

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. В. Брушлинский, В. В. Савельев, Магнитные ловушки для удержания плазмы, *Матем. моделирование*, 1999, том 11, номер 5, 3–36

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.15.71.146

10 января 2025 г., 14:19:26



## МАГНИТНЫЕ ЛОВУШКИ ДЛЯ УДЕРЖАНИЯ ПЛАЗМЫ

© *К.В.Брушлинский, В.В.Савельев*

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований  
(грант N 97-01-00384)

Математическое моделирование - постоянная существенная часть разработок магнитных ловушек, ориентированных на управляемый термоядерный синтез. Математический аппарат моделирования использует средства вычислительной магнитной газодинамики. В обзоре представлены постановки задач о формировании магнитоплазменных конфигураций в ловушках и их геометрических и физических свойствах в состоянии равновесия. Рассмотрены методы решения задач, даны типичные примеры результатов расчетов, указано их место в моделировании ловушек. Основное внимание уделено двумерным задачам в соответствии с распространенными типами симметрии плазменных установок.

## MAGNETIC TRAPS FOR PLASMA CONFINEMENT

*K. V. Brushlinsky, V. V. Savelyev*

Mathematical modeling is a permanent and essential part of magnetic trap elaboration destined for the controlled nuclear fusion. Mathematical means of modeling are based on the computational magnetohydrodynamics. This review presents statements of problems on the formation of magnetoplasma configurations in traps and their geometric and physical properties in equilibrium. We consider methods of problem solving, give typical examples of computation results, point out their place in trap modeling. Most attention is concentrated on two-dimensional problems related to common types of plasma device symmetry.

## Содержание

### Введение

1. МГД-модель плазмы.
2. Двумерные МГД-течения плазмы в поперечном собственном магнитном поле.
3. Двумерные МГД-течения плазмы в плоскости магнитного поля.
4. Двумерные течения плазмы в трехкомпонентном поле. МГД-обтекание.
5. Двумерные модели плазмостатики. Уравнение Грэда-Шафранова.
6. О единственности и устойчивости решения задач с уравнением Грэда-Шафранова.
7. Плоские задачи МГД-равновесия. Аналитические методы и точные решения.

8. Негидродинамические модели.

9. О численных методах.

## Введение

Программа управляемого термоядерного синтеза (УТС) привлекает к себе широкое внимание науки и общества своими заманчивыми перспективами. Для ее реализации требуется нагреть относительно плотную плазму до очень высоких температур и, удержав ее в этом состоянии некоторое время, необходимое для того, чтобы реакции синтеза, во-первых, имели место и, во-вторых, выделили тепловую энергию в количестве большем, чем затрачено на создание соответствующих условий. Роль удерживающего "термостойкого сосуда" после основополагающей работы И.Е. Тамма и А.Д. Сахарова [1] отводится магнитному полю. Отсюда – постоянный интерес к магнитным ловушкам, т.е. техническим устройствам, в которых формируются самоподдерживающиеся конфигурации плазмы и магнитного поля, способные существовать в состоянии равновесия в течение какого-то времени, достаточно длительного по масштабам плазменных процессов.

Одной из первых и самых простых попыток реализовать идею магнитного удержания является Z-пинч – плазменный шнур между двух электродов на торцах, ток в котором создаст азимутальное магнитное поле, призванное сжимать и удерживать плазму [2-9]<sup>1</sup>. Роль Z-пинча как основополагающей идеи более поздних и совершенных разработок или их конструктивных и методических элементов по сей день весьма значительна. Развитием идеи пинча являются замкнутые тороидальные установки. Тот же шнур, изогнутый в тор, избавлен от прямого контакта горячей плазмы с электродами. А хорошо изученные неустойчивости пинча [10-12] преодолеваются усложнением структуры магнитного поля с помощью дополнительных внешних токов, окружающих тор. Широкую известность имеют тороидальные установки токамак и стелларатор (см. например, [10-13]): в первом из них электрический ток протекает главным образом по плазме (как в Z-пинче), и потому собственное магнитное поле этого тока наиболее существенно, а во втором – поле определяется, в основном, внешними проводниками. В настоящее время представляют интерес, и разрабатываются магнитные ловушки – "Галатеи", предложенные А.И. Морозовым [14]. Они характеризуются тем, что токнесущие проводники погружены в плазменный объем. В результате расширяются возможности геометрии магнитного поля и множество допустимых ловушек, повышаются ожидаемые параметры удержания. Обзор исследований в области галатей содержится в [15], примеры ловушек этого класса и их математических моделей приведены ниже.

Программа УТС, в частности, разработка и исследование магнитных ловушек, определили основное содержание физики плазмы второй половины XX века и ее современный уровень. Наряду с теоретическими и экспериментальными исследованиями существенный вклад в эту область науки внесли математическим моделированием. Оно ускорило развитие и понимание теоретических вопросов, облегчило и сэкономило работы на сложных, громоздких и дорогостоящих экспериментальных установках. Численные эксперименты часто и с возрастающей степенью надежности заменяют натурные. Вычислительная физика плазмы – незаменимая часть фундаментальной науки, приложения которой выходят за пределы обсуждаемых вопросов, например, часто встречаются в задачах астрофизики.

В исследованиях магнитной ловушки следует выделить стадию формирования в ней равновесной конфигурации в процессе течения плазмы под влиянием специально созданных

---

<sup>1</sup> Не ставя перед собой задачу дать обзор многочисленной литературы, упоминаем лишь несколько работ, интересных с точки зрения обсуждаемых вопросов математического моделирования. Содержательная библиография имеется, например, в недавно вышедшей монографии [9].

условий, отталкиваясь от какого-то естественного начального состояния, а затем рассмотреть геометрические и физические свойства полученной конфигурации. Математическое моделирование обеих стадий строится в основном на языке механики сплошной среды, исходя из того, что они имеют дело с достаточно плотной горячей плазмой. Основной аппарат моделирования – уравнения магнитной газодинамики (МГД). Возникающие задачи решаются численно с применением ЭВМ. Численные модели течений плазмы и соответствующие методы расчетов составляют распространенную область науки – вычислительную плазмодинамику. Задачи о равновесии относятся к вычислительной плазмостатике.

Конструкция плазменных установок или их элементов во многих случаях обладает симметрией (плоской, осевой, винтовой) или допускает симметрию в некотором приближении. Поэтому особую роль в исследовании ловушек играют двумерные модели течений или равновесных конфигураций плазмы. Это обстоятельство во многом упрощает постановку и решение задач. В настоящей статье выделены два типичных класса двумерных задач о течении плазмы – в поперечном собственном магнитном поле и в плоскости поля, как собственного, так и внешнего. К первому классу относится модель Z-пинча, второй представлен расчетом динамики образования ловушки “Галатея–пояс”. Приведен также пример задачи о двумерном течении с полем обеих ориентаций – МГД-обобщение известной в аэродинамике задачи обтекания: сверхзвуковой поток плазмы взаимодействует с магнитным полем заданных проводников с током.

Особенность двумерных задач плазмостатики в том, что их математический аппарат сводится к одному скалярному уравнению второго порядка эллиптического типа с нелинейной правой частью – уравнению Грэда-Шафранова [16,17,10-13]. Краевые задачи с этим уравнением могут иметь неединственные и в некотором смысле неустойчивые решения, что связано со спектральными свойствами дифференциального оператора линеаризованного уравнения. Это обстоятельство объединяет задачи плазмостатики с математическими моделями процессов в теории горения, электрохимии, химической кинетики. Пример численного решения задачи указанного типа относится к расчету равновесной конфигурации в плазменном цилиндре с погруженными в него винтовыми проводниками – распрявленным варианте ловушки “Стелларатор-галатея”. Исследованы свойства конфигурации и подтверждена перспективность концепции галатей.

В частном случае плоских задач о равновесии плазмы в магнитном поле прямолинейных проводников точные решения (“фигуры равновесия”) могут быть найдены изящными методами теории функций комплексного переменного и конформных отображений. Эти методы развиты в теории струй идеальной жидкости, математический аппарат которой тот же, что в плазмостатике [16].

Некоторые вопросы моделирования магнитных ловушек требуют выхода за пределы МГД. В связи с этим созданы гибридные модели, включающие в себя кинетическое уравнение для функции распределения ионов и гидродинамическое описание электронов. Ниже указаны примеры таких моделей и их реализации.

Наконец, в статье дан краткий обзор используемых численных методов. Речь идет в основном о развитии и обобщении разностных схем, известных в вычислительной аэродинамике, и их реализации в расчетах МГД-задач, а также об особенностях итерационных методов решения разностных аналогов уравнения Грэда-Шафранова.

## 1. МГД-модель плазмы

Течение плотной плазмы описывается уравнениями магнитной газодинамики

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0;$$

$$\rho \frac{dv}{dt} + \nabla p = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} + \nabla \cdot \Pi; \quad (1.b)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + p \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\chi \nabla T) + \sum_{i,k} \Pi_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{1}{\sigma} j^2 - Q; \quad (1.c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) - \nabla \times \left( \frac{c \mathbf{j}}{\sigma} \right), \quad (1.d)$$

где

$$p = 2knT = (\gamma - 1)\rho\varepsilon; \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{H};$$

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \times \nabla.$$

Уравнения (1) в стандартных обозначениях рассматривают плазму как сплошную среду, состоящую из ионов и электронов с единичными макропараметрами (“одножидкостная модель”). Они учитывают диссипативные процессы – вязкость  $\Pi$ , теплопроводность  $\chi$  в традиционной для гидродинамики форме и конечную проводимость  $\sigma(T)$ . Эта общепринятая модель занимает “промежуточное” место в целой иерархии моделей плотной плазмы (см. например, [10, 19]). На верхней ступени этой иерархии находится наиболее полная “двухжидкостная” модель с разными гидродинамическими уравнениями для ионов и электронов и неизотропными (зависящими от ориентации по отношению к магнитному полю) коэффициентами диссипации [18]. На нижней ступени – простейшая “идеальная” МГД-модель, пренебрегающая всеми диссипативными эффектами ( $\Pi \equiv 0, \chi \equiv 0, \sigma = \infty, Q \equiv 0$ ) в (1). Известен опыт моделирования плазмы более сложными, чем (1), уравнениями, например, с учетом двух температур [3, 9] или двух скоростей (эффект Холла) [8, 19, 20].

В обсуждаемых исследованиях магнитных ловушек достаточно ограничиться уравнениями (1), более того – значительная часть работ пренебрегает вязкостью и теплопроводностью. Чаще других учитывается только конечная проводимость. В отсутствие теплопроводности она может спровоцировать неоправданно сильный джоулев нагрев  $j^2/\sigma$ , и, чтобы его нейтрализовать или смягчить, в уравнение (1-с) введено слагаемое  $Q(\rho, T)$ , соответствующее объемному излучению в какой-то форме.

Постановка и решение конкретной задачи о МГД-течении включает в себя кроме уравнений (1), геометрическую область, отвечающую форме ловушки, выбор системы пространственных координат, начальные и граничные условия и, наконец, численный метод решения. В общем случае нестационарные трехмерные задачи содержат восемь (поскольку (1-b, d) – векторные) уравнений. Однако в силу распространенных традиций симметрии часто можно иметь дело с двумерными задачами и определенной ориентацией векторов скорости и магнитного поля, что заметно упрощает задачу. Ниже рассмотрены типичные классы таких задач и особенности их математического аппарата на конкретных примерах моделирования ловушек.

## 2. Двумерные МГД-течения плазмы в поперечном собственном магнитном поле

Представителем этого класса является в первую очередь динамика плазмы при сжатии упомянутого выше Z-пинча. Плазменный цилиндр с продольным током и азимутальным магнитным полем этого тока можно считать осесимметричным и игнорировать вращение и полоидальное магнитное поле в нем. В цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0; \quad V_\varphi \equiv 0; \quad H_r \equiv H_z \equiv 0,$$

и МГД-уравнения (1) имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho V_r r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z) = 0; \quad (2a)$$

$$\rho \frac{dV_r}{dt} + \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{H}{r} \frac{\partial (Hr)}{\partial r} = (\nabla \cdot \Pi)_r, \quad (2b)$$

$$\rho \frac{dV_z}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} + H \frac{\partial H}{\partial z} = (\nabla \cdot \Pi)_z, \quad (2c)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + p \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\chi \nabla T) + \nu j^2 - Q + \Pi_{rr} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \Pi_{rz} \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \Pi_{zz} \frac{\partial V_z}{\partial z} + \Pi_{\varphi\varphi} \frac{V_r}{r}, \quad (2d)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H V_r}{\partial r} + \frac{\partial H V_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \nu \frac{\partial H r}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial H}{\partial z} \right), \quad (2e)$$

где

$$p = \frac{\beta}{2} \rho T = (\gamma - 1) \rho \varepsilon; \quad H = H_\varphi;$$

$$\mathbf{j} = \left( -\frac{\partial H}{\partial z}, \frac{1}{r} \frac{\partial H r}{\partial r}, 0 \right),$$

а компоненты  $\Pi_{ik}$  тензора вязкости приведены, например, в [4,9]. Уравнения (2) написаны в безразмерной форме, т.е. за единицы измерения всех величин приняты их характерные значения. В данном случае это, например, радиус цилиндра  $R$ , значения плотности  $\rho_0$  и температуры  $T_0$  в начальный момент времени, характерная величина магнитного поля  $H_u$  (или связанный с ней полный ток в пинче). Из них образуются все остальные единицы измерения:

$$\rho_u = \frac{H_u^2}{4\pi}; \quad \varepsilon_u = V_u^2 = \frac{H_u^2}{4\pi\rho_0}; \quad t_u = \frac{R}{V_u}; \quad j_u = \frac{cH_u}{4\pi R}.$$

В результате вся "размерная" природа задачи присутствует в уравнениях только в составе безразмерных параметра  $\beta$  - отношения характерных газового и магнитного давлений и диссипативных коэффициентов:

$$\beta = \frac{8\pi\rho_0}{H_u^2}, \quad \nu = \frac{c^2}{4\pi\sigma R V_u},$$

где  $p = 2kn_0T_0$  - начальное давление, а выражения  $\chi$ ,  $\Pi_{ik}$  и  $Q$  отнесены к соответствующим единицам.

Смешанная (начально - краевая) задача с уравнениями (2) ставится в цилиндре:  $0 < r < 1$ ,  $0 < z < Z$ . Начальные условия при  $t=0$  описывают состояние покоя:  $\rho=1$ ,  $T=1$ ,  $\mathbf{v}=0$ ,  $H=0$ .

Граничные условия на внешней границе  $r=1$  должны соответствовать непротеканию  $V_r=0$  при  $\Pi \equiv 0$  или прилипанию  $V_r=V_z=0$  при  $\Pi \neq 0$  и отсутствию теплового потока  $\partial T / \partial r = 0$  при  $\chi \neq 0$ . Они же инициируют сжатие плазмы к центру оси, для чего на границе

задается плотность тока  $j_z$  (модель приложенного электрического поля) или магнитное поле  $H(1, t)$ , соответствующее заданию полного тока в пинче, например, его экспериментальной осциллограмме. В некоторых работах рассматривается пинч, включенный в электрическую цепь питания через электроды: при этом полный ток определяется обыкновенным дифференциальным уравнением цепи, которое решается одновременно с расчетом пинча.

На оси цилиндра  $r=0$  требуется регулярность решения, а на торцах обычно ставятся условия симметрии, чтобы избежать неестественных пограничных слоев<sup>2</sup>.

Постановка задачи в буквально изложенном виде по существу одномерна – в ней нет зависимости от  $z$ . Основной интерес в исследовании пинча представляют двумерные эффекты, так как хорошо известно, что плазменная конфигурация в нем неустойчива относительно “перетяжек”. Чтобы сделать модель двумерной, достаточно инициировать перетяжку в начальных и граничных условиях. Начальное состояние покоя относится к части цилиндра  $0 < r < r_1(z, 0)$ , вне которой – вакуум. Граница  $r_1(z, t)$  движется со временем к центру. Полному току соответствует заданное значение  $r_1 H$  на этой границе.

Тем не менее решению двумерной задачи предшествовали ряд одномерных исследований. Первая работа на эту тему опубликована С.И.Брагинским, И.М.Гельфандом и Р.П. Федоренко в 1958 г. [2]. В расчетах получен нестационарный режим сжатия пинча, включенного в электрическую цепь. Результаты способствовали анализу имеющихся тогда экспериментальных данных. Серия зарубежных работ, выполненных в начале 60-х годов, отражена в обзоре [5]. Одномерная задача о Z-пинче в двухтемпературной модели поставлена и решена в [3]. Анализ всех результатов и их сопоставление с экспериментом подтвердили вывод об ограниченности возможностей одномерных моделей.

Двумерная модель Z-пинча в МГД приближении (2) предложена и реализована В.Ф. Дьяченко и В.С. Импеником [4]. Постановка задачи изложена выше. Разновидность той же модели рассмотрена К.В.Робертсом и Д.Е. Поттером [5]. Отличие в геометрии: сжатие плазмы происходит на оси коаксиального канала импульсного ускорителя (“плазменной пушки”). Результаты расчетов действительно продемонстрировали “перетяжку”: плазма, сильно нагреваясь, сжимается к оси в области малого размера, из которой она вытекает в осевом направлении. Возникает тенденция к разрыву шнура в этой области, что однако противоречит экспериментальным данным: эта область (плазменный фокус) устойчиво существует без разрыва. Снять противоречие можно, предположив, что к заключительной стадии сжатия в области с малым характерным размером неприменима МГД-модель. В связи с этим разработана негидродинамическая гибридная модель плазмы, которая описывает ионы в кинетическом приближении, а электроны – как сплошную среду [6, 9]. В расчетах удалось остановить процесс неограниченного сжатия и завершить исследование плазменного фокуса в качественном согласии с экспериментом.

Обе модели почувствовали в расчетах волнообразный характер внешней границы, отделяющей плазменный шнур от вакуума, что свидетельствует о неустойчивости этой границы. Теоретический анализ неустойчивости дан в [4,9], а в расчетах она наиболее заметна в недавней работе [7], где в уравнениях (2) отброшены все диссипативные слагаемые, а численное решение использует современные методы (см. ниже).

Двумерные течения плазмы в поперечном поле – простейшая разновидность МГД-задач: они ближе всего к обычной газодинамике. Уравнение (2-d) при  $v \equiv 0$  того же типа, что уравнение непрерывности (2-a), откуда следует известная формулировка о “вмороженности” плазмы в магнитное поле. В уравнениях (2-b,c) поле фактически не вносит принципиальных

<sup>2</sup> приэлектродные явления в Z-пинче специально рассмотрены в модифицированной МГД-модели с учетом эффекта Холла [8].

изменений, ограничиваясь добавочным “давлением”  $H^2/2$ . Рассмотренная модель широко применяется в разных задачах. В частности, упомянутый расчет Z-пинча в коаксиальном канале [5] внешне аналогичен исследованиям течений в плазменных ускорителях, где обеспечивается трансзвуковое ускорение в каналах типа сошла между двумя коаксиальными электродами [19, 20]. Отличие от Z-пинча в том, что здесь рассматриваются стационарные течения, но в то же время расчеты ведутся методом установления в нестационарной, как и выше, постановке задачи.

### 3. Двумерные МГД-течения плазмы в плоскости магнитного поля

В этом классе задач МГД-модель может включать в себя помимо магнитного поля, индуцируемого током в плазме, также и внешнее поле заданных проводников. Общие вопросы моделирования рассмотрим для простоты в случае плоской симметрии в декартовых координатах:

$$\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0; \quad V_z \equiv 0; \quad H_z \equiv 0.$$

В двумерных задачах вместо магнитного поля  $\mathbf{H} = (H_x, H_y, 0)$  удобно ввести векторный потенциал  $\Psi = (0, 0, \psi)$ . Его единственная нетривиальная компонента – скалярная функция  $\psi$ , связанная с электродинамическими переменными следующим образом:

$$\mathbf{H} = \nabla \times \Psi = \left( \frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}, 0 \right);$$

$$\mathbf{j} = (0, 0, -\Delta \psi); \quad \mathbf{E} = (0, 0, -\frac{\partial \psi}{\partial t}).$$

Линии уровня  $\psi(x, y) = \text{const}$  являются силовыми линиями магнитного поля, точнее, цилиндрическими магнитными поверхностями в пространстве. Уравнения МГД (1) в безразмерных, как и выше, переменных, имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0;$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = -\Delta \psi \cdot \nabla \psi + \nabla \cdot \Pi; \quad (3)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + p \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\chi \nabla T) + \sum_{i,k} \Pi_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + v(\Delta \psi)^2 - Q;$$

$$\frac{d\psi}{dt} = v \Delta \psi,$$

где векторы и символы двумерны.

В терминах уравнений (3) без вязкости ( $\Pi \equiv 0$ ) решена задача о формировании нейтрального токового слоя в окрестности нулевой линии магнитного поля [21]. Она описывает процесс пересоединения магнитных силовых линий и играет существенную роль в моделировании механизма солнечных вспышек и в задачах о строении магнитосферы Земли. Рассмотренная конфигурация тока и магнитного поля является также элементом термоядерных устройств (токамака, Z-пинча).

Примером современных исследований того же класса течений служат работы по моделированию образования плазменной конфигурации в тороидальной магнитной ловушке

“Галатей-Пояс” [22]. Упрощенный распрямленный вариант ее реализован экспериментально<sup>3</sup>. Ему же соответствует двумерная (плоская) МГД-модель [23-25]. Рассматривается плазменный цилиндр внутри которого расположены два прямых проводника с токами, равными по величине и направлению. Приложенное продольное электрическое поле создает ток в плазме, взаимодействие которого с магнитным полем проводников сгребает плазму к оси цилиндра, где формируется исследуемая равновесная конфигурация. Задача о динамике ее образования ставится в плоской области сечения цилиндра (квадратной – лишь для удобства расчетов в декартовых координатах)

$$|x| < 2, \quad |y| < 2. \quad (4)$$

Внутри области находятся две территории конечных размеров, соответствующих проводникам круглой, например,

$$(x \pm 1) + y^2 < r_c^2 \quad (5)$$

или квадратной формы. Течение плазмы вне проводников (5) описывается МГД-уравнениями (3), причем на данном этапе исследований не учтены вязкость и теплопроводность ( $\Pi \equiv 0, \chi \equiv 0$ ). Внутри проводников (5) рассчитывается лишь магнитное поле с помощью уравнения Максвелла

$$\Delta \psi = -j^{ex}(x, y), \quad (6)$$

где  $j^{ex}$  - плотность заданного в проводнике тока. На границе областей (5) требуется

$$v_n = 0, \quad [\psi] = 0,$$

что соответствует непротеканию плазмы и непрерывности нормальной компоненты поля  $H_n$ . Внешняя граница области (4) непроницаема для плазмы и магнитного поля, и на ней задано электрическое поле  $E$ , откуда следуют граничные условия:

$$v_n = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -E.$$

В начальный момент времени плазма покоится ( $\rho = 1, T = 1, v = 0$ ), а магнитное поле определяется функцией  $\psi(0, x, y)$  – решением краевой задачи с уравнением (6) в области (4), где  $j^{ex} = 0$  вне (5), и условием  $\psi = 0$  на внешней границе. Задачу достаточно рассматривать лишь в одном квадранте  $0 < x, y < 2$ , дополнив ее очевидными условиями симметрии на осях.

В изложенной постановке она решена численно в [24].

Неудобным моментом этой постановки задачи является многосвязная плазменная область, т.е. наличие в ней “лакув” (5). Его можно обойти, реализовав идею “сквозного счета” в односвязной области (4). Проводники (5) – как правило, небольшого диаметра, и их влияние на гидродинамику, по-видимому, незначительно по сравнению с ролью электрического тока и порожденного им внешнего магнитного поля. Поэтому их функцию выполняют “прозрачные” для плазмы области (5), в которых задана плотность внешнего тока  $j^{ex}(x, y)$ . Чтобы придать такой модели физический смысл, достаточно представить себе сторонний ток  $j^{ex}$ , например, в виде пучка заряженных частиц. При желании подчеркнуть материальную природу проводников можно ввести в область (5) искусственную “силу трения”  $f = -kv$ , противодействующую движению плазмы. Уравнение Максвелла

<sup>3</sup> Библиографию экспериментальных работ по теме “Галатей” см. в обзоре [15].

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H} = -\Delta \psi$$

содержит теперь суммарный ток  $\mathbf{j} = \mathbf{j}^{pl} + \mathbf{j}^{ex}$ , а закон Ома

$$\mathbf{E} = v \mathbf{j}^{pl} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}$$

и уравнения МГД – только плазменный ток

$$j^{pl} = -(\Delta \psi + j^{ex}).$$

Уравнения (3) (без вязкости и теплопроводности) принимают вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = -(\Delta \psi + j^{ex}) \nabla \psi - k \mathbf{v},$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + p \nabla \cdot \mathbf{v} = v (\Delta \psi + j^{ex})^2, \quad (7)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = v (\Delta \psi + j^{ex}).$$

При этом  $j^{ex}(x, y)$  и коэффициент  $k$  отличны от нуля только в областях (5).

Достоинство этого варианта модели в единообразной логике расчетов во всей области (4). Результаты расчетов, очевидно, не представляют интереса внутри (5), однако есть основания полагать, что вне проводников модель адекватно описывает процессы. Большой адекватности можно добиться, варьируя некоторые детали модели. При возрастании коэффициента  $k$  усиливается торможение, а предельный переход  $k \rightarrow \infty$  означает, что  $\mathbf{v} \rightarrow 0$  в областях (5). Кроме того, чтобы магнитное поле обтекало проводники, следует уменьшить его диффузию в областях (5) и задать в них магнитную вязкость  $v$ , меньшую, чем в плазме. Наконец, нужно разумно выбрать поперечный размер проводников  $r_c$ .

Задача о “Поясе” имеет еще одну особенность, которая заслуживает внимание при моделировании ловушек-галатей. В ней переплетаются элементы эйлеровой и лагранжевой постановок. Течение фиксированной массы плазмы в сторону оси цилиндра соответствует лагранжевой логике, а наличие неподвижных проводников – принципиально эйлеров элемент задачи, так как их обтекание плазмой привело бы к сильной деформации лагранжевой расчетной сетки. Расчет задачи в эйлеровых координатах сталкивается с тем, что в процессе сгребания плазмы к центру плотность на периферии стремится к нулю. Гидродинамическая модель теряет смысл в этой почти вакуумной области, а на территории, занимаемой плазмой, остается все меньше расчетных точек. В [23] предложено моделировать вакуум, “замораживая” в нем плотность на фиксированном низком уровне  $\rho = \rho_{\min}$ , если ее значение в расчетах окажется ниже этого уровня. Вакууму приписывается также низкая температура, и магнитное поле, изменяющееся по закону  $\partial \psi / \partial t = -E$ . Когда точек в вакууме становится достаточно много, они полностью исключаются из расчета, а в оставшейся области сетка измельчается. Этот элемент модели отработан в одномерной задаче о сжатии плазмы вокруг одного проводника [26]. Здесь расчеты тестированы на точном решении задачи о равновесии, которое существует при  $v = \text{const}$ . Двумерным тестом послужила плоская задача о Z-пинче с заданным

на границе электрическим полем, поскольку "Пояс" превращается в пинч<sup>4</sup> в отсутствие проводников ( $r_c = 0, j^{ex} = 0, k = 0$ ) [23]. Тесты подтвердили непротиворечивость и работоспособность изложенной модели.

Расчеты показали, что после относительно быстрой стадии эволюции устанавливается квазистационарный режим искомой конфигурации. Начальное распределение магнитного поля дано на рис. 1, а полученная конфигурация представлена на рис. 2 а,б,с полем (линии  $\psi(x, y) = \text{const}$ ) и изолиниями давления  $p$  и плотности тока  $j$  соответственно [23].

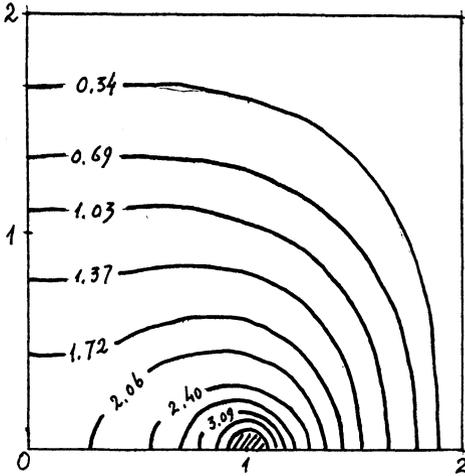


Рис.1. Начальное магнитное поле в плоской модели "Галатеи-пояса".

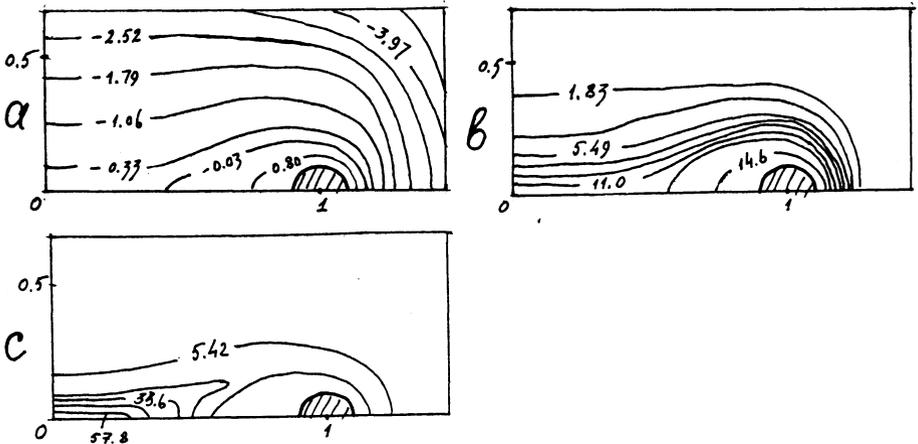


Рис.2. Квазистационарная стадия "Галатеи-пояса". Магнитное поле (а), изолинии давления (б) и плотности тока (с) в плазме.

В работе [24] имеются результаты расчетов с двумя разными направлениями приложенного электрического поля – совпадающим с током в проводниках и противоположным ему. Там же иллюстрируется процесс отжатия плазмы от проводников в нестационарной за-

<sup>4</sup> В то же время при наличии проводников это принципиально разные задачи ввиду разной геометрии магнитного поля.

даче в возрастающим со временем током  $j^{ex}$ . Совокупность всех изложенных результатов позволяет получить качественное представление о начальной стадии формирования конфигурации "Пояс".

В заключение обратим внимание на то, что замена двух компонент поля  $H_x, H_y$  функцией магнитного потока  $\psi$  в уравнениях (3), (7) автоматически обеспечивает выполнение уравнения Максвелла  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$  и имеет некоторые преимущества в расчете плазменного тока  $j^{pl}$ . Однако при этом теряется свойство дивергентности в консервативной форме записи уравнений движения и индукции магнитного поля. Наоборот, записывая МГД-уравнения в терминах  $H_x, H_y$ , мы допускаем дивергентные разностные схемы, но лишаемся преимуществ "экономии" числа уравнений и должны специально контролировать расчет  $j^{pl}$ . Эта запись уравнений также позволяет моделировать проводники сторонними токами  $j^{ex}$ . С ним можно связывать внешнее магнитное поле  $\mathbf{H}^{ex} : \nabla \times \mathbf{H}^{ex} = \mathbf{j}^{ex}$ , которое инициировал бы сторонний ток в вакууме. В МГД-уравнениях участвует плазменный ток  $\mathbf{j}^{pl} = \nabla \times \mathbf{H}$  и суммарное магнитное поле  $\mathbf{H} + \mathbf{H}^{ex}$ .

Решение конкретных задач о двумерных течениях плазмы в плоскости поля использует как ту, так и другую разновидность уравнений.

#### 4. Двумерные течения плазмы в трехкомпонентном поле. МГД-обтекание

Пример течения плазмы, в котором совмещаются признаки обоих рассмотренных выше классов задач – динамика сверхзвукового плазменного потока в магнитном поле токового кольца. Если поток обладает осевой симметрией, а плоскость кольца с центром на оси ортогональна потоку, то картина течения также осесимметрична. Постановка задачи возникла в связи с перспективами применения мощной плазменной струи, генерируемой квазистационарным сильноточным плазменным ускорителем (КСПУ) [20]. Одна из возможностей – инжекция плазменных потоков в магнитные ловушки. Взаимодействие струи с кольцевым током – существенный элемент формирования плазменной конфигурации в ловушках типа пробкотрона, антипробкотрона, "Галатея-А" [15]. Цикл расчетов в задачах упомянутого типа выполнен в [27-29]. Помимо кольца в них подробно изучен распрямленный вариант задачи – течение плоского потока плазмы в поле дипольного типа, т.е. двух прямолинейных токов противоположного направления.

Эти работы интересны не только с точки зрения ловушек. Они ставят и решают более общие вопросы взаимодействия потоков плазмы с ограниченными магнитными полями, которые возникают при обтекании различных установок и систем, а также космических объектов (комет, планет).

Рассматривается течение плазмы в цилиндрической области

$$0 < r < r_M, \quad 0 < z < z_M, \quad (8)$$

внутри которой расположен кольцевой проводник

$$(r - r_0)^2 + (z - z_0)^2 < r_c^2 \quad (9)$$

с током. Со стороны торца в цилиндр втекает плазма с заданными плотностью и температурой, а также собственным азимутальным магнитным полем  $H_{\phi 0}$ . Скорость втекания – сверхзвуковая:  $V_z > c^+$ , где  $c^+$  – скорость быстрой магнитозвуковой волны [11]. Цилиндр окружен непроницаемым и идеально проводящим кожухом.

Задача о течении осесимметрична, но все компоненты векторов скорости и поля отличны от нуля: неоднородность азимутального поля  $H_\varphi$  порождает ток в плоскости  $(r, z)$ , взаимодействие которого с внешним полем кольца способно вращать плазму ( $V_\varphi \neq 0$ ). Постановка задачи опять охватывает всю область цилиндра (8), кольцо (9) предполагается "прозрачным" и имитируется заданием в нем стороннего тока  $j_\varphi^{ex}(r, z) = 1$ . На данном этапе исследований пренебрегаем вязкостью и теплопроводностью. Безразмерные МГД-уравнения (в "H- версии", т.е. в терминах всех трех компонент  $\mathbf{H}$ )<sup>5</sup> имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0; \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p &= \mathbf{j}^{pl} \times \mathbf{H}, \\ \rho \frac{d\mathbf{E}}{dt} + p \cdot \nabla \mathbf{v} &= \mathbf{v}(\mathbf{j}^{pl})^2; \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) - \nabla \times (\mathbf{v} \mathbf{j}^{pl}), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\mathbf{j}^{pl} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{j}^{ex},$$

а  $\mathbf{H}$  – суммарное магнитное поле.

Граничные условия на "входе" в цилиндр ( $z=0$ ):

$$\rho = 1; \quad T = 1; \quad V_z = u_0 > c^+; \quad V_r = V_\varphi = 0;$$

$$H_{\varphi 0} = H_{\varphi 0}(r); \quad H_r = H_z = 0,$$

на внешней границе ( $r = r_M$ ):

$$V_r = 0, \quad H_r = 0, \quad E_\varphi = E_z = 0,$$

где  $\mathbf{E} = \mathbf{v} \mathbf{j} - \mathbf{v} \times \mathbf{H}$  электрическое поле. Два последние условия означают  $\partial H_z / \partial r = 0$ ,  $\partial(rH_\varphi) / \partial r = 0$ .

На "выходе" ( $z = z_M$ ) реализуются условия "свободного" вытекания, а на оси ( $r=0$ ) – условия симметрии и регулярности решения.

Начальные условия можно задавать достаточно произвольно, поскольку задача ставит целью получить установившийся режим течения. В качестве начальных значений магнитного поля  $\mathbf{H}$  имеет смысл взять внешнее поле кольца  $\mathbf{H}^{ex} = (H_r, 0, H_z)$  в вакууме, т.е. (см. §3) решив уравнение  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}^{ex}$  с указанными граничными условиями.

В расчетах установился стационарный режим обтекания кольца. Исследована его зависимость от параметров задачи. Результаты иллюстрируются распределением плотности плазмы на рис.3, полученным в расчете течения с параметрами

$$r_M = 9; \quad z_M = 15; \quad r_0 = z_0 = 3.6; \quad r_c = 1;$$

<sup>5</sup> Они участвовали в расчетах [27,29]; расчет динамики входа в антипробкотрон [28] использует "ψ версию".

$$\beta = 0.1; \quad \nu = 0.1; \quad M = u_0 / c = 2;$$

$$H_{\varphi 0}(r) = 0.1 \sin(\pi r / r_M).$$

Здесь хорошо видна узкая зона, отделяющая невозмущенный поток слева от остальной части цилиндра. В этой зоне резко возрастают плотность и давление плазмы, поэтому ее естественно называть головной ударной волной. За ней поток расширяется, обтекая препятствие в виде кольца и его магнитного поля. Последнее при этом заметно деформируется, что порождает сильный азимутальный ток. Деформация магнитного “препятствия” потоку – характерная черта, отличающая МГД-обтекания от традиционного аэродинамического обтекания твердых тел.

Азимутальное поле  $H_{\varphi}$  и скорость  $V_{\varphi}$  невелики, хотя бы потому, что на входе  $H_{\varphi} \ll 1$ . Направление вращения плазмы зависит от заданного распределения  $H_{\varphi 0}$ .

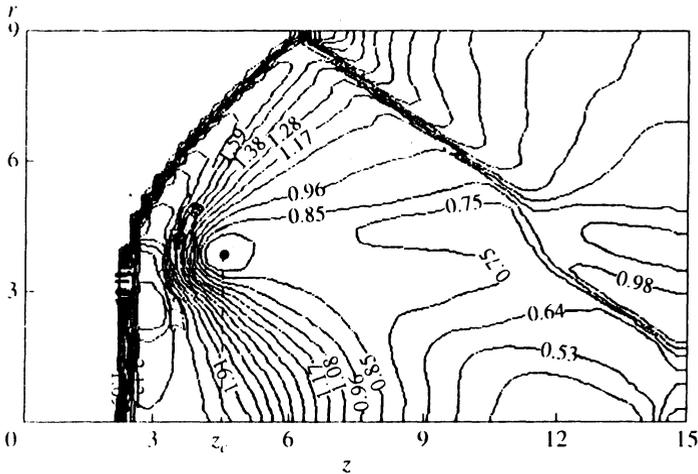


Рис.3. Сверхзвуковое обтекание кольца с током. Изолинии плотности.

### 5. Двумерные модели плазмостатики. Уравнение Грэда-Шафранова

Математические модели равновесных плазменных конфигураций в магнитных ловушках (безотносительно истории их формирования) предполагают в основе своей состояние покоя

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0, \quad \mathbf{v} \equiv 0. \tag{11}$$

Конфигурация полностью характеризуется распределением в пространстве трех величин – давления  $p$ , напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  и плотности тока  $\mathbf{j}$ , которые связаны уравнением равновесия

$$\nabla p = \mathbf{j}^{pl} \times \mathbf{H} \tag{12}$$

(МГД- уравнение в условиях (11)) и уравнениями Максвелла

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}^{pl} + \mathbf{j}^{ex}. \tag{13}$$

Здесь, как и выше,  $j^{pl}$  – ток в плазме, а  $j^{ex}$  – внешний ток в проводниках, находящихся в объеме ловушки. Уравнения приведены в безразмерной форме, ориентированной на решение конкретных задач.

Уравнение (12) очередной раз иллюстрирует идею магнитного удержания. Из ортогональности векторов  $\nabla p$  и  $\mathbf{H}$  следует, что поверхности постоянного давления  $p = \text{const}$  являются “магнитными поверхностями”, состоящими из силовых линий поля  $\mathbf{H}$ . Эти поверхности и призваны образовать “сосуды” для удержания плазмы.

Моделью равновесной магнитоплазменной конфигурации в ловушке должна быть крайняя задача с уравнениями (12), (13) в заданном объеме пространства и с заданными условиями на его границах. Такие задачи существенно упрощаются в двумерном случае, когда исследуемые конфигурации допускают симметрию, т.е. зависят от двух пространственных координат. При этом внешний ток  $j^{ex}$  направлен вдоль третьей координаты. Хорошо изучены три типа симметрии: плоская, осевая, и винтовая. Первые два типа обсуждались выше, в третьем – естественными пространственными координатами являются  $r$  и  $\omega = \varphi - \alpha z$ , где  $(r, \varphi, z)$  – цилиндрические координаты,  $\alpha = 2\pi/h$ ,  $h$  – шаг винта рассматриваемой конфигурации. Задача не зависит от координаты  $l = z + \alpha r^2 \varphi$ , изменяющейся вдоль винтовых линий  $r = \text{const}$ ,  $\omega = \text{const}$ . При  $\alpha \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow \infty$ ) винтовая симметрия превращается в плоскую.

В двумерных задачах первое из уравнений (13) провоцирует, как и выше, ввести вектор-потенциал  $\Psi$  магнитного поля, который позволяет заменить компоненты поля вдоль активных координат скалярной функцией  $\psi$ . Из второго уравнения (13) следует, что третья компонента поля определяет аналогичную функцию  $I$  электрического тока. Уравнение (12) говорит о том, что  $\psi$  и  $I$  постоянны на поверхностях  $p = \text{const}$ , т.е. все три функции  $p, \psi, I$  попарно зависимы. Если интерпретировать значения  $\psi$  как “метки” упомянутых выше магнитных поверхностей, то функции

$$p = p(\psi), \quad I = I(\psi) \quad (14)$$

описывают распределение давления и тока между ними.

Из уравнений (12), (13) можно исключить  $j^{pl}$  и получить одно скалярное уравнение Грэда-Шафранова для функции  $\psi$ . В задачах с осевой симметрией оно имеет вид [16,10-13]

$$\Delta^* \psi = g^{ax}(r, z, \psi), \quad (15)$$

где

$$\Delta^* \psi \equiv -r \nabla \times (\nabla \times \Psi) \equiv r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2};$$

$$\psi = r^2 \Psi_\varphi; \quad \Psi_r \equiv \Psi_z \equiv 0;$$

$$rH_r = -\frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad rH_z = \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad rH_\varphi = I;$$

$$g^{ax}(r, z, \psi) = -r^2 \frac{dp}{d\psi} - I \frac{dI}{d\psi} - r j_\varphi^{ex}(r, z).$$

В задачах с винтовой симметрией используется винтовая разновидность этого уравнения [17,13]

$$\Delta^{**} \psi = g^{hel}(r, \omega, \psi), \quad (15')$$

где

$$\Delta^{**} \equiv \nabla \left( \frac{\nabla \Psi}{v} \right) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{v} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \omega^2};$$

$$\Psi \equiv \Psi_l \equiv \Psi_z + \alpha r \Psi_\varphi; \quad I \equiv H_l \equiv H_z + \alpha r H_\varphi;$$

$$r H_r = \frac{\partial \Psi}{\partial \omega}; \quad H_\omega \equiv H_\varphi - \alpha r H_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial r};$$

$$g^{hel}(r, \omega, \Psi) \equiv -\frac{dp}{d\Psi} - \frac{I}{v} \frac{dI}{d\Psi} + \frac{2\alpha}{v^2} I - j_z^{ex}(r, \omega),$$

$$v(r) \equiv 1 + \alpha^2 r^2.$$

При  $\alpha \rightarrow 0$  отсюда следует уравнение в плоском случае

$$\Delta \Psi = g. \quad (15'')$$

Правая часть уравнения (15), (15'), (15'') содержит две произвольные функции  $p(\Psi)$  и  $I(\Psi)$ . Задать их – значит потребовать, угадать или предсказать на основе анализа экспериментов какие-то свойства исследуемых конфигураций, которые можно выразить в терминах распределения давления и тока между магнитными поверхностями. После того, как функции (14) заданы, моделирование двумерной плазменной конфигурации сводится к решению краевой задачи с уравнением типа Грэда-Шафранова. Решением является функция магнитного потока  $\Psi$ , которая определяет все остальные характеристики конфигурации с помощью приведенных выше формул.

Проиллюстрируем изложенный аппарат моделирования примерами решения задач о равновесных конфигурациях. В качестве примера задач с осевой симметрией рассмотрим две конфигурации в ловушках типа пробкотрона и “Галатея –А” [30,15]. Внешнее поле в первой из них создается двумя кольцевыми токами одного направления. Во второй – между ними дополнительно размещается третье кольцо с током противоположного направления. Обе системы помещены в идеально проводящий цилиндр радиуса  $r_M$  и длиной  $2z_M$ . В силу симметрии относительно плоскости  $z=0$  достаточно рассмотреть задачу с уравнением (15) только в его половине  $0 < z < z_M$ . Внешние азимутальные токи рассредоточим для непрерывности в малой окрестности колец, например, следующим образом:

$$j^{ex}(r, z) = \exp\left(-\frac{(r-1)^2 + (z-z_a)^2}{r_c^2}\right) - j_b \exp\left(-\frac{(r-r_b)^2 + z^2}{r_c^2}\right), \quad (16)$$

где  $(1, z_a)$  и  $(r_b, 0)$  – координаты колец, малый параметр  $r_c$  определяет радиус “размазывания” токов, коэффициент  $j_b$  – относительную величину тока в третьем кольце. Радиус крайних колец принят за единицу.

В случае пробкотрона ( $j_b = 0$ ) граничное условие на стенках и оси цилиндра:  $\Psi = \text{const}$  (значение константы роли не играет, поэтому положим ее равной нулю). На плоскости симметрии ( $z = 0$ ):  $\partial \Psi / \partial z = 0$ .

В задаче отсутствует азимутальное поле  $H_\varphi$ , откуда следует, что в правой части уравнения (15)  $I = 0$ .

Функцию  $p(\psi)$  выберем в соответствии с желанием сосредоточить плазму в основном вдоль сепаратрисы магнитного поля. Найдем эту сепаратрису  $\psi = \psi_s$  для простоты в задаче с вакуумным полем ( $p \equiv 0$ ) и затем положим

$$p(\psi) = p_0 \exp\left(-\frac{(\psi - \psi_s)^2}{q^2}\right), \quad (17)$$

где  $p_0$  – максимум давления, измеренного в магнитных единицах (см. §1), т.е. характерное значение плазменного параметра  $\beta$ . Параметр  $q$  искусственный, он определяет чувствительность зависимости  $p$  от  $\psi$  и характерную “толщину” плазменной конфигурации.

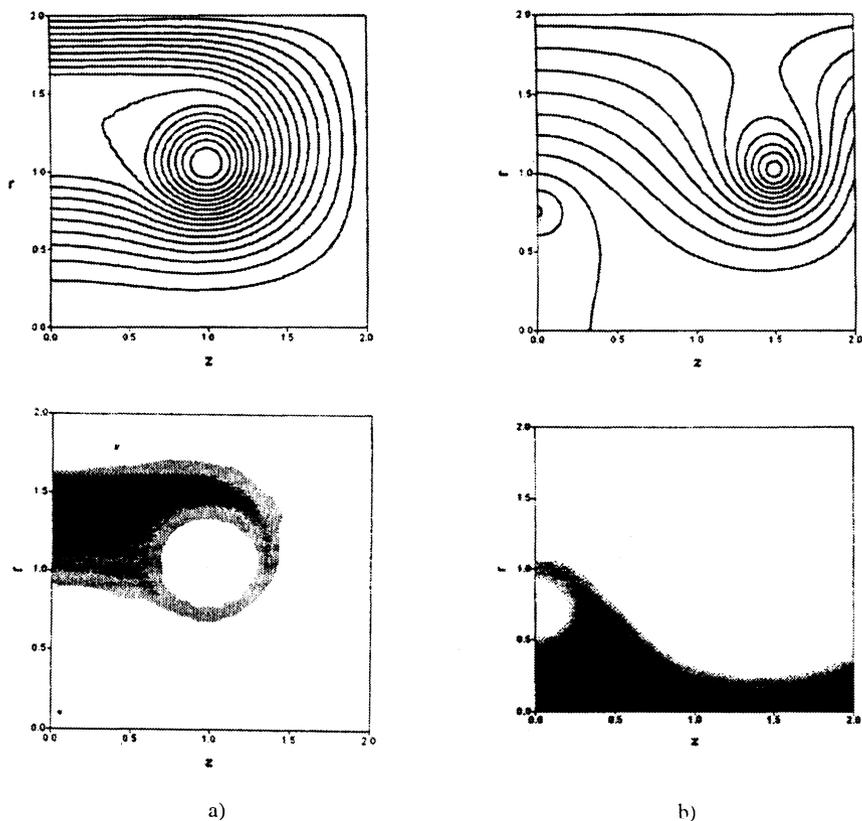


Рис.4. Линии магнитного поля и изолинии давления плазмы для а) Пробкотрона, б) Галатей-А.

На рис. 4а приведены силовые линии магнитного поля ( $\psi = \text{const}$ ) и “карта” давления, полученные в численном решении задачи при  $p_0 = 0.5 \cdot 10^{-3}$  и  $q = 10^{-3}$ . Вблизи особой точки (нуля) магнитного поля образовалась область, в которой  $\psi \approx \psi_s$ , заполненная плазмой с давлением  $p \approx p_0$ . Положение нулевой точки и значение  $\psi_s$  мало отличаются от таковых в вакууме, что обосновывает упрощенное, т.е. приближенное вычисление  $\psi_s$ . Линия  $\psi = \psi_s$

обходит область тока, поэтому плазменная область окружает ток, замыкаясь вокруг него тонкими перемычками.

В случае "Галатеи -А" к магнитному полю трех витков с током добавлено продольное однородное поле  $H_{z0}$ . Это отражается на граничном условии на внешней границе, где теперь положено  $\psi = H_{z0}r^2/2$ . Функция  $p(\psi)$  опять имеет вид (17), но сначала подбирается ток  $j_b$  в среднем кольце так, чтобы сепаратриса вакуумного поля, разделяющая структуры силовых линий вокруг внешних токов, проходила бы вблизи начала координат. Для этого следует решить несколько вариантов краевой задачи в вакууме. Нужная геометрия магнитного поля получена в расчетах при  $p_0 = 0$ ,  $j_b = 0.5$ ;  $H_{z0} = 0.6 \cdot 10^{-3}$ . После этого, положив  $\psi_s = 0$  в формуле (17), решаем задачу с  $p_0 > 0$ . На рис. 46 изображены магнитное поле и давление при значениях  $p_0 = 3 \cdot 10^{-5}$ ,  $q = 2 \cdot 10^{-4}$ . Плазма занимает приосевую область и тонкой оболочкой окружает центральный ток. Такого рода конфигурации представляют большой интерес в теоретическом плане и для приложений.

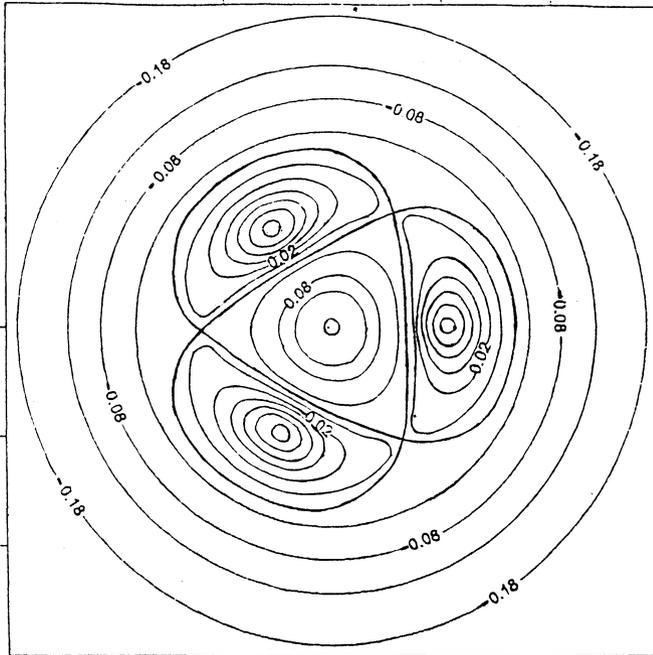


Рис.5. Магнитные поверхности в плазменном шнуре с винтовыми токами при  $\alpha=1.5$ .

Пример задач с винтовой симметрией – расчет конфигурации в цилиндре с тремя винтовыми проводниками, погруженными в плазму [31-32]. Это опять распрямленный для простоты аналог тороидальной ловушки "Стелларатор-галатеи", в которой проводники обвивают магнитную ось тора [33]. Цилиндрическая модель становится двумерной, если дополнительно предположить винтовую симметрию: шаг винта координатных линий  $r = \text{const}$ ,  $\omega = \text{const}$  совпадает с шагом винта проводников. Внешний ток  $j^{ex}$  в проводниках направлен, очевидно, вдоль координатных линий, т.е.

$$j_r^{ex} = 0, \quad j_\omega^{ex} = j_\phi^{ex} - \alpha r j_z^{ex} = 0,$$

откуда следует, что в уравнении (15')  $j_z^{ex} = j_l^{ex} / v$ . Он непрерывно рассредоточен в малой окрестности центров проводников  $r=l$ ,  $\omega = 2\pi n/3$ ,  $n = 0,1,2$  аналогично (16).

Граничное условие на внешней границе цилиндра  $r = r_M$  имеет тот же смысл, что в задаче о пробкотроне

$$r = r_M; \quad \psi = \psi_M = \text{const}. \quad (18)$$

Ввиду симметрии задачи относительно лучей  $\omega = \pi n/3$  ее достаточно ограничить сектором  $0 < r < r_M$ ,  $0 < \omega < \pi/3$  с дополнительными условиями симметрии на лучах и регулярности решения в центре.

Рассмотрены два типа конфигураций. Первый – ближе к традиционному стелларатору, предполагает, что плазма сосредоточена в центральной части цилиндра с максимумом давления на оси. Проводники при этом могут быть охвачены периферией конфигурации, а могут быть практически полностью вне ее. Второй тип принадлежит классу ловушек-галатей и предусматривает расположение плазмы вдоль сепаратрисы магнитного поля, отделяющей центральную часть цилиндра и окрестности проводников друг от друга и от периферии. На рис.5 приведены линии уровня  $\psi = \text{const}$  для типичной конфигурации магнитного поля при  $\alpha = 1.5$ . В обоих случаях полагаем

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\psi^2}{q^2}\right); \quad I \equiv \frac{\alpha}{2\pi}, \quad (19)$$

но дополнительно требуем, чтобы в первом случае

$$\psi(0, \omega) = 0 \quad (20)$$

на оси, а во втором –

$$\psi = \psi_s = 0, \quad (21)$$

где  $\psi_s$  – как и выше, значение  $\psi$  на сепаратрисе, признаком которой является экстремум функции  $\psi_M(r, \pi/3)$  вдоль луча, равноудаленного от проводников (рис.5). Выполнения условий (20) или (21) следует добиваться подбором граничного значения  $\psi_M$  в (18). Функция  $I(\psi)$  для простоты постоянна, что означает, что плазменный ток направлен тоже только вдоль координаты  $I$ .

В результате численного решения задачи получены модели плазменных конфигураций обоих типов и исследованы их свойства в зависимости от параметров  $(\alpha, p_0, q)$  [31]. При одних и тех же значениях параметров конфигурация с плазмой на сепаратрисе занимает существенно больший объем. Это видно из рис. 6, где представлены графики решений  $\psi(r)$  и  $p(r)$  вдоль луча  $\omega = \pi/3$ . Установлено также, что при  $\alpha < 1$ , когда сепаратриса проходит недалеко от центра, плазменная конфигурация окружена “барьером” из магнитного поля, магнитное давление  $H^2/2$  на котором соизмеримо с давлением  $p_0$  плазмы на сепаратрисе. Это внушает надежды практически реализовать магнитоплазменные конфигурации с характерным значением  $\beta \sim 1$ :

Таким образом, результаты расчетов подтверждают преимущество и перспективность концепции галатей в простейших моделях стелларатора.

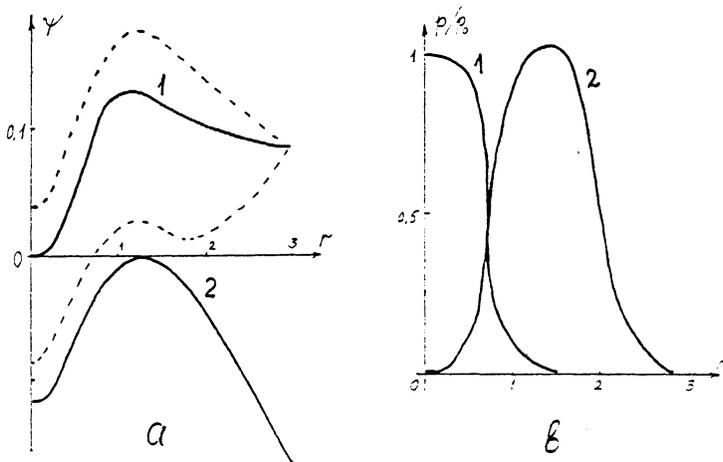


Рис.6. Графики  $\psi(r)$  и  $\rho(r)$  при  $\omega=\pi/3$  в задачах с условиями 1 – (20) и 2 – (21). Неединственность решения в случае 1.

### 6. О единственности и устойчивости решения задач с уравнением Грэда-Шафранова

Двумерные модели в плазмостатике, использующие уравнения Грэда-Шафранова, имеют следующую особенность общего характера. Краевые задачи с уравнением типа (15) могут иметь неединственное решение в зависимости от свойств нелинейной правой части. Это свойство задач с полулинейными уравнениями эллиптического типа, которое, хотя и не подчеркивается в общих вопросах теории уравнений, известно своими проявлениями в широком классе прикладных задач. Например, в исследовании равновесной плазменной конфигурации в системе “Астрон” [34] участвует уравнение (15) с правой частью  $g^{ax} = \exp(-\psi)$ , и соответствующая задача имеет два решения. Здесь видна прямая аналогия с теорией горения. Уравнение теплопроводности с учетом энерговыделения по закону  $G(T) = \exp T$  имеет вид<sup>6</sup>

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T + G(T),$$

а его стационарная разновидность ( $\partial/\partial t \equiv 0$ ) описывает тепловой баланс в равновесии и практически совпадает с уравнениями (15) при  $\psi = -T$ . Задачи о тепловом самовоспламенении [35] и распространении пламени [36] используют тот же математический аппарат и при некоторых условиях имеют два решения. Аналогичные результаты имеют место при моделировании установления химического процесса [37] и в задачах электрохимии [38]. Вопросы единственности решения обсуждались в обзоре [39]<sup>7</sup>.

В задаче (15'), (18) о моделировании “стелларатор-галатей” также может возникать неединственность. Решение существует, единственно и легко строится итерационными методами при небольших значениях параметра  $\rho_0$ , который служит “мерой” нелинейности в уравнении (15'). После достижения им критического значения  $\rho_0^*$  (зависящего от  $\alpha$  и  $q$ ) краевая задача в некоторых диапазонах граничного значения  $\psi_M$  имеет три решения. Обратим внимание на то, что бифуркация от “хорошего” решения к неединственному в

<sup>6</sup> Независимо от наличия симметрии и размерности задачи

<sup>7</sup> § 15 статьи [39], посвященный моделям теории горения, написан Г.И.Баренблаттом.

задаче с плазмой на сепаратрисе (21) происходит позже, чем в более традиционном случае (20). А именно, критическое значение  $p_0^*(\alpha, q)$  при условии (21) оказалось выше (в рассчитанных вариантах – приблизительно втрое), чем при условии (20). Это, в частности, указывает на еще одно преимущество концепции галатей в рассмотренном классе ловушек.

На рис.6а первое решение неединственно: тому же краевому условию удовлетворяют еще два, изображенные пунктиром. Второе решение – единственно. Более того, первое решение (с нулем на оси, среднее из трех на рис.6а) “неустойчиво” в том смысле, что оно не может быть получено обычным итерационным методом (“установлением”) и потребовало в расчетах специальной разновидности метода (см. ниже).

Математическую природу неединственности и неустойчивости можно объяснить следующим образом [32]. Пусть  $\psi$  – решение краевой задачи<sup>8</sup>

$$\Delta\psi = g(\psi); \quad \psi(r_M, \omega) = \psi_M. \quad (22)$$

Его малым возмущениям  $u$  соответствует задача с линеаризованным уравнением типа Гельмгольца

$$L[u] \equiv \Delta u - g'(\psi)u = 0; \quad u(r_M, \omega) = 0. \quad (23)$$

Если однородная задача (23) имеет ненулевое решение, то ожидать успехов в решении неоднородной линейной задачи и, тем более ее нелинейного прообраза (22), очевидно, не следует. Действительно, анализ расчетов задачи (15'), (18) показал, что упомянутая выше бифуркация решения связана с появлением собственного значения  $\lambda = 0$  линейного самосопряженного оператора  $L$ , т.е. с переходом через нуль правой границы его спектра (при  $|g'| \ll 1$  оператор  $L$  близок к оператору Лапласа, и спектр, очевидно, отрицателен). После бифуркации появляются три решения  $\psi$ , им соответствуют три разных набора собственных значений, поскольку коэффициенты оператора  $L$  зависят от  $\psi$ . “Неустойчивому” решению отвечает положительное старшее (самое правое) собственное значение  $\lambda_1 > 0$ , “устойчивым” – полностью отрицательный спектр. Это объясняется тем, что применяемые итерационные методы решения задачи (22) являются по существу разностными аналогами нестационарной задачи

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \Delta\psi - g(\psi), \quad (24)$$

и сходимость методов равносильна убыванию погрешности, т.е. решения задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L[u]. \quad (25)$$

Отсюда же следует, что скорость сходимости методов определяется величиной первого собственного значения разностного аналога оператора  $L$  (декремент затухания погрешности).

Таким образом, областью параметров задачи, при которых решение единственно и “устойчиво”, является множество

$$\lambda_1 < 0. \quad (26)$$

Бифуркация решений на границе этой области обязана возрастанию характерных отрицательных значений функции  $g'(\psi)$ , способных смещать спектр  $L$  вправо. Критерий (26) принци-

<sup>8</sup> Это рассуждение – общего порядка, относящееся к полулинейным уравнениям, в частности, ко всем уравнениям (15), (15'), (15''). Поэтому звездочки и индексы в уравнении (22) опущены.

пимально осязаем, так как старшее собственное значение  $\lambda_1$  может быть найдено численно вслед за решением  $\psi$ . Для этого достаточно применить тот же метод установления: решение задачи (25) со временем асимптотически выходит на старшую собственную функцию

$$u(t, P) \sim e^{\lambda_1 t} V_1(P), \text{ где } L[V_1] = \lambda_1 V_1.$$

Отсюда

$$\lambda_1 \cdot \Delta t \approx \ln \frac{u(t + \Delta t, P)}{u(t, P)} \approx \frac{u^{s+1}}{u^s} - 1,$$

где  $s$  – номер шага по времени (итерации).

Критерий (26) определяет также область “устойчивости” решения. Кавычки здесь соответствуют упомянутой выше устойчивости в процессе установления. Ее можно назвать диффузионной устойчивостью [40] (глядя на уравнение (24)), которую следует отличать от широко известной гидродинамической устойчивости (без кавычек) относительно возмущений параметров конфигурации, включая движение среды. Последняя хорошо изучена в линейном приближении теоретическими и численными методами, а в МГД-расчетах подробно рассмотрена нелинейная стадия развития неустойчивости. Этим вопросам посвящена обширная литература. Помимо упомянутых ранее книг и обзоров [9-13] обратим внимание на недавно опубликованную статью [41], в которой представлены результаты большого цикла исследований, изложенных ранее лишь в ротапринтных изданиях.

Взаимоотношения гидродинамической и диффузионной устойчивостей представляют интерес. Частичный ответ на него дан в статье [40] для одномерных равновесных конфигураций в плазменном цилиндре с неподвижной границей. Они всегда устойчивы относительно одномерных же гидродинамических возмущений в линейном приближении. Результат следует из интегральной оценки спектра соответствующего дифференциального оператора (разновидность энергетического принципа [10-12]). Действительно, из линеаризованных МГД-уравнений следует уравнение для малых колебаний скорости

$$\rho_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho_0 C_0^2 r \frac{\partial V}{\partial r} \right) - QV \equiv -K[V] \quad (27)$$

с граничными условиями  $|V(0)| < \infty$ ,  $|V(1)| = 0$ .

Здесь

$$\rho_0 C_0^2 \equiv \gamma p_0 + H_{z0}^2 + H_{\phi 0}^2; \quad Q \equiv r \frac{d}{dr} \left( \frac{H_{\phi 0}}{r} \right)^2 - \frac{d}{dr} \left( \frac{\rho_0 C_0^2}{r} \right),$$

а  $p_0(r)$  и  $H_0(r)$  удовлетворяют одномерному уравнению равновесия (см.(12)):

$$\frac{dp}{dr} + H_z \frac{dH_z}{dr} + \frac{H_\phi}{r} \cdot \frac{drH_\phi}{dr} = 0. \quad (28)$$

Из (27) и (28) легко получить, что оператор  $K$  – положительно определенный:

$$\int_0^1 K[V] V r dr > 0,$$

т.е. его спектр положителен. Это значит, что возмущение скорости колеблется со временем по закону

$$V(t, r) \sim \exp(ist), \quad s^2 = \lambda > 0.$$

Здесь же – формальное отличие гидродинамической устойчивости от диффузионной: последняя соответствует затуханию возмущений

$$u(t, r) \sim \exp(\lambda t), \quad \lambda < 0.$$

В то же время диффузионная устойчивость тех же конфигураций нетривиальна и определяется более тонкими деталями. Таким образом, в рассмотренном частном случае имеет место иерархия: гидродинамическая устойчивость грубее диффузионной.

Диффузионная устойчивость не есть, как может на первый взгляд показаться, всего лишь свойство метода решения задачи (22). Из представленного выше анализа следует, что речь идет о внутреннем свойстве задачи, выраженном, например, в терминах спектра дифференциального оператора  $L$  линеаризованного уравнения Грэда-Шафранова. Физический смысл диффузионной неустойчивости (одновременно с неединственностью решения краевой задачи), по-видимому, в том, что равновесные плазменные конфигурации с ожидаемыми свойствами не могут существовать.

Спектральные свойства оператора  $L$  и связанные с ними вопросы определяются правой частью  $g(\psi)$  уравнения (22), т.е. произвольными функциями  $p(\psi)$  и  $I(\psi)$ . Наличие произвола в их выборе дает возможность и надежду варьировать задачу так, чтобы получить конфигурацию с желаемыми свойствами. В связи с этим в [40] рассмотрены примеры разных зависимостей (14) в простой одномерной модели конфигураций в плазменном цилиндре. Указаны классы функций и области параметров, благоприятные для диффузионной устойчивости. Здесь намечен перспективный путь конструирования равновесных конфигураций – удачно подбирать функции (14) или “склеивать” их из различных кусков в разных диапазонах изменения аргумента  $\psi$ . Содержательные примеры на эту тему имеются в [25] в применении к двумерным конфигурациям ловушки “Галатей-пояс”.

## 7. Плоские задачи МГД-равновесия. Аналитические методы и точные решения

Задачи плазмостатики, обладающие плоской симметрией, в дополнение к сказанному выше, допускают применение аналитического аппарата, который дает точные решения задач о так называемых фигурах равновесия, т.е. плазменных конфигурациях без магнитного поля, удерживаемых окружающим их магнитным полем в вакууме. Фигуры равновесия относятся к классу “конфигураций с  $\beta=1$ ” – распространенный термин, показывающий, что давление плазмы внутри равно магнитному давлению снаружи. Первые аналитические исследования равновесных плазменных конфигураций с  $\beta=1$  выполнены С.И.Брагинским и Б.Б.Кадошцевым [42], ряд общих свойств равновесия установлен в серии работ Берковича, Грэда и Рубина в сборнике [43]. Хорошо известен основной результат этих исследований: для устойчивости конфигураций ее граница должна быть вогнута со стороны плазмы.

В работах [16,42] обращено внимание на то, что уравнения МГД-равновесия (11)-(12) формально эквивалентны уравнениям стационарного течения несжимаемой идеальной жидкости

$$\rho(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p, \quad \nabla \mathbf{v} = 0.$$

Поэтому задачи о плазменных конфигурациях обсуждаемого типа являются одновременно задачами динамики жидкости и используют общий с ними математический аппарат.

Аналитическое исследование ряда простейших систем плазма-магнитное поле проведено в [30,45], где рассмотрена задача о плоских равновесных фигурах идеально-проводящей плазмы, находящейся в магнитном поле прямолинейных токов. Плазменная конфигурация в этом случае есть протяженное вдоль оси  $z$  тело постоянного сечения  $D$  ( $D$  – область в плоскости декартовых координат  $x, y$  подлежащая определению). В области вне плазмы (в вакууме)

имеются заданные электрические токи  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  и магнитное поле  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ . Двумерность и плоская симметрия означают в нашем случае, что

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0, \quad \mathbf{j} = (0, 0, j(x, y)), \quad \mathbf{H} = (H_x(x, y), H_y(x, y), 0).$$

Введя как и выше функцию магнитного потока  $\psi$ , имеем в вакууме

$$\Delta\psi = -j(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа.

К этому уравнению нужно добавить граничные условия на поверхности плазмы и на бесконечности. На границе плазма-вакуум непрерывна нормальная компонента магнитного поля  $H_n$ , и внутри плазмы  $\mathbf{H} \equiv 0$ , поэтому на поверхности плазмы  $H_n = 0$ , т.е. магнитное поле касательно к границе плазмы  $\partial D$ , откуда получаем первое условие

$$\psi = \text{const}, \quad (x, y) \in \partial D. \quad (29)$$

Второе условие есть условие равновесия. Если  $p(x, y) \equiv p_0 = \text{const}$  – давление плазмы в  $D$ , то имеем

$$\frac{H^2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\psi}{\partial n} \right)^2 = p_0, \quad (x, y) \in \partial D; \quad (30)$$

здесь  $n$  – нормаль к  $\partial D$ . Условие (30) означает, что модуль магнитного поля постоянен вдоль границы. Третье условие можно получить следующим образом. Проинтегрировав уравнение  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$  по области  $D$ , получим

$$\oint_{\partial D} H_\tau dt = \oint_{\partial D} \frac{\partial\psi}{\partial n} dt = J_p, \quad (31)$$

где  $J_p$  – полный ток, протекающий по плазме. Условие (31) эквивалентно некоторому условию на бесконечности. Если, например, полный ток, протекающий в вакуумной области, равен  $J$ , то получим

$$\psi \cong -\frac{2(J + J_p)}{c} \ln R, \quad R^2 = x^2 + y^2, \quad R \rightarrow \infty.$$

Задачи подобной структуры уже были предметом длительного изучения в гидродинамической теории струй несжимаемой идеальной жидкости [44].

Логически и физически простейшим является, очевидно, случай одиночного тока вида  $j(x, y) = j_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$  (синглет). Но также очевидно, что равновесных конфигураций, занимающих конечную область в пространстве (в плоскости  $x, y$ ), в магнитном поле синглета не существует.

Простейшей, нетривиальной системой токов, создающей магнитную конфигурацию с нулевой точкой и с сепаратрисами, не уходящими в бесконечность, является суперпозиция двух токов, равных по величине и направлению (дублет)

$$j(x, y) = J_0 (\delta(x - 1) \delta(y) + \delta(x + 1) \delta(y)). \quad (32)$$

Токи находятся в точках  $(\pm 1, 0)$ , нулевая точка поля – в начале координат. Рассмотрим этот случай подробнее.

Задача содержит два безразмерных параметра

$$h = \sqrt{p_0} = \sqrt{\beta}, \quad g = \frac{J_p}{J_0}$$

смысл которых очевиден.

Методы, развитые в теории струй идеальной жидкости, позволяют использовать аппарат теории аналитических функций. Плоскость  $(x,y)$  рассматривается как плоскость комплексного переменного  $z=x+iy$ . Внешность области  $D$  (пока неизвестной) конформно отображается на внешность единичного круга в плоскости комплексного переменного  $t$ . При этом пусть точки  $z=\pm 1$  (точки в которых располагаются токи) переходят соответственно в точки  $t=\pm t_1$  ( $\text{Im } t_1=0, t_1>1$ ).

Введем комплексный потенциал магнитного поля  $F(z)=\varphi+i\psi$ , где  $\partial\varphi/\partial x=H_x$ ,  $\partial\varphi/\partial y=H_y$ . Согласно (29) имеем  $\text{Im } F=\text{const}$  на  $\partial D$ . Определим также функцию  $\zeta(z)$  соотношением

$$\zeta(z) = \frac{1}{h} \frac{dF}{dz} = \frac{1}{h} (H_x - iH_y). \quad (33)$$

Тогда из (30) получаем  $|\zeta(z)| = 1$  при  $z \in \partial D$ .

Далее строятся функции  $F$  и  $\zeta$  как функции  $t: F(t)=F(z(t))$  (методом изображения) и  $\zeta(t)=\zeta(z(t))$  (при построении этой функции используется специальный прием аналитического продолжения мероморфной функции через дугу, на которой ее модуль постоянен), где  $z(t)$  – указанное выше конформное отображение  $z \rightarrow t$  (оно еще не построено). В результате получим

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \left( \ln \frac{(t-t_1)(t+t_1)t^{2+g}}{(t_1-1)(t_1+1)} + 2 \ln t_1 \right), \quad (34)$$

$$\zeta(t) = -i \frac{t^2 t_1^2 - 1}{(t^2 - t_1^2)t}.$$

Нетрудно видеть, что при  $|t|=1$  выполнено  $\text{Im} F(t)=\text{const}$ ,  $|\zeta(t)|=1$ . С другой стороны, имеем согласно (33)

$$z(t) = \frac{1}{h} \int \zeta^{-1}(t) \frac{dF}{dt} dt. \quad (35)$$

Используя (34) - (35), получаем

$$z(t) = \frac{1}{h} \Pi(t, t_1, g), \quad (36)$$

где

$$\Pi(t, t_1, g) = \frac{1}{2\pi} t_1^{-3} \left[ (2+g)t_1 t - (t_1^4 - 1) \frac{t_1 t}{t^2 t_1^2 - 1} + (1+g) \frac{t_1^4 - 1}{2} \ln \frac{t_1 t + 1}{t_1 t - 1} \right].$$

Исходная задача содержит два параметра  $h$  и  $g$ , а  $z(t)$  в (36) зависит от вспомогательной величины  $t_1$ . Чтобы исключить ее, нужно воспользоваться условием “нормировки”  $z(t_1)=1$ , что даст

$$\delta(t_1, g) \equiv \Pi(t_1, t_1, g) = h.$$

Последнее соотношение и позволяет в принципе определить зависимость  $t_1=t_1(h,g)$ . Отображение (36) дает полное решение задачи (если оно существует) и, в частности, форму фигуры равновесия

$$w(\theta) \equiv z(\exp(i\theta)), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Рассмотрим сначала случай  $g=0$  (полный ток в плазме равен нулю). График функции  $\delta_0(t_1) \equiv \delta(t_1, 0)$  приведен на рис.7а. Максимальное значение  $\delta_0(t_1)$  достигается при  $t_1=t_M \approx 1,2$  и равно  $\delta_0(t_M)=h_M \approx 0,22$ . Из рис.7а можно легко сделать следующие выводы: 1) при  $h > h_M$  решения задачи не существует; 2) при  $1/2\pi = h_0 < h < h_M$  существуют два решения; 3) при  $h < h_M$  существует одно решение. На рис.7б-d даны примеры фигур равновесия, когда  $t_1$  меняется от 1,01 до 2,0.

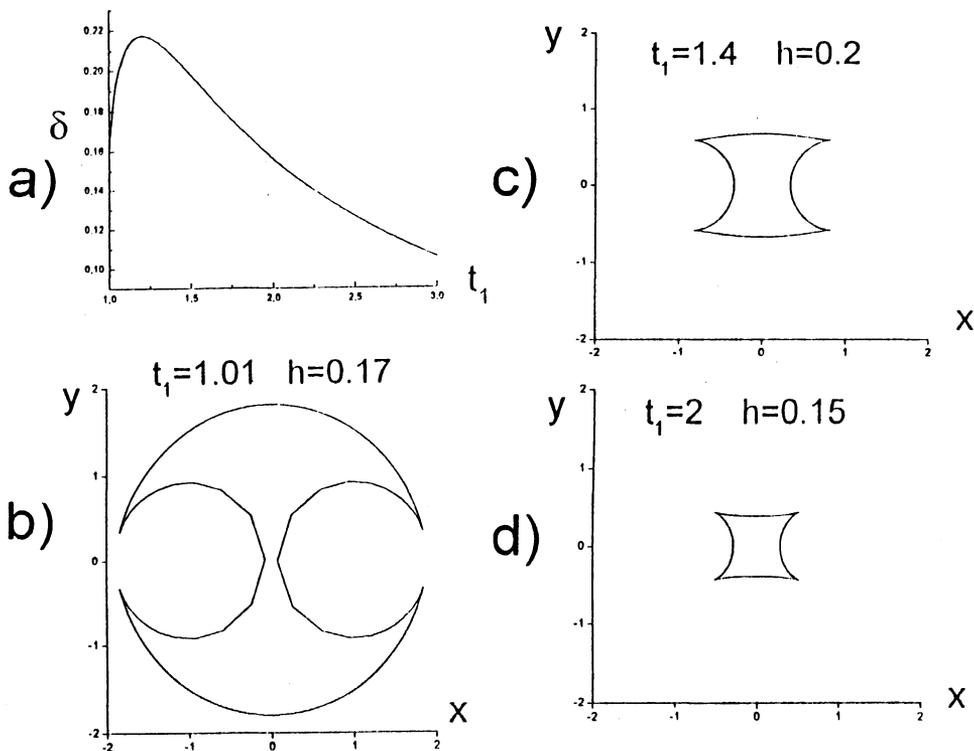


Рис.7. (а) – график функции  $\delta(t_1)$ . (б)-(д) – примеры фигур равновесия при разных значениях параметра  $t_1(h)$ .

Итак при  $h > h_M \approx 0,22$  равновесной плазменной фигуры не существует. При  $h = h_M$  фигура имеет выпуклые (неустойчивые) и вогнутые (устойчивые) участки границы. При  $h_0 < h < h_M$  имеется два решения. Если следить за фигурой вдоль правой ветви кривой на рис.7а, то по мере уменьшения параметра  $h$  размеры фигуры и по оси  $x$  и по оси  $y$  уменьшаются. При достаточно малых  $h$  фигура имеет только вогнутые границы. Если следовать по левой ветви кривой от  $h = h_M$ , то при уменьшении  $h$  размер фигуры по оси  $x$  уменьшается (стремится к нулю при  $h \rightarrow h_0$ ), а размер по оси  $y$  увеличивается (стремится к 2 при  $h \rightarrow h_0$ ). При  $h \rightarrow h_0$  фигура как бы разрывается в нуле и соединяется точками заострения, охватывая токи.

Рассмотренная подробно задача о свойствах равновесных плазменных фигур в поле дублета (33) является, с одной стороны, самой элементарной, а, с другой стороны, достаточно универсальной, так как описывает по существу свойства фигур равновесия в окрестности любого невырожденного нуля магнитного поля.

Естественным продолжением и усложнением задачи о дублете являются задачи с тремя (триплет), четырьмя (квартет) и т.д. токами одинакового направления, расположенных в вершинах правильного 3-х, 4-х и т.д. угольников. Не приводя здесь подробных вычислений, опишем основные качественные особенности этих случаев. Можно сделать следующие выводы – с увеличением числа токов: 1)  $t_M$  убывает; 2)  $h_0$ ,  $h_M$  возрастают; 3)  $h_M - h_0$  убывает. Таким образом, чем больше число токов, тем выше критическое значение  $h_M$ , уже диапазон параметра  $h$ , при котором есть двузначность решения, шире диапазон  $h$ , при котором фигура имеет только вогнутые участки границы.

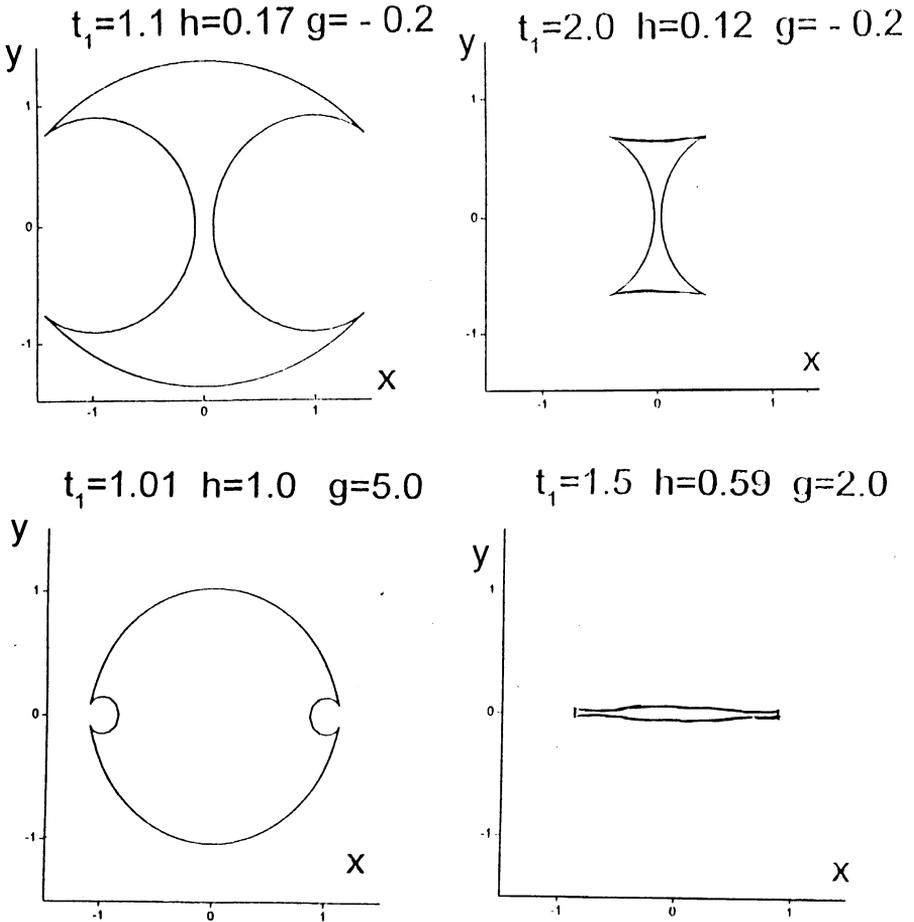


Рис.8. Примеры фигур равновесия при ненулевом плазменном токе ( $g \neq 0$ ).

Теперь вернемся к общему случаю, когда полный ток, протекающий по плазме, не равен нулю ( $g \neq 0$ ). Здесь ситуация более сложная и может быть вполне отображена только на плоскости двух параметров  $t_1$ ,  $g$  [45]. Основные результаты при этом следующие. Если плазменный ток имеет то же направление, что и токи в проводниках ( $g > 0$ ), то решение задачи

существует, если параметр  $h$  удовлетворяет условиям  $h_{\min} < h < h_{\max}$ , где  $h_{\min}$ ,  $h_{\max}$  являются функциями  $g$ . Если же плазменный ток противоположен по направлению внешнему току ( $g < 0$ ), то при значении параметра  $g$  меньшем  $g_{\min} \approx -0,3$  стационарных равновесных конфигураций не существует ни при каком значении параметра  $h$  (т.е. ни при каком давлении). На рис.8 даны примеры фигур равновесия при разных значениях  $h$  и  $g$ . В частности, при не слишком большом параметре  $h$  и достаточно высоком значении  $g$  получаемая конфигурация имеет вид сколь угодно тонкого токового слоя, лежащего в плоскости  $(x,y)$ . Его горизонтальный размер ограничен расстоянием между проводниками.

Мы рассмотрели системы, в которых магнитное поле создается токами одного направления и имеет только замкнутые сепаратрисы. Если допускать токи разных направлений, то простейшей системой, представляющей интерес, является система четырех токов, меняющих направление в шахматном порядке. Эта система (ее естественно называть квадруполем, если полный ток равен нулю) хорошо известна в связи с исследованиями антипробочной ловушки. Важным отличием квадруполя от дублета и т.п. является то, что теперь сепаратрисы уходят в бесконечность. Основные результаты, полученные использованным выше методом, для этой системы таковы:

Решения задачи для квадруполя (симметричного) не существует, если  $h > h_M \approx 0,31$ . Для  $h \leq h_M$  существует единственное решение. Границы фигуры (ее общий вид хорошо известен) всегда вогнутые. Размеры фигуры при увеличении  $h$  возрастают, и при  $h = h_M$  реализуется предельная фигура с размером  $l$  по осям  $x$  и  $y$ .

Более сложные системы могут содержать токи разных направлений и разной величины, расположенные в произвольных точках. Могут одновременно быть как замкнутые, так и уходящие в бесконечность сепаратрисы. Большое число параметров, сложная геометрия вакуумного магнитного поля приводят к тому, что эффективная реализация даже в плоском случае рассмотренного аналитического метода становится затруднительной.

## 8. Негидродинамические модели

Гидродинамические модели не в состоянии отразить структуру переходных слоев, толщина которых в наиболее интересных случаях порядка ионного ларморовского радиуса. Анализ таких слоев требует кинетического описания динамики ионов и электронов или как минимум гибридных моделей, когда ионы описываются кинетически, а электроны – гидродинамически.

Общий подход к построению последовательно кинетических стационарных конфигураций изложен в [15]. Используются стационарные кинетические уравнения для ионов и электронов и уравнения Максвелла. Рассматриваются осесимметричные движения плазмы в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  в предположении что магнитное поле полоидально, а электрические токи тороидальны:

Тогда имеем уравнение на функцию магнитного потока

$$\Delta^* \psi = -\frac{4\pi r}{c} j; \quad (37)$$

здесь, как и выше  $j = j^{ex} + j^{pl}$ , где  $j^{ex} = j^{ex}(r, z)$  – заданное распределение внешних токов, а  $j^{pl}$  – плотность тока в плазме. Теперь в зависимости от модели, принятой для описания плазмы, можно замкнуть уравнение (37) различными способами. Если, например, используется МГД-модель равновесия плазмы, то все сводится к уравнению Грэда-Шафранова с  $j^{pl} = 8\pi^2 r \partial P / \partial \psi$ , где  $P(\psi)$  (давление плазмы) – заданная функция.

При последовательно кинетическом описании электронов и ионов для плазменного тока имеем по определению

$$j^{pl} = e \int V_{\varphi} (f_1 - f_e) dv. \quad (38)$$

Существенно упрощающим ситуацию является предположение о квазинейтральности плазмы

$$\int f_i dv = \int f_e dv.$$

Общим решением кинетических уравнений являются произвольные функции интегралов движения электрона и иона в стационарных электрическом  $\Phi$  и магнитном  $\psi$  полях. Полный набор этих интегралов может быть найден только в результате самосогласованного решения задачи. В наших условиях (в двумерном, осесимметричном случае) два интеграла есть всегда. Это интегралы энергии и обобщенного момента для ионов и электронов:

$$\mathcal{E}_i = MV^2/2 + e\Phi, \quad \mathcal{P}_i = MrV_{\varphi} + e/c\psi,$$

$$\mathcal{E}_e = mV^2/2 - e\Phi, \quad \mathcal{P}_e = mrV_{\varphi} - e/c\psi.$$

Пусть функции  $f_i = f_i(\mathcal{E}_i, \mathcal{P}_i)$  и  $f_e = f_e(\mathcal{E}_e, \mathcal{P}_e)$  заданы. Из условия нейтральности можно тогда получить выражение  $\Phi$  как функции  $r$  и  $\psi$

$$\Phi = \Phi(r, \psi).$$

Из (38) получаем выражение для  $j^{pl}$  как функцию  $r$  и  $\psi$

$$j^{pl} = j^{pl}(r, \psi).$$

Таким образом, в кинетическом случае задача сводится к решению одного нелинейного эллиптического уравнения

$$\Delta^* \psi = -\frac{4\pi}{c} r (j^{ex}(r, z) + j^{pl}(r, \psi)). \quad (39)$$

Рассмотрим теперь гибридную модель, когда динамика ионов по-прежнему определяется их функцией распределения  $f_i = f_i(\mathcal{E}_i, \mathcal{P}_i)$ , а электроны подчиняются гидродинамическому уравнению движения, которое в предположении бесконечной проводимости и нулевой массы электронов имеет вид

$$\nabla p_e + en \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_e, \mathbf{H}] \right) = 0. \quad (40)$$

Будем предполагать, что  $p_e = p_e(n)$ . Введем функции  $W(n) = \int dp_e/n$  – энтальпию электронов и  $\Phi_T = \Phi - (1/e)W$  – термализованный потенциал. Из (40) следует, что  $\Phi_T = \Phi_T(\psi)$ . Легко также получить выражение для азимутальной скорости электронов

$$V_e = cr \frac{d\Phi_T}{d\psi} \equiv V_e(r, \psi).$$

Пусть теперь нам даны функции  $\Phi_T(\psi)$  и  $f_i(\mathcal{E}_i, \mathcal{P}_i)$ . Тогда вычисление тока  $j^{pl}$  происходит следующим образом.

Имеем соотношения

$$n = \int f_i(\mathcal{E}_i, \mathcal{P}_i) d\mathbf{V} \equiv n(r, \Phi, \psi), \quad \Phi = \Phi_T(\psi) + \frac{1}{e}W(n).$$

С их помощью  $\Phi$  и  $n$  выражаются как функции  $r$  и  $\psi$

$$n=n(r,\psi), \quad \Phi=\Phi(r,\psi).$$

Далее вычисляем азимутальную компоненту ионного тока

$$j_i = e \int V_\varphi f_i(\mathcal{E}_i, \mathcal{P}_i) dV \equiv j_i(r, \psi),$$

и, наконец, плазменный ток

$$j^{pl}(r, \psi) = j_i(r, \psi) - en(r, \psi)V_e(r, \psi).$$

Задача опять свелась к решению одного уравнения вида (39). Определив из него  $\psi(r, z)$ , находим  $n$ ,  $\Phi$ ,  $P_e$  и т.д. как функции  $r$ ,  $z$ .

Полученное уравнение и в кинетическом, и в гибридном подходах напоминает уравнение Грэда-Шафранова, но если там достаточно задать одну функцию одного аргумента  $P(\psi)$  (при наличии только полоидального поля), то здесь требуются две функции –  $f_i(\mathcal{E}_i, \mathcal{P}_i)$  и  $f_e(\mathcal{E}_i, \mathcal{P}_i)$  в кинетической модели или  $f_i(\mathcal{E}_i, \mathcal{P}_i)$  и  $\Phi_T(\psi)$  в гибридной.

Была проведена большая серия расчетов с различными значениями параметров задач [15,46]. Расчеты показали, что существует большое разнообразие в качественном поведении стационарных решений в рассматриваемых моделях. Зависимости  $j^{pl}(r, \psi)$  и  $n(r, \psi)$  от  $\psi$  довольно сложные, и поэтому непросто угадать даже качественные особенности поведения  $\psi(r, z)$ , связанных с решениями (39). Ситуация несколько упрощается, когда конфигурация магнитного поля качественно близка к конфигурации вакуумного поля.

Одним из естественных вопросов является вопрос – существуют ли среди решений этих моделей решения, которые по ряду своих качественных свойств близки к решениям, получаемым в рамках уравнения (15) для тех же самых конфигураций вакуумного магнитного поля. Речь идет о решениях, в которых плазма локализована вблизи сепаратрис этого поля. Расчеты дали положительный ответ на этот вопрос.

## 9. О численных методах

Рассмотренные математические модели ловушек включают в себя численное решение нестационарных и стационарных МГД-задач или задач о МГД-равновесии. Используемые численные методы относятся к вычислительной магнитной газодинамике в целом. Краткий обзор методов охватывает взгляд авторов на положение в этой области, опыт решения задач и некоторые общие тенденции.

Численные методы МГД наследуют богатый опыт и традиции, накопленные в вычислительной гидро-, газо- и аэродинамике, развивают и обобщают этот опыт. В изложенных расчетах отдано предпочтение явным разностным схемам, что отчасти объясняется их экономичностью и логической простотой, отчасти – субъективными вкусами авторов.<sup>9</sup>

Небесполезно упомянуть простейшие разностные схемы типа “крест” с направленными против потока разностями в переносных слагаемых  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$  в применении к МГД-уравнениям (2), (3). Неконсервативная форма записи уравнений требует уделить внимание контролю за выполнением законов сохранения. Такие схемы позволили рассчитывать и исследовать двумерные течения плазмы в коаксиальных каналах-соплах (гладкие) [19], образование нейтрального токового слоя в окрестности нулевой линии магнитного поля [21] и частично – двумерную модель “Галатей-пояса” [24].

Для решения двумерной МГД-задачи о Z-пинче специально разработан оригинальный метод свободных точек В.Ф.Дьяченко [4]. В расчете задачи в лагранжевых координатах

<sup>9</sup> Неявным разностным схемам решения МГД-уравнений в одномерных задачах уделено внимание, например в монографии [47].

удается избежать сильных деформаций сетки благодаря тому, что соседи каждой расчетной точки могут меняться в процессе течения и отбираются в каждый момент времени с помощью эффективно реализованного геометрического алгоритма ("свободные точки"). МГД-величины в следующий момент времени вычисляются по известным формулам решения задачи Коши с волновым уравнением и уравнением теплопроводности с постоянными коэффициентами. Эти формулы применяются к линеаризованным МГД-уравнениям в окрестности каждой точки. Роль начальных данных играют интерполяционные полиномы, построенные по известным значениям величин в соседних точках. В расчете Z-пинча получен нетривиальный режим динамики плазменного фокуса (§ 2) с сильной деформацией и ударной волной.

Метод свободных точек не получил широкого распространения ввиду своей логической сложности. На этом фоне обращаем внимание на недавно опубликованную работу [7], где расчет той же задачи о Z-пинче повторен тем же методом, а также для сравнения проведен двумя современными методами – "поточно-векторного расщепления" (FVS) [48] и "гладкого параболического метода" (PPM) [49] в эйлеровых координатах. МГД-версии последних разработаны А.Г.Аксеновым. Сравнительный анализ результатов, во-первых, подтверждает эффективность и жизнеспособность метода свободных точек, а во-вторых, дает возможность подробно рассмотреть преимущества отдельных деталей каждого из трех методов.

Современные тенденции в развитии и совершенствовании численных алгоритмов диктуются стремлением иметь экономичные методы, как правило, не ниже второго порядка точности с хорошим разрешением на разрывах. Здесь необходимо использовать консервативные разностные схемы, аппроксимирующие МГД-уравнения в консервативной форме. Следует также различать собственно гидродинамическую часть уравнений и диссипативные слагаемые в правой части. Каждый шаг по времени состоит из двух процедур ("расщепление"). Одна имеет дело с гиперболической системой уравнений, другая – с параболическими уравнениями типа теплопроводности. На обсуждаемом уровне моделирования можно, как правило, пренебречь вязкостью и теплопроводностью, а проводимость считать высокой. Поэтому предъявляемые требования к разностным схемам относятся в первую очередь к гиперболическим уравнениям "идеальной" МГД.

В основе многих современных схем лежит идея С.К.Годунова о сохранении монотонности решения при переходе с одного слоя по времени на другой [50], что дает право говорить здесь о разностных схемах годуновского типа. Хорошо известны схемы типа Хартена, которые достигают второго порядка точности после замены требования монотонности более слабым – невозрастания полной вариации решения (TVD, TVNI) [51]. Гиперболическая система уравнений приводится к диагональному виду в каждой точке, что в общем случае МГД – слишком дорогая плата за достоинства схемы. В двумерных МГД-задачах с поперечным магнитным полем схема Хартена успешно реализована Г.А.Калутиним [52]. Имеется опыт ее применения в трехмерной изотермической МГД-задаче [53].

Более экономны разностные схемы с коррекцией потоков (FCT) [54]. Шероховатость решения, связанная с попыткой повысить точность, корректируется нелинейным механизмом с целью ограничить упомянутую выше полную вариацию. Сравнительный анализ методов Хартена и FCT в осесимметричной задаче о течении плазмы за срезом цилиндрического электрода приведен в [55]. Метод FCT в основном использован в расчетах в работах [23, 26-29].

К разностным схемам годуновского типа относятся также упомянутые выше методы FVS и PPM [7, 48, 49].

Схема С.К.Годунова в ее первоначальном виде неприменима в МГД так как не существует эффективного алгоритма решения задачи о распаде произвольного разрыва. Однако в простейшем частном случае уравнений МГД с поперечным магнитным полем эта схема разработана Т.А.Ратниковой [56]. Ею найдено приближенное решение задачи о распаде МГД-разрыва при двух значениях показателя адиабаты  $\gamma = 5/3$  и  $\gamma = 2$ . В ту же схему внесена

модификация (по В.П.Колгану), повышающая порядок аппроксимации до второго. Оба варианта схемы реализованы в расчете области компрессии на оси канала плазменного ускорителя, где устанавливается сложная картина течения с ударной волной и контактным разрывом. Результаты расчетов допускают сравнения с расчетами других авторов, проведенных методами TVD, FCT и более простыми.

“Диссипативный” этап решения МГД-уравнений не требует специального внимания к себе. Если коэффициенты диссипации (например,  $\nu$ ) малы и не вносят дополнительных ограничений на шаг по времени, то к соответствующему “уравнению диффузии” можно применить явную разностную схему. В противоположном случае больших или конечных значений  $\nu$  предпочтительнее неявные схемы, например продольно-поперечная прогонка. Промежуточный вариант – метод локальных итераций [57], в котором явная разностная схема используется несколько раз в пределах одного гидродинамического шага по времени. Этот метод применялся в расчетах [27-29].

В двумерных задачах плазмостатики центральное место математического аппарата – уравнение Пуассона или его нелинейное обобщение – уравнение Грэда Шафранова (22). При численном решении задач оператор Лапласа (и его модификации) аппроксимируется простейшим образом на пятиточечном шаблоне.

Разностная краевая задача в простой прямоугольной области (например, расчет начальных данных (6) в [23]) может быть эффективно решена прямым методом Фурье, т.е. разложением по конечному числу тригонометрических функций.

В остальных случаях использованы итерационные методы, в основном, типа установления (24). Соответствующие параболические уравнения решаются, как и выше с применением неявных разностных схем переменных направлений. Для этого нелинейная правая часть отнесена к предыдущему слою (итерации). В модели “стелларатор-галатей” (15'), (18) уравнения на верхнем слое решены комбинированным методом: Фурье – по углу  $\omega$  (коэффициенты уравнения не зависят от  $\omega$ ) и прогонкой – по радиусу  $r$ .

В той же задаче (15'), (18) подбор граничного значения  $\psi$  можно упростить, если вместо (19) положить

$$p(\psi) = p_0 \exp\left(-\frac{(\psi - \psi_0)^2}{q^2}\right).$$

Значение  $\psi_0 = \psi(0)$  можно считать известным, поскольку правая часть уравнения  $g(\psi)$  берется с предыдущей итерации. В этом случае окончательную роль функции потока в решении играет  $\psi - \psi_0$ , которая не зависит от граничного значения  $\psi_M$ . Указанный способ не просто экономит процесс решения, но вообще говоря ускоряет сходимость итераций и позволяет получить (в некоторых пределах) неустойчивые решения (см. §6). Причина здесь в том, что решение линейной задачи  $u(r, \omega)$  – погрешность итерационного процесса принудительно обращается в нуль при  $r = 0$ , и следовательно, в его разложении по собственным функциям оператора  $L$  отсутствуют старшие моды с ненулевыми значениями в центре. Поэтому показателем роста погрешности становится не старшее собственное значение  $\lambda_1$ , а одно из следующих, расположенное существенно левее.

В заключение авторы с благодарностью отмечают многолетнее плодотворное сотрудничество с А.И.Морозовым, по инициативе и при участии которого выполнены многие работы, включенные в настоящий обзор. Мы благодарны также К.П.Горшенину, Н.М.Зуевой и М.С.Михайловой и Н.Б.Петровской, принимавшим непосредственное участие в этих работах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *И.Е.Тамм, А.Д.Сахаров.* Теория магнитного термоядерного реактора, ч. I-III. //Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций под ред. М.А.Леонтовича. Изд.АН СССР, 1958, т.I, с.3-41.
2. *С.И.Брагинский, И.М.Гельфанд, Р.П.Федоренко.* Теория сжатия и пульсаций плазменного столба в мощном импульсном разряде //Там же, т.IV, с.201.
3. *В.Ф.Дьяченко, В.С.Имшенник.* МГД-теории пинч-эффекта в высокотемпературной плотной плазме //Вопросы теории плазмы /под ред. М.А.Леонтовича. М.Атомиздат. Вып.5, 1967, с.394
4. *В.Ф.Дьяченко, В.С.Имшенник.* Двумерная МГД-модель плазменного фокуса Z-пинча // Там же. Вып.8, 1974, с.164
5. *К.Робертс, Д.Поттер.* Магнитогидродинамические методы //Вычислительные методы в физике плазмы . под ред. Б.Олдера, С.Фернбаха, М.Ротенберга. – М.: Мир, 1974, с.335.
6. *Н.М.Зуева, В.С.Имшенник, О.В.Локуцкий, М.С.Михайлова.* Модель негидродинамической стадии плазменного фокуса. Препринт ИПМ АН СССР, 1975, N 73; Численное исследование плазменного фокуса // Двумерные модели плазмы / под ред. К.В.Брушлинского. М. ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1979, с.150; *Имшенник В.С.* Негидродинамическая модель плазменного фокуса //Там же. с.120.
7. *А.Г.Аксенов, А.В.Герусов.* Сравнение численных методов расчета двумерных МГД-течений, характеризующихся высокой степенью сжатия // Физ. Плазмы, 1995, т.21, №1, с.14.
8. *В.В.Вихрев, О.З.Забайдуллин, А.Р.Терентьев.* Моделирование динамики плазменной оболочки Z-пинча вблизи электродов // Там же, с.23.
9. *В.С.Имшенник, Н.А.Боброва.* Динамика столкновительной плазмы. – М.: Энергоатомиздат, 1997.
10. *Ю.Н.Днестровский, Д.П.Костомаров.* Математическое моделирование плазмы. – М.: Наука, 1982.
11. *Б.А.Трубников.* Теория плазмы. – М.: Энергоатомиздат, 1996.
12. *Г.Бейтман.* МГД-неустойчивости. – М.: Энергоатомиздат, 1982.
13. *В.Д.Пустовитов, В.Д.Шафранов.* Равновесие и устойчивость плазмы в стеллараторах // Вопросы теории плазмы /под ред. Б.Б.Кадоццева. – М.: М.Энерготомиздат, 1987, Вып.15, с.146.
14. *А.И.Морозов.* О магнитных ловушках с "плавающими" в плазме проводниками //Письма в ЖТФ. 1990, т.16, вып.15, с.86; О галатеех – плазменных ловушках с омываемыми плазмой проводниками // Физ.плазмы, 1992, т.18, вып.3, с.305.
15. *А.И.Морозов, В.В.Савельев.* О галатеех-ловушках с погруженными в плазму проводниками // Усп.физ.наук, 1998, т.168, №11, с.1153.
16. *В.Д.Шафранов.* О равновесных МГД-конфигурациях //ЖЭТФ, 1957, т.33, вып.3(9), с.710.
17. *J.L.Johnson, C.R.Oberman, R.M.Kulsrud, E.A.Frieman.* Some stable hydromagnetic equilibria //Phys.Fluids, 1958., v.1, p.281.
18. *С.И.Брагинский.* Явление переноса в плазме // Вопросы теории плазмы /под ред. М.А.Леонтовича, – М.: Атомиздат, 1963, вып.1, с.183.
19. *К.В.Брушлинский, А.И.Морозов.* Расчет двумерных течений плазмы в каналах //там же, 1974, вып.8, с.88.
20. *К.В.Брушлинский, А.И.Козлов, А.М.Заборов, А.И.Морозов, В.В.Савельев.* Численное моделирование течений плазмы в КСПУ // Физ.плазмы, 1990, т.16, вып. 2, с.147.
21. *К.В.Брушлинский, А.М.Заборов, С.И.Сыроватский.* Численный анализ токового слоя в окрестности магнитной нулевой линии // Физ. плазмы, 1980, т.6, вып.2, с.297.
22. *А.И.Морозов, А.Г.Франк.* Торoidalная мультипольная ловушка-галатее с азимутальным током// Физ. плазмы, 1994, т.20, №11, с.982.
23. *К.В.Брушлинский, К.П.Горшенин, А.И.Морозов.* Численное моделирование начальной стадии формирования плазменной конфигурации "Пояс" //Письма в ЖТФ, 1995, т.21, вып.222, с.67; *К.В.Брушлинский, К.П.Горшенин.* Плоская МГД-модель образования плазменной конфигурации с погруженными в нее проводниками // Матем. моделирование, 1997, т.9, №5, с.28.
24. *Г.И.Дудникова, А.И.Морозов, М.П.Федорук.* Численное моделирование прямых плазменных конфигураций - галатей типа "Пояс" //Физ. Плазмы, 1997, т.23, №5, с.387.
25. *А.И.Морозов, М.В.Мурзина.* Простейшие равновесные конфигурации галатей типа "Пояс" //Физ. Плазмы, 1996, т.22, №6, с.551.

26. *К.В.Брушлинский, М.В.Силаков.* Численная модель сжатия плазмы в окрестности токонесящего проводника // Научная конф. МИФИ-99. Сб.науч.трудов, М. МИФИ. 1999, т.1, с.148.
27. *А.И.Морозов, В.В.Савельев.* Двумерное течение сверхзвуковой плазменной струи в магнитном поле дипольного типа. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1987, №176; *В.В.Савельев.* Динамика плазменной струи в магнитном поле. Там же, 1989, №80, 1991, №№114,117.
28. *В.В.Савельев.* МГД-задача о динамике входа плазменной струи в антипробочную ловушку. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 1992, №89.
29. *А.И.Морозов, В.В.Савельев.* Динамика сверхзвуковых плазменных потоков в магнитном поле //Физ. Плазмы, 1996, т.22, №4, с.318.
30. *А.И.Морозов, В.В.Савельев.* Фигуры равновесия идеальной плазмы с  $\beta=1$  в магнитном поле //Физ.плазмы, 1993, т.19, вып.8, с.977.
31. *К.В.Брушлинский, Н.М.Зуева, М.С.Михайлова и др.* Численное моделирование прямых винтовых шнуров с проводниками, погруженными в плазму// Физ. Плазмы, 1994, т.20, №3, с.284; Зависимость свойств плазменных шнуров от шага винта //Там же, 1995, т.21, №3, с.221; *К.В.Брушлинский, А.И.Морозов, Н.Б.Петровская.* Численное моделирование равновесной винтовой конфигурации с плазмой на сепаратрисе //Матем. моделирование, 1998, т.10, №11, с.29.
32. *К.В.Брушлинский, Н.М.Зуева, М.С.Михайлова, Н.Б.Петровская.* О единственности и устойчивости решений двумерных задач плазмостатики //Матем.моделирование, 1995, т.7, №4, с.73.
33. *А.И.Морозов, В.Д.Пустовитов.* О стеллараторе с левитирующими обмотками //Физ.плазмы, 1991, т.17, вып.10, с.1276.
34. *V.Marder, H.Weitzner.* A bifurcation problem in E-layer equilibria // Plasma Phys, 1970, v.12., N6, p.435; *S.Fisher.* Reversed field equilibria in axially symmetric electron current layers// Phys. Fluids .1971, v.14, N5, p.962; *Б.Макнамара.* Равновесие плазмы в магнитном поле// Вычисл. методы в физике. Управляемый термоядерный синтез / под . ред. Дж. Киллина.- М.: Мир, 1980, с.224.
35. *Д.А.Франк-Каменецкий.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. – М.: Изд. АН СССР, 1947.
36. *Я.Б.Зельдович, Г.И.Баренблатт, В.Б.Либрович, Г.М.Махвиладзе.* Математическая теория горения и взрыва. – М.: Наука, 1980.
37. *Н.Н.Семенов.* О некоторых проблемах химической кинетики и реакционной способности. – М.: Изд. АН СССР, 1958.
38. *M.Srouzeix, J.Karrag.* On numerical approximation in bifurcation theory. Masson. Springer, 1990.
39. *И.М.Гельфанд.* Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений //Усп.мат.наук, 1959, Т.ХIV. вып.2(86), с.87.
40. *К.В.Брушлинский, Н.М.Зуева, М.С.Михайлова, С.В.Синько.* Вопросы единственности и устойчивости в одномерных моделях равновесия плазменного шнура // Физ. Плазмы, 1998, т.24, №11, с.973.
41. *Н.М.Зуева, Л.С.Соловьев.* Особенности развития неустойчивости конвективного типа в плазме и газе // Матем. моделирование, 1998, т.10, №10, с.88.
42. *С.И.Брагинский, Б.Б.Кадоццев.* Стабилизация плазмы с помощью охраняющих проводников //Физ. Плазмы и проблем управляемых термоядерных реакций, т.Ш. – М.: Изд. АН СССР, 1958, с.300.
43. Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958. Т.1; Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. – М.: Атомиздат, 1959.
44. *Г.Биркгоф, Э.Сарантонелло.* Струи, следы и каверны. – М.: Мир, 1964; *М.И.Гуревич.* Теория струй идеальной жидкости. – М.: Наука, 1979.
45. *В.В.Савельев.* Фигуры равновесия идеальной плазмы с током в магнитном поле //Физ. плазмы. 1995, т.21, №3, с.216.
46. *А.И.Морозов, В.В.Савельев.* Двумерные стационарные плазменные конфигурации в гибридном приближении //Физ. плазмы, 1995, т.21, №3, с.209.
47. *А.А.Самарский, Ю.П.Попов.* Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1980.
48. *J.L.Stiger, H.K.Warming.* Flux-vector Splitting of the Inviscid Gas Dynamics Equations with Applications to Finite-Difference Methods// J.Comp.Phys, 1981, v.40, p.263.
49. *P.Colella, P.R.Woodward.* The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas Dynamic Simulations // J. Comp. Phys, 1984, v.54, p.174.
50. *С.К.Годунов.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики //Матем. сборник, 1959, т.47(89),. №3, с.271.

51. *A.Harten*. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // *J. Comp. Phys.*, 1983, v.49, p.357.
52. *Г.А.Калугин*. Численный расчет компрессионных течений в канале плазменного ускорителя // *Матем. моделирование*, 1991, т.3, №1, с..25.
53. *А.М.Заборов*. Трехмерная модель динамики плазмы в магнитном поле квадрупольного типа. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1989, №138.
54. *Дж.П.Борис, Д.Л.Бук*. Решение уравнений непрерывности методом коррекции потоков // *Вычисл. методы в физике. Управляемый термоядерный синтез*. /под ред. Дж.Киллина. – М.: Мир,1980, с.92.
55. *К.П.Горшенин, Г.А.Калугин, В.В.Савельев*. Сверхзвуковое МГД-течение в канале за срезом цилиндрического электрода. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1988, №61.
56. *Т.А.Ратникова*. Схема Годунова в МГД задачах с поперечным магнитным полем // *Матем. моделирование*, 1997, т.9, №8, с.3.
57. *В.О.Локуцевский, О.В.Локуцевский*. Применение чебышевских параметров для численного решения некоторых эволюционных задач. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1984, №99; *В.Т.Жуков*. Разностные схемы локальных итераций для параболических уравнений. Там же. 1986, №173.

Поступила в редакцию 02.04.99.