностью описывают поведение механической системы. Отклонения, по-видимому, объясняются тем, что труба в эксперименте, строго говоря, не является упругой, полимеры подчиняются более сложным соотношениям, чем закон Гука [7]. С этой поправкой результаты расчета согласованы с данными опытов.

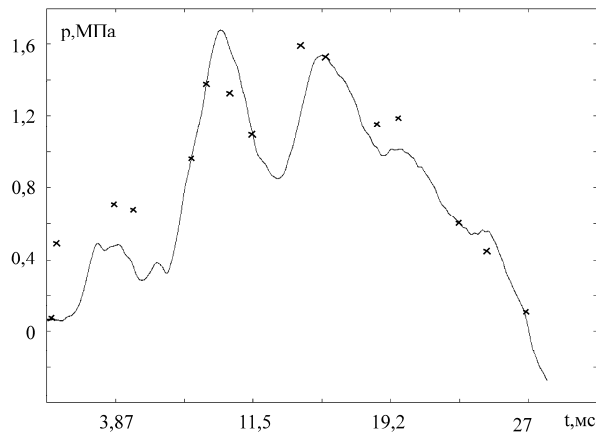


Рис.3. График давления в полимерной трубе. Отмечены экспериментальные значения.

4.2. Акустические колебания в трубопроводе. В [14] при помощи программного комплекса ANSYS численно моделировались колебания трубопровода, изогнутого в виде колена. Затем в [15] была разработана оригинальная математическая модель малых акустических колебаний криволинейного трубопровода, и проведены расчеты колебаний колена без прямолинейных участков. Здесь сравниваются результаты расчета [15] с расчетом по модели (10).

Труба представляет собой фрагмент тора с радиусом осевой линии $\rho_0=0.4$ м, радиусом сечения $R_0=0.0015$ м и длиной оси $L=0.3$ м. Остальные параметры механической системы: $h=0.0006$ м, $\rho_t=7800$ кг/м³, $E=2 \cdot 10^{11}$ Па; $\rho_{f0}=870$ кг/м³, $c_f=1300$ м/с, $P_0=2 \cdot 10^5$ Па, $\omega_0=150$ Гц. Здесь ω_0 – частота гармонических колебаний давления, P_0 – амплитуда этих колебаний. При этих параметрах $h/R_0=0.4$; $\lambda=0.00375$; $L/R_0=200$. К сожалению, в [14], [15] не указаны краевые условия для давления в явном виде, поэтому для тестирования положено

$$p(0,t) = P_0 \cos \omega_0 t; \quad p(L,t) = 0.$$

Расчеты перемещения стенки u в [15] проведены для стоячей волны давления с указанными параметрами P_0 , ω_0 . В [14], [15] давление в жидкости было известной функцией; в соответствующих математических моделях нет уравнения для нахождения давления.

Нами найдено численное решение с вышеуказанными параметрами. Фурье-анализ проведен в пакете программ Mathematica [16], его результаты для точки на расстоянии четверти длины L от начала координат даны на рис.4. Показаны амплитуды относительного давления и продольного перемещения стенки в зависимости от частоты. Здесь, в отличие от [15], давление, помимо основного пика 150 Гц на частоте вынужденных колебаний, имеет дополнительные максимумы, вызванные детальным расчетом динамики жидкости. Каждый этот максимум вызывает реакцию, прослеживаемую на графике для перемещения стенки. Как и в [15], на фурье-разложении для перемещения стенки есть пик на частоте 425 Гц, соответствующий собственным колебаниям трубы.

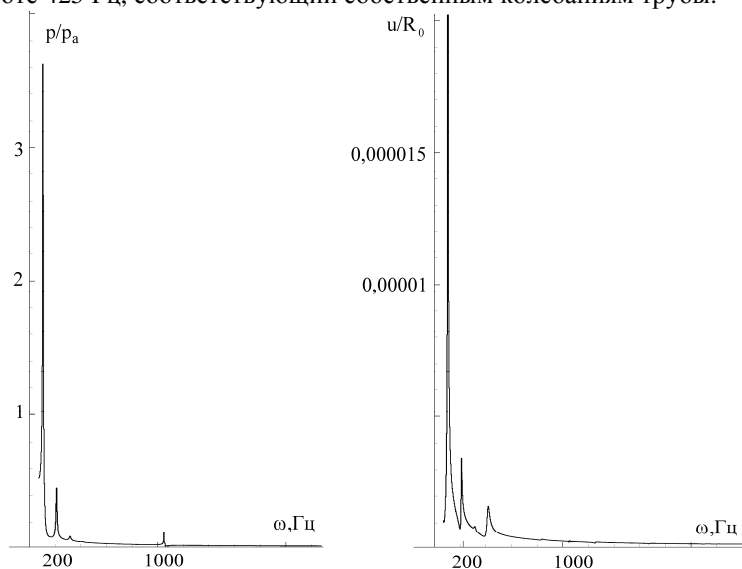


Рис.4. Амплитудный спектр колебаний при коленообразном изгибе трубы.

Таким образом, математическая модель (10)-(12) позволяет получить дополнительную информацию о колебательных процессах по сравнению с [15]. Но [15] не предполагает выполнения условий (6), соблюдение которых желательно для полной количественной адекватности исследуемой математической модели.

4.3. Гидравлический удар в сильно изогнутом трубопроводе. Реальные трубопроводы содержат, как правило, повороты трассы, например, в городских водопроводных сетях [17]. Поэтому задача о гидравлическом ударе при наличии такого поворота актуальна. Здесь сравниваются экспериментальные и численные результаты [18]-[20] с расчетом по исследуемой математической модели.

Рассмотрим эксперимент [18]. Здесь численно воспроизведены результаты двух экспериментов по схемам рис.5, соответствующим опытам В и Д [18]. Параметры трубопровода и потока: $L_1=12.27$ м, $L_2=7.65$ м, $L_3=3.08$ м, $R_0=13$ мм, $h=1.27$ мм, $\rho_0=20.6$ мм, $\rho_l = 8940$ кг/м³, $E = 117$ ГПа, $\nu = 0.34$, $\rho_{f0} = 998$ кг/м³. Время закрытия клапана $t_k \approx 4$ мс.

В [18] нет значения начальной скорости потока жидкости v_{0f} и скорости звука c_f . Оценки c_f для этих экспериментов и некоторые независимые численные результаты есть

в [19,20]. С другой стороны, зная перепад давления на клапане ΔP до прихода предвестника отраженной от первого колена волны, начальную скорость потока можно вычислить по формуле Жуковского [3]:

$$v_{0f} = \Delta P / \rho_f c_f,$$

ΔP есть в [18]. Итак, недостающие параметры: $c_f = 1257$ м/с, $v_{0f} = 1.1$ м/с.

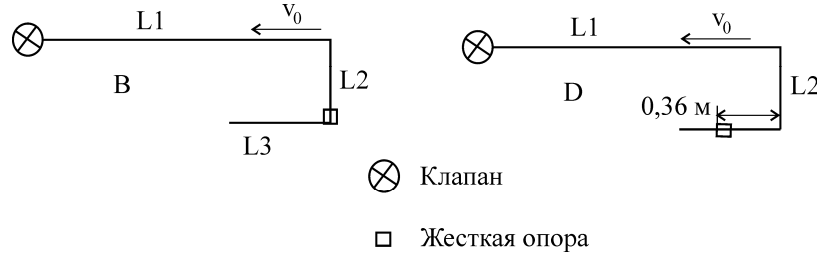


Рис.5. Схемы экспериментальных установок по гидравлическому удару в системе труб [18].

При таких параметрах $h/R_0 \approx 0.098$; $\lambda \approx 0.631$. Случай относительно сильного изгиба профиля трубы изучался в [21], эти результаты использованы для вычисления правой части $F(\tau, \zeta)$ в математической модели.

Найденные нами графики зависимости давления от времени вблизи клапана для случаев В, Д из [18] приведены на рис.6,7 соответственно. Точками отмечены значения давления в натуральных экспериментах [18]. Хорошее согласование численного и натурального эксперимента наблюдается до значения $t = 24$ мс в опыте В и $t = 28$ мс в опыте Д. Далее имеет место только качественное согласование. Заметим, что количественного соответствия можно добиться известной процедурой идентификации параметров математической модели.

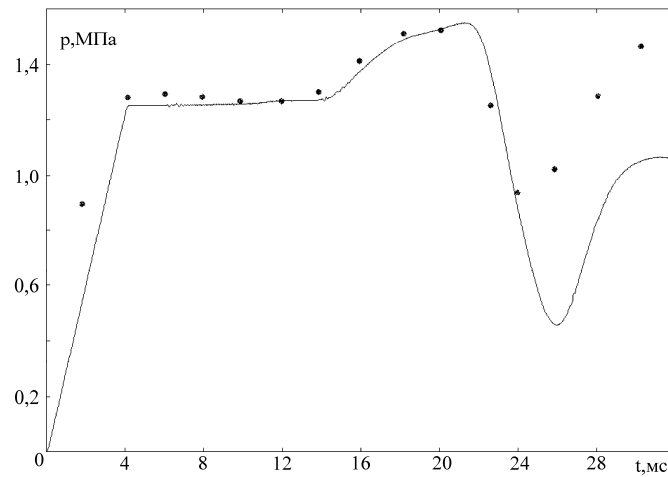


Рис.6. Расчетный график давления при схеме эксперимента В.

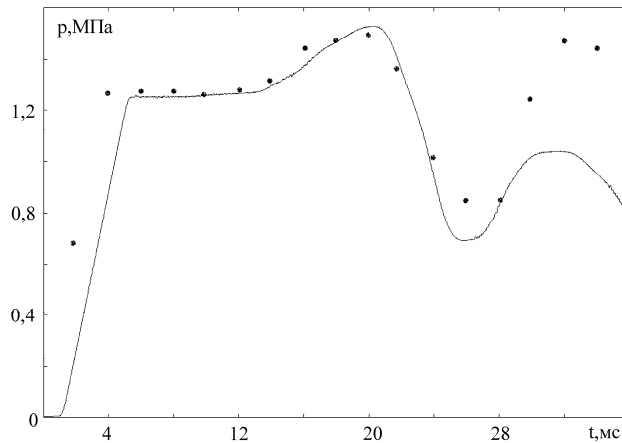


Рис.7. Расчетный график давления при схеме эксперимента D.

Аналогичные результаты получены при сравнении результатов вычислений по математическим моделям (10), [19], которые здесь не приводятся. В [19] клапан закрывался за время $t_k \approx 0.5$ с, на два порядка большее, чем в [18], что ведет к сглаживанию графика колебаний давления, не меняя его качественный вид.

4.4. Геометрические параметры реальных трубопроводных систем. В вышеперечисленных примерах условия (1), (6) не всегда выполнены. Это вызвано параметрами экспериментальных установок из доступной литературы [13], [18]-[20] и численного эксперимента [14], [15]. Параметры, встречающиеся на практике в технологиях морской добычи нефти, приведены в [22]. Согласно [22], геометрические параметры морского трубопровода/райзера: $L = 300$ м, $\rho_0 \approx 70$ м, $R_0 = 0.26$ м, $h = 0.03$ м. Эти параметры являются типовыми, если просмотреть сборники трудов конференций по морским технологиям ISOPE. Тогда для промышленных труб:

$$\lambda \approx 0.0037; \quad h/R_0 \approx 0.115; \quad \rho_0/D_0 \approx 135;$$

условие (1) удовлетворено точно, а условие (6) – технически точно.

Типовые параметры подземных трубопроводов и методы расчета рассмотрены в [23]. Минимальный расчетный диаметр стальных труб, встречающийся в примерах расчетов [23], равен $D_0 = 2R_0 = 0.5$ м. Остальные параметры имеют порядок: $L \approx 1000$ м, $\min \rho_0 \approx 50$ м, $h \approx 0.008$ м. Эти величины приведены для стальных труб. Тогда параметры (1), (6) равны:

$$\lambda = 0.005; \quad h/R_0 = 0.032; \quad \rho_0/D_0 = 100.$$

Условия (1), (6) для подземных трубопроводов выполнены точно.

Значит, исследуемая математическая модель применима к промышленным трубопроводам, которые не всегда возможно изучать экспериментально. Так, в [22] поставлен только численный эксперимент, который пока не был воспроизведен.

5. Заключение

Итак, результаты расчета по математической модели (10)-(12) согласованы с расчетными и экспериментальными данными других авторов. Количественно верные результаты могут быть получены при соблюдении условий (1), (6) и некоторых других, указанных в [4], [10].

В каждой из работ [13]-[15], [18], [19] была построена отдельная математическая модель движения и взаимодействия трубы и жидкости. Здесь показано, что математическая модель (10) описывает все рассмотренные случаи, а ее общая геометрия, аналогично работам [8], [9], [12], охватывает более широкий круг приложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. – М.: Наука, 1979, 320 с.
2. *Paidoussis M.P.* Fluid-structure interactions. Slender structures and axial flow. – San Diego, London: Academic Press, 1998, 574 p.
3. *Жуковский Н.Е.* О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. – М.-Л.: Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1949, 104 с.
4. *Рукавишников В.А., Ткаченко О.П.* Численное и асимптотическое решение уравнений распространения гидроупругих колебаний в изогнутом трубопроводе // Прикладная механика и техническая физика, 2000, т.41, №6, с.161-169.
5. *Рукавишников В.А., Ткаченко О.П.* Нелинейные уравнения движения растяжимого подземного трубопровода: вывод и численное исследование // Прикладная механика и техническая физика, 2003, т.44, №4, с. 144-150.
6. *Рукавишников В.А., Ткаченко О.П.* Об уравнении Кортевега-де Вриза в цилиндрическом трубопроводе // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2008, т.48, № 1, с.146-153.
7. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды: В 2 т. - Т. 1. – СПб.: Лань, 2004, 528 с.
8. *Власов В.З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике // *Власов В.З.* Избранные труды, т.1. – М.: Издательство АН СССР, 1962, с.15-439.
9. *Sasic R., Sasic S.* A new approach to the velocity field investigation in case of the entry flow in curved pipes with circular cross section // Acta Mechanica, Springer-Verlag, 2000, v.140, p.103-117.
10. *Ткаченко О.П.* Математическая модель распространения волны давления в потоке жидкости внутри изогнутого подземного трубопровода // Вычислительные технологии, 1996, т.1, №3, с.78-86.
11. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003, 840 с.
12. *Goto S.-I.* Amplitude equations for a linear wave equation in a weakly curved pipe // [arXiv:0910.0549v1](http://arxiv.org/abs/0910.0549v1) [nlin.PS], 2009, <http://arxiv.org/abs/0910.0549v1>
13. *Kulikov Yu.A., Loskutov Yu.V., Maksimov M.A., Zdanovich Yu.K.* Numerical-experimental investigation of the elastic deformation of a polymeric pipeline under impact // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2001, v.42, №2, p.294-299.
14. *Макарьянц Г.М., Прокофьев А.Б., Шахматов Е.В.* Моделирование виброакустических характеристик трубопровода с использованием метода конечных элементов // Известия Самарского научного центра РАН. Механика и машиностроение, 2002, т.4, №2, с.327-333.
15. *Миронова Т.Б., Прокофьев А.Б., Шахматов Е.В.* Разработка конечноэлементной модели виброакустических процессов в трубопроводе с пульсирующим потоком рабочей жидкости // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. Авиационная и ракетно-космическая техника, 2008, №3, с.157-162.

16. Дьяконов В.П. *Mathematica 4: Учеб. курс.* – СПб.: Питер, 2001, 656 с.
17. Kwon H.J. Computer Simulations of Transient Flow in a Real City Water Distribution System // *KSCE Journal of Civil Engineering*, 2007, p.43-49.
18. Wiggert D.C., Otwell R.S., Hatfield F.J. The Effect of Elbow Restraint of Pressure Transients // *Journal of Fluids Engineering*, 1985, v.107, p.402-406.
19. Tijsseling A.S., Lavooij C.S.W. Waterhammer with fluid-structure interaction // *Applied Scientific Research*, 1990, v.47, p.273-285.
20. Lavooij C.S.W., Tijsseling A.S. Fluid-structure interaction in liquid-filled piping systems // *Journal of Fluids and Structures*, 1991, v.5, №5, p.573-595.
21. Ткаченко О.П. К теории распространения волн давления в длинной изогнутой трубе // *Методы численного анализа.* - Владивосток: Дальнаука, 1993, с.91-112.
22. Athisakul Ch., Monprapussorn T., Pulngern T., Chucheeesakul S. The Effect of Axial Extensibility on Three-Dimensional Behavior of Tensioned Pipes/Risers Transporting Fluid // *Proceedings of the Eighth (2008) ISOPE Pacific/Asia Offshore Mechanics Symposium.* – Bangkok, Thailand: The International Society of Offshore and Polar Engineers, 2008, p.97-104.
23. Клейн Г.К. *Расчет подземных трубопроводов.* – М.: Стройиздат, 1969, 240 с.

Поступила в редакцию 28.06.10