

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Сергей А. Вартанов, Об устойчивости к расколу равновесий в модели эндогенного формирования коалиций, *МТИП*, 2012, том 4, выпуск 1, 3–20

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.226.170.19

4 января 2025 г., 09:43:36



УДК 519.833.2, 519.833.5

ББК 22.18

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ К РАСКОЛУ РАВНОВЕСИЙ В МОДЕЛИ ЭНДОГЕННОГО ФОРМИРОВАНИЯ КОАЛИЦИЙ

СЕРГЕЙ А. ВАРТАНОВ\*

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики  
Московский Государственный Университет  
имени М.В. Ломоносова

119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 52  
e-mail: sergvart@gmail.com

Рассматривается модель эндогенного формирования коалиций в больших множествах игроков (агентов). Предпочтения каждого агента характеризуются его идеальной точкой, при этом агенты распределены на множестве идеальных точек в соответствии с некоторым законом. Политика коалиций определяется как медиана распределения по идеальным точкам ее участников. Выигрыш агента зависит от удаленности его идеальной точки от политики выбранной им коалиции и от ее размера. Рассматриваются случаи монотонной и унимодальной плотности распределения агентов. Исследуется вопрос о необходимых и достаточных условиях для устойчивости равновесий Нэша к расколу существующих в равновесии коалиций.

*Ключевые слова:* формирование коалиций, равновесие Нэша, локальная устойчивость.

---

©2012 С.А. Вартанов

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 11-01-00778-а.

## 1. Введение

Одно из современных направлений в теории игр связано с исследованием моделей эндогенного формирования коалиций в больших множествах игроков, зачастую являющихся неоднородными. Подобные модели находят применение в различных областях знаний – от политической экономики до экономической географии. Так, например, работа [4] посвящена модели формирования государств ("country formation problem"). Работа [6] описывает модель образования юрисдикций для размещения ими общественных благ, как и работа [8]. Еще одной областью применения моделей эндогенного формирования коалиций является политология. В частности, в работах [9–10] рассматриваются модели формирования политических партий ("parties formation").

Несмотря на разнообразие областей применения моделей эндогенного формирования коалиций, можно выделить общие черты, характерные для всех них. Так, во всех случаях рассматривается некоторое множество агентов, каждый из которых характеризуется своей идеальной точкой, отражающей его предпочтение на некотором множестве. Часто в качестве этого множества рассматривается отрезок числовой прямой. В зависимости от области применения модели идеальная точка агента может интерпретироваться как желаемая величина налога, политическая программа, наиболее близкая его интересам, место его жительства и т. д. Функция выигрыша агента зависит от расстояния между его идеальной точкой и точкой, соответствующей выбору коалиции, к которой примкнул агент, а также от размера этой коалиции. При этом предполагается, что чем ближе идеальная точка агента к выбору коалиции и чем больше ее размер, тем больше выигрыш агента. Итоговый выбор коалиции чаще всего определяется как идеальная точка медианного ее члена, так как медиана получит большее количество голосов членов коалиции при сравнении с любой другой альтернативой. Кроме того, в некоторых случаях такое определение итогового выбора коалиции является эффективным с точки зрения максимизации суммарного благосостояния ее участников ([2]).

Для моделей эндогенного формирования коалиций важнейшим вопросом является равновесность и устойчивость получающейся ко-

## Устойчивость к расколу в модели формирования коалиций 5

алиционной структуры, что представляет основной объект исследования во всех указанных выше работах. В качестве решения используется как равновесие Нэша [5, 12], так и другие концепции равновесия. Так, в работе [9] используется сильное равновесие, а модель, предложенная в [8], основана на кооперативной игре с побочными платежами, где в качестве решения выступает  $\delta$ -ядро.

В настоящей работе развивается модель эндогенного формирования коалиций, изучавшаяся в работах [2] и [12]. Основными отличительными свойствами этой модели, сохраненными в настоящей работе, являются отсутствие побочных платежей и некооперативный характер решения.

В указанных работах основные результаты получены в предположении равномерного распределения агентов по идеальным точкам. На практике типичны ситуации, когда распределение агентов по идеальным точкам не является равномерным. Например, при исследовании формирования государств или размещения общественных благ рассматривается распределение населения по реальным территориям, очевидно, не являющееся равномерным. Другим примером является распределение граждан в соответствии с их политическими убеждениями, используемое в моделях формирования политических партий. Многими социологическими исследованиями фиксируется преобладание тех или иных взглядов в обществе. Такая структура убеждений не может описываться равномерным распределением.

Целью данной работы является исследование устойчивости равновесий Нэша к расколу входящих в него коалиций при неравномерном распределении агентов. В работе [2] подобное исследование производилось для конкретной функций выигрыша агентов (с линейной зависимостью как от размера коалиции, так и от удаленности идеальной точки агента от итогового выбора коалиции). В настоящей работе получены результаты для функций выигрыша общего вида. В разделе 2 приведено формальное описание исследуемой модели. В разделе 3 исследуется устойчивость равновесий к расколу. В последнем разделе подводятся краткие итоги работы и описываются возможные направления дальнейших исследований. В приложении содержатся доказательства утверждений.

## 2. Модель

Приведем формальное описание игры в случае неравномерного распределения игроков, следуя [12]. Множество идеальных точек агентов представляет собой отрезок  $X = [0, 1]$ . Распределение агентов по идеальным точкам описывается функцией плотности  $f(x)$ ,  $x \in X$ . Далее предполагается, что  $f(x)$  либо унимодальна, либо монотонна. Заметим, что ситуации монотонного возрастания и монотонного убывания не являются принципиально различными, так как получаются одна из другой с помощью линейной замены переменной.

Обозначим  $F(x) = \int_0^x f(x) dx$  функцию распределения агентов по идеальным точкам. Она существует и непрерывна для любой интегрируемой на  $X$  плотности распределения  $f(x) > 0$ . Очевидно, что  $F(x)$  монотонно возрастает на отрезке  $[0, 1]$ ,  $F(0) = 0$ ,  $F(1) = 1$ . Кроме того, существует обратная функция  $g(r) = F^{-1}(r)$ , определенная на  $[0, 1]$  и также непрерывная и возрастающая.

Каждый агент выбирает стратегию из множества  $I^0 = \{0, 1, \dots, m\}$ , представляющего собой конечный набор меток: «Коалиция 1», «Коалиция 2», ..., «Коалиция  $i$ », ..., «Коалиция  $m$ ». Выбирая одну из меток, агент присоединяется к соответствующей коалиции, или же воздерживается, не вступая ни в одну из них (что соответствует метке «0»). Набор стратегий всех агентов задает множество непустых коалиций  $\bar{I}$  и набор функций  $f_i(x)$  плотности распределения на множестве  $X$  агентов, выбравших коалицию  $i \in \bar{I} \cup \{0\}$ . Рассматриваются такие наборы стратегий, что каждой коалиции соответствует интегрируемая функция  $f_i(x) \geq 0$ , а  $\sum_{i \in \bar{I}} f_i(x) \equiv f(x)$ . Размер  $r_i$  коалиции

$i$  пропорционален доле ее сторонников ( $r_i = \int_0^1 f_i(x) dx$ ), а ее итоговая политика  $p_i$  определяется как медиана распределения с плотностью  $f_i(x)$ :  $\int_0^{p_i} f_i(x) dx = \int_{p_i}^1 f_i(x) dx$ . Множество  $X_i = \{x \in X : f_i(x) > 0\}$

называется *носителем коалиции*  $i \in \bar{I}$ . Коалиция  $i$  называется *связной*, если ее носитель  $X_i$  представляет собой интервал, и *несвязной* в ином случае.

Выигрыш агента с идеальной точкой  $x$  в случае, если он присоединяется к коалиции  $i$  с размером  $r_i$  и политикой  $p_i$ , равен  $U(x, r_i, p_i) = R(r_i) - L(|x - p_i|)$ , где  $L(\cdot)$ ,  $R(\cdot)$  – возрастающие по своим аргу-

## Устойчивость к расколу в модели формирования коалиций 7

ментам функции. Выигрыш, получаемый агентом в случае неприсоединения ни к одной из коалиций, считается нулевым.

*Равновесием Нэша* в рассматриваемой модели является такой набор стратегий агентов, в котором каждый из них присоединяется к той коалиции, в которой он имеет максимальный выигрыш при условии, что остальные не изменяют своего выбора:

$$\forall i : \forall x \in X_i \quad i \in \underset{j \in \bar{I}}{\text{Argmax}} U(x, r_j, p_j). \quad (2.1)$$

Согласно [2], *регулярным равновесием Нэша* называется такое равновесие, в котором политики всех коалиций различны:  $\forall i, j \in \bar{I} : i \neq j \Rightarrow p_i \neq p_j$ . Так как нерегулярные равновесия заведомо неустойчивы к объединению коалиций с одинаковыми политиками, далее рассматриваются только регулярные равновесия. Следующее утверждение, доказанное в работе [2], описывает структуру регулярного равновесия.

**Утверждение 2.1** (о структуре регулярного равновесия). *Если  $L(x)$  – выпукла, то в регулярном равновесии Нэша каждой коалиции  $i \in \bar{I}$  соответствует единственный интервал  $X_i \subseteq X$ , такой, что  $\forall x \in X_i \quad f_i(x) = f(x)$  и  $\forall x \in X \setminus \bar{X}_i \quad f_i(x) = 0$ , где  $\bar{X}_i$  – замыкание  $X_i$ .*

Таким образом, множество  $X$  в регулярном равновесии разбивается на конечное число непересекающихся интервалов  $X_i$ ,  $i \in \bar{I}$ , и множество  $X_0$ , где  $X_i$  с точностью до множества идеальных точек меры нуль совпадает с носителем коалиции  $i$ , а  $X_0$  соответствует множеству игроков, воздержавшихся от присоединения к коалициям. Поэтому далее предполагается, что для любой рассматриваемой коалиции с плотностью  $h(x)$  и носителем  $X'$   $h(x) = f(x)$  при  $x \in X'$  и  $h(x) = 0$  при  $x \notin X'$ .

На рис. 1 показан пример регулярного равновесия, состоящего из 5 коалиций и двух интервалов игроков, воздержавшихся от присоединения. Политики коалиций –  $p_i$ ,  $i = \bar{1}, \bar{5}$ , а  $c_i$ ,  $i = \bar{1}, \bar{7}$  – идеальные точки их граничных агентов.

Будем считать, что коалиции упорядочены по их расположению на множестве  $X$ . Коалиции  $i$  и  $i + 1$ , носители  $X_i$  и  $X_j$  которых имеют общую граничную точку  $c$ , будем называть соседними. Выигрыш агента с идеальной точкой  $c$  одинаков в случае его присоединения



Рисунок 1. Возможный вид регулярного равновесия

как к  $i$ , так и к  $i + 1$  коалиции. Соответствующее равенство назовем *уравнением безразличия граничного агента*, оно имеет вид

$$R(r_i) - L(c - p_i) = R(r_{i+1}) - L(p_{i+1} - c).$$

На рис. 1 такими граничными агентами являются агенты с идеальными точками  $c_1$  и  $c_6$ . Если множество  $X_i$  граничит с множеством  $X_0$ , то соответствующий граничный агент получает нулевой выигрыш. Таким агентам на рис. 1 соответствуют идеальные точки  $c_2, c_3, c_4, c_5$ . Для монотонного распределения структуру равновесия можно охарактеризовать более точно.

**Утверждение 2.2.** Пусть функция плотности  $f(x)$  монотонно возрастает. Тогда в любом равновесии Нэша множество  $X_0$  либо пусто, либо представляет собой единственный интервал вида  $X_0 = (0, c)$ , где  $c \in [0, 1]$ .

Доказательство этого и последующих утверждений приведено в Приложении.

Таким образом, в случае монотонно возрастающей плотности распределения коалиции в равновесии расположены последовательно: правая граница предыдущей коалиции является левой границей последующей. Кроме того, может существовать интервал  $X_0$  воздержавшихся от присоединения игроков, лежащий левее всех коалиций.

### 3. Устойчивость равновесий Нэша к расколу

Согласно [2], равновесие называется *устойчивым к расколу*, если для любой коалиции в нем не существует собственного подмножества ее участников такого, что все они получают большие выигрыши в том случае, если бы они сформировали отдельную коалицию, т. е.  $\forall i \in \bar{I}$ :

$$\nexists X' \subset X_i : \forall x \in X' \quad U(x, r', p') \geq U(x, r_i, p_i), \quad (3.1)$$

## Устойчивость к расколу в модели формирования коалиций 9

где  $p'$  – политика, а  $r'$  – размер коалиции с носителем  $X'$ .

Коалиции, для которых выполнено (3.1), также называются устойчивыми к расколу.

В работе [3] доказана следующая теорема.

**Теорема 3.1.** *Пусть плотность распределения  $f(x)$  монотонна,  $L(\cdot)$  и  $R(\cdot)$  дважды дифференцируемы,  $L(\cdot)$  выпукла,  $R(\cdot)$  вогнута,  $L''(\cdot)$  возрастает, а  $R''(\cdot)$  убывает. Тогда любое равновесие Нэша устойчиво к расколу.*

Цель данной работы – исследовать, какие из условий, наложенных в теореме 3.1 на функцию выигрыша, являются необходимыми, и попытаться расширить класс функций выигрыша, для которых из равновесности структуры по Нэшу следует ее устойчивость к расколу.

**Теорема 3.2.** *Пусть плотность распределения  $f(x)$  монотонна,  $L(\cdot)$  и  $R(\cdot)$  дважды дифференцируемы,  $L(\cdot)$  выпукла,  $R(\cdot)$  вогнута, а  $R''(\cdot)$  убывает. Тогда любое равновесие Нэша устойчиво к расколу.*

Рассмотрим еще один важный класс распределений агентов по идеальным точкам – распределения с унимодальной плотностью.

**Теорема 3.3.** *Пусть плотность распределения  $f(x)$  унимодальна и достигает максимума в точке  $M \in (0, 1)$ , а для функций  $L(\cdot)$  и  $R(\cdot)$  выполнены условия теоремы 3.2. Тогда любое равновесие Нэша устойчиво к расколу.*

**Замечание 3.1.** Справедливо более общее утверждение: для рассмотренных в теоремах 3.2 и 3.3 распределений при выполнении указанных условий устойчивыми к расколу оказываются любые связные коалиции, в которых выигрыш граничных агентов неотрицателен.

За счет отказа от условия о возрастании  $L''(x)$  в теореме 3.2 мы расширили (по сравнению с результатами, полученными в [12]) класс функций выигрыша, для которых любое регулярное равновесие Нэша устойчиво к расколу. Обсудим условия, накладываемые теоремой 3.2 на функцию  $R(\cdot)$ . Далее будем полагать, что распределение игроков равномерно:  $f(x) \equiv 1$ , а  $L(x)$  линейна:  $L(x) = x$ . Тогда для любой возрастающей функции справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 3.1.** *Коалиция размера  $r$  устойчива к расколу тогда и только тогда, когда*

$$R(x) - \frac{3x}{2} \leq R(r) - \frac{r}{2}, \forall x \in \left(0, \frac{r}{2}\right). \quad (3.2)$$

Уточним условия устойчивости для вогнутой функции  $R(\cdot)$ . Так как мы не требуем непрерывной дифференцируемости, обозначим  $R'_-(x)$ ,  $R'_+(x)$  – производные слева и справа в точке  $x$ .

**Утверждение 3.2.** *Пусть  $R(\cdot)$  вогнута. Если для любого  $x \in (0, \frac{r}{2})$   $\frac{3}{2} \notin [R'_-(x), R'_+(x)]$ , то коалиция размера  $r$  устойчива к расколу. Иначе для устойчивости к расколу необходимо и достаточно, чтобы условие (3.2) выполнялось для  $x^* \in (0, \frac{r}{2})$ , такого, что  $\frac{3}{2} \in [R'_-(x^*), R'_+(x^*)]$ .*

Из утверждения 3.2 следует, что вогнутости функции  $R(\cdot)$  недостаточно для устойчивости к расколу (см. Примеры 3.1, 3.3а). В то же время условие убывания  $R''(\cdot)$  не является необходимым, и существуют вогнутые функции  $R(\cdot)$ , для которых любое равновесие устойчиво к расколу (см. Примеры 3.2, 3.3б).

**Пример 3.1.** Рассмотрим кусочно-линейную функцию

$$R(r) = \begin{cases} 9r, & r < \frac{1}{10}, \\ \frac{r+8}{9}, & r \geq \frac{1}{10}. \end{cases}$$

Для такой функции  $R(r) - \frac{r}{2} > 0, \forall r \in (0, 1)$ , то есть выигрыш граничных агентов неотрицателен в любой коалиции. Следовательно, для любого натурального  $n$  коалиционная структура, состоящая из  $n$  коалиций одинакового размера  $\frac{1}{n}$ , является равновесием Нэша. В точке  $x^* = \frac{1}{10}$  у  $R'(x)$  имеется разрыв первого рода и  $[R'_-(x^*), R'_+(x^*)] = [\frac{1}{9}, 9]$ . Из утверждения 3.2 следует, что коалиция неустойчива к расколу тогда и только тогда, когда ее размер  $r > \frac{5}{14}$ . Следовательно, равновесие, состоящее из одной коалиции размера 1 или из двух коалиций размера  $\frac{1}{2}$ , неустойчиво, а из  $n \geq 3$  одинаковых коалиций устойчиво к расколу.

**Пример 3.2.** Рассмотрим кусочно-линейную функцию

$$R(r) = \begin{cases} \frac{4r}{3}, & r < \frac{3}{10}, \\ r + \frac{1}{10}, & r \geq \frac{3}{10}. \end{cases}$$

Условие  $R(r) - \frac{r}{2} > 0$  выполнено  $\forall r \in (0, 1)$ , то есть выигрыш граничных агентов в любой коалиции неотрицателен. В точке  $x^* = 0.3$  у  $R'(x)$  имеется разрыв первого рода. Однако  $R'_+(x) \leq 4/3, \forall x \in (0, 1)$ . Следовательно, любое равновесие Нэша устойчиво к расколу.

**Пример 3.3.** Пусть  $R(r) = r^\lambda$ , где  $\lambda \in (0, 1)$ . Условие  $R(r) - \frac{r}{2} > 0$  выполнено  $\forall r$ . Производная  $R'(1) = \lambda < \frac{3}{2}$  и  $R'(x)$  неограниченно возрастает при  $x \rightarrow 0$ . Следовательно, существует  $x^* = \left(\frac{2\lambda}{3}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}$ , такой, что  $R'(x^*) = \frac{3}{2}$ . Рассмотрим коалиции, для которых  $x^* \in (0, \frac{r}{2})$ , то есть  $r \in (2x^*, 1)$ . Согласно утверждению 3.2, коалиция размера  $r$  устойчива  $\Leftrightarrow x^{*\lambda} - \frac{3x^*}{2} \geq r^\lambda - \frac{r}{2}$ . Для  $r = 2x^*$  неравенство выполнено. Следовательно, в силу вогнутости функции  $r^\lambda - \frac{r}{2}$ , устойчивость к расколу любого равновесия Нэша эквивалентна устойчивости к расколу коалиции размера 1, состоящей из всех игроков, то есть выполнению неравенства  $x^{*\lambda} - \frac{3x^*}{2} \leq \frac{1}{2}$ .

**а)** При  $\lambda = 0.05$ ,  $x^* = \left(\frac{1}{30}\right)^{\frac{20}{19}}$ ,  $x^{*\lambda} - \frac{3x^*}{2} \approx 0.8 > \frac{1}{2}$  – условие устойчивости к расколу коалиции размера 1 не выполнено. Максимально допустимый размер устойчивой к расколу коалиции определяется из условия  $r^\lambda - \frac{r}{2} = x^{*\lambda} - \frac{3x^*}{2}$ , откуда  $r \approx 0.29$ . Равновесие Нэша, состоящее из  $n$  коалиций размера  $\frac{1}{n}$ , неустойчиво к расколу при  $n \leq 3$  и устойчиво к расколу для  $n \geq 4$ .

**б)** При  $\lambda = 0.5$ ,  $x^* = \frac{1}{9}$ ,  $x^{*\lambda} - \frac{3x^*}{2} = \frac{1}{6} < \frac{1}{2}$ . Следовательно, любое равновесие Нэша устойчиво к расколу.

#### 4. Заключение

В работе исследована модель эндогенного формирования коалиций с функцией выигрыша агентов  $U(x, r_i, p_i) = R(r_i) - L(|p_i - x|)$ . Модель исследовалась в предположении, что распределение агентов по идеальным точкам обладает монотонной либо унимодальной плотностью. Рассмотрен вопрос об устойчивости равновесий Нэша к расколу. Показано, что в случае, когда плотность распределения агентов

по идеальным точкам монотонна или унимодальна, любое равновесие Нэша является устойчивым к расколу, если функция  $R$  вогнута, ее вторая производная убывает, а функция  $L$  выпукла.

В дальнейшем представляет интерес поиск условий существования коалиционных равновесий (то есть равновесий, устойчивых к образованию любой новой коалиции) и обобщение соответствующих результатов работы [12] для неравномерного распределения агентов.

Возможно также изменение модели, отражающее зависимость выигрыша агентов не только от характеристик «его» коалиции, но и всей структуры. В реальных ситуациях редко бывает так, чтобы влияние коалиции зависело бы только от ее размера. Для более точного отражения влияния коалиций можно рассматривать индексы влияния Шепли-Шубика, Банцафа и др. (см. [1]).

## 5. Приложение

### 5.1. Доказательство утверждения 2.2

Если  $f(x)$  возрастает, то в любой коалиции  $X_i = (c_{i-1}, c_i)$  политика коалиции  $p_i$  смещена вправо относительно середины интервала  $(c_{i-1}, c_i)$ . Следовательно,  $U(c_{i-1}, r_i, p_i) < U(c_i, r_i, p_i)$ .

Если коалиция  $X_i$  граничит с множеством  $X_0$ , то игрок, чья идеальная точка лежит на границе этих множеств, получает нулевой выигрыш. Если  $U(c_i, r_i, p_i) = 0$  (то есть  $X_i$  граничит с множеством  $X_0$  справа), то  $U(c_{i-1}, r_i, p_i) < 0$ . Такая коалиционная структура не является равновесием Нэша, так как игроку с идеальной точкой  $c_{i-1}$  выгодно воздержаться от участия в коалиции и получить нулевой выигрыш.

Таким образом, множество  $X_0$  в равновесии Нэша должно располагаться левее всех коалиций.

### 5.2. Доказательство теоремы 3.2

Пусть  $f(x)$  не убывает (для невозрастающей функции рассуждения аналогичны). Рассмотрим произвольную коалицию  $X_i = (c_{i-1}, c_i)$  с размером  $r_i$  и политикой  $p_i$  и откалывающуюся от нее коалицию  $X_s \subset X_i$  с размером  $r$  и политикой  $p$ .

1) Сначала рассмотрим случай, когда в коалицию  $X_s$  входят игроки с идеальными точками как слева, так и справа от  $p_i$ . Обозначим

$\Delta U(x) = R(r) - L(|p - x|) - R(r_i) + L(|p_i - x|)$  – прирост выигрыша игрока с идеальной точкой  $x$  от присоединения к коалиции  $X_s$ . Если  $p \geq p_i$ , то  $\forall x \leq p_i \Delta U(x) \leq 0$  (так как  $r < r_i$ , а  $p - x \geq p_i - x$ ). Следовательно, образование такой коалиции невыгодно. Для  $p < p_i$  рассуждения аналогичны.

2) Рассмотрим случай, когда отделяющаяся коалиция целиком располагается слева от  $p_i$  (рис. 2).

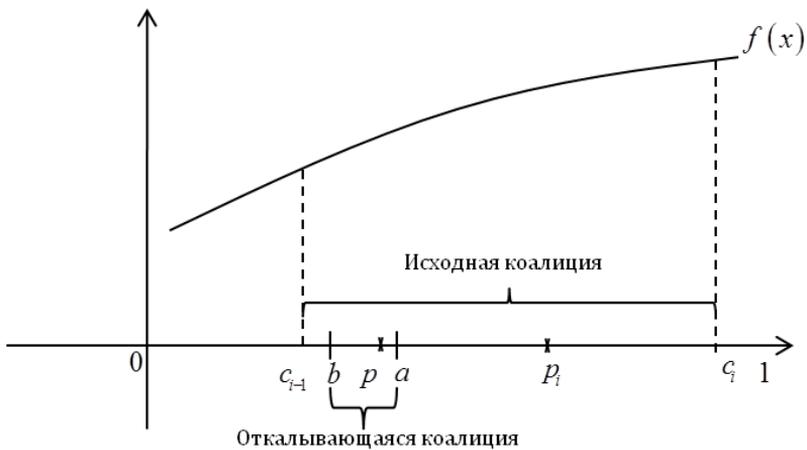


Рисунок 2. Раскол коалиции слева от ее политики

Пусть  $\overline{X}_s = [b, a]$ . Рассмотрим прирост выигрыша агента с идеальной точкой  $x \in \overline{X}_s$  от присоединения к этой коалиции:  $\Delta U(x) = R(r) - R(r_i) + L(p_i - x) - L(|p - x|)$ .

Если  $x < p$ , то  $\Delta U'(x) = L'(p - x) - L'(p_i - x) \leq 0$ , так как  $p - x < p_i - x$ , а  $L'(\cdot)$  не убывает в силу выпуклости  $L(\cdot)$ . Если  $x \geq p$ , то  $\Delta U'(x) = -L'(p_i - x) - L'(x - p) < 0$ , так как  $L'(\cdot) > 0$  в силу возрастания функции  $L(\cdot)$ . Следовательно,  $\Delta U(x)$  не возрастает на множестве  $\overline{X}_s$  и  $\Delta U(a) = \min_{x \in \overline{X}_s} \Delta U(x) = R(r) - R(r_i) + L(p_i - a) - L(a - p)$ .

Таким образом, образование коалиции  $X_s$  невыгодно тогда и только тогда, когда это невыгодно ее участнику, чья идеальная точка ближе всего к политике исходной коалиции, то есть когда  $\Delta U(a) \leq 0$ .

Заметим, что выигрыш игрока  $a$  в несвязной откалывающейся коалиции не больше, чем его выигрыш в случае образования связной

коалиции того же размера, где он также является граничным игроком (так как в этом случае политика  $p$  ближе к  $a$ ). Поэтому далее будем рассматривать связанные коалиции вида  $X_s = (b, a)$ .

Так как  $R(r_i) > R(r_i - r)$ , а  $L(a - p) > 0$ , то

$$\begin{aligned} \Delta U(a) &= R(r) - R(r_i) + L(p_i - a) - L(a - p) \leq \\ &\leq U_{maj}(a) \stackrel{def}{=} R(r) - R(r_i - r) + L(|p_i - a|) . \end{aligned}$$

Учитывая, что  $R'(a) = \left( \int_b^a f(x) dx \right)' = f(a)$ , найдем  $U''_{maj}(a)$ :

$$\begin{aligned} U''_{maj}(a) &= f^2(a) (R''(r) - R''(r_i - r)) + \\ &+ f'(a) (R'(r) + R'(r_i - r)) + L''(p_i - a) . \end{aligned}$$

Так как  $r < \frac{r_i}{2}$ , то  $r < r_i - r$  и, в силу убывания  $R''(\cdot)$ ,  $R''(r) > R''(r_i - r)$ . Учитывая также, что  $f'(a) \geq 0$  в силу неубывания  $f(\cdot)$ ,  $R'(\cdot) > 0$  в силу возрастания  $R(\cdot)$ , а  $L''(\cdot) \geq 0$  в силу выпуклости  $L(\cdot)$ , получаем, что  $U''_{maj}(a) > 0$ , то есть  $U_{maj}(a)$  – вогнута.

Так как  $U_{maj}(b) = -(R(r_i) - L(p_i - b)) = -U(b, r_i, p_i) \leq 0$  и  $U_{maj}(p_i) = R(r) - R(r_i - r) \leq 0$ , то  $U_{maj}(a) \leq 0, \forall a \in [b, p_i]$ . Так как  $b$  – произвольная точка множества  $[c_{i-1}, p_i]$ , то образование любой новой коалиции слева от  $p_i$  невыгодно правому граничному агенту этой коалиции.

**3)** Теперь рассмотрим ситуацию, когда откалывающаяся коалиция  $X_s$  лежит целиком справа от  $p_i$  (рис. 3).

Аналогично случаю 2), образование коалиции справа от  $p_i$  невыгодно тогда и только тогда, когда это невыгодно ее участнику, чья идеальная точка ближе всего к политике исходной коалиции. Причем достаточно рассматривать только связанные коалиции. Итак, покажем, что  $\Delta U(a_r) \leq 0$  для любой коалиции  $X_s = (a_r, b_r) \subset (p_i, c_i)$ .

$$\begin{aligned} \Delta U(a_r) &= R(r) - L(p - a_r) - R(r_i) + L(a_r - p_i) \leq \\ &\leq U_{maj}(a_r) = R(r) - R(r_i - r) + L(a_r - p_i) . \end{aligned}$$

Рассмотрим расположенную слева от  $p_i$  коалицию коалицию  $(b, a_l)$  того же размера  $r$ , такую что  $\int_{c_{i-1}}^{a_l} f(x) dx = \int_{a_r}^{c_i} f(x) dx$  (рис. 3). В этом

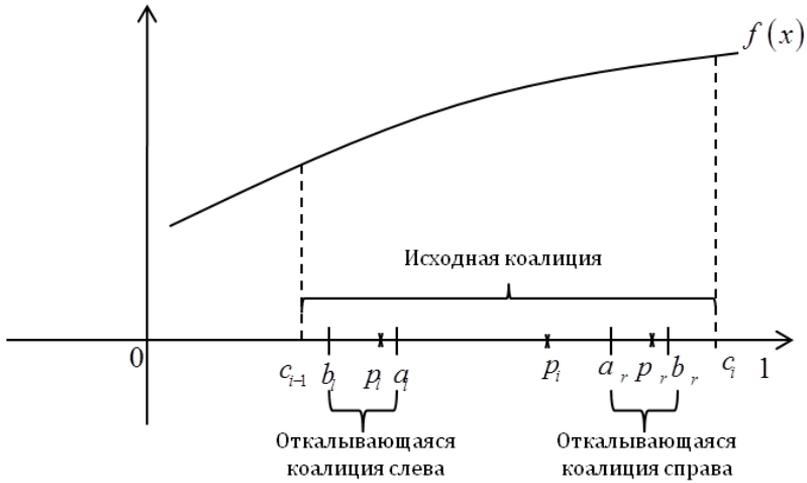


Рисунок 3. Раскол коалиции слева от ее политики

случае  $\int_{a_l}^{p_i} f(x) dx = \int_{p_i}^{a_r} f(x) dx$ . В силу теоремы о среднем значении, отсюда следует, что существуют такие точки  $\xi_l \in [a_l, p_i]$  и  $\xi_r \in [p_i, a_r]$ , что для них  $f(\xi_l) \cdot (p_i - a_l) = f(\xi_r) \cdot (a_r - p_i)$ . Так как  $f(\xi_l) \leq f(\xi_r)$  в силу неубывания  $f(\cdot)$ , то  $p_i - a_l \geq a_r - p_i$ . Таким образом,  $U_{maj}(a_r) = R(r) - R(r_i - r) + L(a_r - p_i) \leq R(r) - R(r_i - r) + L(p_i - a_l)$ . Выражение, стоящее в правой части неравенства, представляет собой функцию-мажоранту  $U_{maj}(a_l)$  из предыдущей части доказательства и (по уже доказанному)  $U_{maj}(a_l) \leq 0$  для любых  $a_l$ . Следовательно, для любого  $a_r \in (p_i, c_i)$   $U_{maj}(a_r) \leq 0$ , откуда следует, что  $\Delta U(a_r) \leq 0$ .

### 5.3. Доказательство теоремы 3.3

Рассмотрим произвольную коалицию  $X_i = (c_{i-1}, c_i)$  с размером  $r_i$  и политикой  $p_i$ . Случай, когда эта коалиция целиком расположена на одном из участков монотонности функции плотности  $f(x)$ , принципиально не отличается от случая, рассмотренного в теореме 3.2. Остается рассмотреть случай, когда  $M \in X_i$ . Не ограничивая общности, полагаем  $M \geq p_i$ .

В случае, когда откалывающаяся коалиция  $X_s$  целиком расположена слева от  $M$  (на участке монотонности  $f(x)$ ), и в случае, когда в  $X_s$  входят игроки с идеальными точками как слева, так и справа от

$p_i$ , рассуждения полностью аналогичны доказательству теоремы 3.2.

Остается исследовать случаи, когда  $X_s$  целиком расположена справа от  $p_i$  и при этом  $M \in \overline{X_s}$  (случай 1), и случай, когда  $X_s$  целиком расположена справа от  $M$  (случай 2).

1) Пусть  $X_s$  целиком расположена справа от  $p_i$  и  $M \in \overline{X_s}$  (см. рис. 4).



Рисунок 4. Раскол коалиции, содержащей точку максимума  $f(x)$

Идея дальнейшего доказательства схожа с идеей последней (третьей) части доказательства теоремы 3.2. Повторяя аналогичные рассуждения, несложно видеть, что образование коалиции невыгодно тогда и только тогда, когда это невыгодно ее участнику, чья идеальная точка ближе всего к политике исходной коалиции. Причем достаточно рассматривать только связанные откальзывающиеся коалиции вида  $X_s = (a_r, b_r)$ . Итак, рассмотрим прирост выигрыша левого граничного агента от присоединения к коалиции  $X_s$ :

$$\Delta U(a_r) = R(r) - L(p - a_r) - R(r_i) + L(a_r - p_i) .$$

Покажем, что  $\Delta U(a_r) \leq 0$ .

$$\Delta U(a_r) \leq U_{maj}(a_r) = R(r) - R(r_i - r) + L(a_r - p_i) .$$

Рассмотрим расположенную слева от  $p_i$  коалицию  $(b_l, a_l)$  того же размера  $r$ , такую, что  $\int_{c_{i-1}}^{a_l} f(x) dx = \int_{a_r}^{c_i} f(x) dx$  (рис. 3). В этом случае  $\int_{a_l}^{p_i} f(x) dx = \int_{p_i}^{a_r} f(x) dx$ . В силу теоремы о среднем значении отсюда следует, что существуют такие точки  $\xi_l \in [a_l, p_i]$  и  $\xi_r \in [p_i, a_r]$ , что для них  $f(\xi_l) \cdot (p_i - a_l) = f(\xi_r) \cdot (a_r - p_i)$ . Так как  $a_r \leq M$ , то  $f(x)$  не убывает на  $[a_l, a_r]$ , следовательно  $f(\xi_l) \leq f(\xi_r)$ . Откуда получаем, что  $p_i - a_l \geq a_r - p_i$ . Таким образом,  $U_{maj}(a_r) = R(r) - R(r_i - r) + L(a_r - p_i) \leq R(r) - R(r_i - r) + L(p_i - a_l)$ . Выражение, стоящее в правой части неравенства, представляет собой функцию-мажоранту  $U_{maj}(a_l)$  для коалиции  $(b_l, a_l)$ , расположенной на участке монотонности  $f(x)$ . Из доказательства теоремы 3.2 (случай 2)  $U_{maj}(a_l) \leq 0$  для любых  $a_l$ . Следовательно, для  $U_{maj}(a_r) \leq 0$ , откуда следует, что  $\Delta U(a_r) \leq 0$ .

2) Пусть  $X_s$  целиком расположена справа от  $M$  (см. рис. 5).

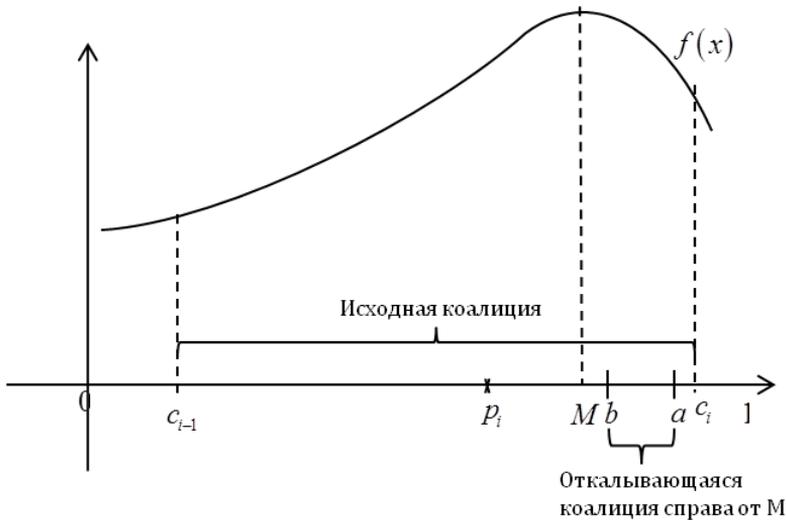


Рисунок 5. Раскол коалиции справа от точки максимума  $f(x)$

Также, как и в случае 1, достаточно рассмотреть связанные коалиции вида  $X_s = (a_r, b_r)$  и показать, что  $\Delta U(a_r) = R(r) - L(p - a_r) - R(r_i) + L(a_r - p_i) \leq 0$ . Идея доказательства схожа с идеей второй

части доказательства теоремы 3.2.

$$\Delta U(a_r) \leq U_{maj}(a_r) = R(r) - R(r_i - r) + L(a_r - p_i).$$

Учитывая, что  $R'(a_r) = -f(a_r)$ , найдем  $U''_{maj}(a)$ :

$$U''_{maj}(a_r) = f^2(a_r)(R''(r) - R''(r_i - r)) - \\ - f'(a)(R'(r) + R'(r_i - r)) + L''(a_r - p_i).$$

Так как  $r < \frac{r_i}{2}$ , то в силу убывания  $R''(\cdot)$ ,  $R''(r) > R''(r_i - r)$ . Учитывая, что  $f'(a_r) \leq 0$ ,  $R'(\cdot) > 0$ , а  $L''(\cdot) \geq 0$ , получаем, что  $U''_{maj}(a_r) > 0$ , то есть  $U_{maj}(a_r)$  – вогнута на  $[M, b_r]$ .

$$U_{maj}(b_r) = -(R(r_i) - L(b_r - p_i)) \leq 0$$

Для коалиции вида  $(M, b_r)$  в предыдущем пункте доказательства показано, что  $U_{maj}(M) \leq 0$ . Следовательно,  $U_{maj}(a_r) \leq 0$ ,  $\forall a \in [M, b_r]$ , откуда следует, что  $\Delta U(a_r) \leq 0$ ,  $\forall a \in [M, b_r]$ . Так как  $b_r$  – произвольная точка множества  $[M, c_i]$ , то образование любой новой коалиции справа от  $M$  невыгодно.

#### 5.4. Доказательство утверждения 3.1

Без ограничения общности рассмотрим коалицию  $X_1 = (0, r)$  с политикой  $p = \frac{r}{2}$  и исследуем ее устойчивость к расколу. Из доказательства теоремы 3.2 следует, что коалиция устойчива к расколу тогда и только тогда, когда образование любой связной коалиции невыгодно ее участнику, чья идеальная точка ближе всего к политике исходной коалиции. В данном случае достаточно показать, что для любой коалиции  $(b, a) \subset (0, \frac{r}{2})$  прирост выигрыша правого граничного игрока  $\Delta U(a) \leq 0$ . Обозначим  $\varepsilon = a - b$  – размер откалывающейся коалиции. Тогда  $\Delta U(a) = R(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} - R(r) + \frac{r}{2} - a$ .  $\Delta U'(a) = -1$ , следовательно образование коалиции размера  $\varepsilon$  наиболее выгодно, если ее левая граница  $b = 0$ . Далее рассмотрим коалиции  $(0, a)$ , где  $a \in (0, \frac{r}{2})$ . Для них  $\Delta U(a) = R(a) - \frac{a}{2} - R(r) + \frac{r}{2} - a \leq 0 \Leftrightarrow R(a) - \frac{3a}{2} \leq R(r) - \frac{r}{2}$ .

#### 5.5. Доказательство утверждения 3.2

Рассмотрим условие (3.2), которое согласно утверждению 3.1 является необходимым и достаточным условием устойчивости к расколу. Заметим, что при  $x = 0$  и  $x = \frac{r}{2}$  неравенство (3.2) выполнено для

любой коалиции, в которой выигрыш граничного агента неотрицателен. Если  $R(\cdot)$  вогнута, то  $\bar{R}(x) = R(x) - \frac{3x}{2}$  также вогнута. Рассмотрим возможные случаи. Если  $R'_+(x) \leq \frac{3}{2}, \forall x \in (0, \frac{r}{2})$ , то  $\bar{R}(x)$  не возрастает на  $(0, \frac{r}{2})$  и  $\bar{R}(x) \leq \bar{R}(0)$ , для которого (3.2) выполнено. Если  $R'_-(x) \geq \frac{3}{2}, \forall x \in (0, \frac{r}{2})$ , то  $\bar{R}(x)$  не убывает на  $(0, \frac{r}{2})$  и  $\bar{R}(x) \leq \bar{R}(\frac{r}{2})$ , для которого (3.2) выполнено. В остальных случаях  $\bar{R}(x)$  достигает максимума в точке  $x^* \in (0, \frac{r}{2})$ , такой, что  $\frac{3}{2} \in [R'_-(x^*), R'_+(x^*)]$ . Следовательно, для устойчивости к расколу необходимо и достаточно, чтобы условие (3.2) выполнялось для  $x^*$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алескеров Ф.Т. *Индексы влияния, учитывающие предпочтения участников по созданию коалиций* // Доклады Российской академии наук. 2007. Т. 414. № 5. С. 594–597.
2. Сосина Ю.В. *Эндогенное формирование политических структур и исследование их устойчивости*. Препринт WP7/2004/04, М.:ГУ ВШЭ, 2004.
3. Степанов Д.С. *Модель эндогенного формирования коалиционных структур*: Автореф. дисс. ...канд физ.-мат. наук. Москва: МГУ, 2011 – 20 с.
4. Alesina A., Spolaore E. *On the number and size of nations* // Quarterly Journal of Economics. 1997. V. 113. P. 1027–1056.
5. Bogomolnaia A., Le Breton M., Savvateev A., Weber S. *Stability of jurisdiction structures under the equal share and median rules* // Economic Theory. 2008. V. 34(3). P. 525–543.
6. Bogomolnaia A., Le Breton M., Savvateev A., Weber S. *Stability under unanimous consent, free mobility and core* // International Journal of Game Theory. 2007. V. 35(2). P. 185–204.
7. Dreze J., Le Breton M., Savvateev A., Weber S. *"Almost" subsidy-free spatial pricing in a multi-dimensional setting* // Journal of Economic Theory. 2008. V. 143. P. 275–291.

8. Dreze J., Le Breton M., Savvateev A., Weber S. *A Problem of Football Bars: Vertically and Horizontally Differentiated Public Goods* // X Международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества. Т. 2. М.: ИД ГУ ВШЭ. 2010. С. 86–90.
9. Gomberg A.M., Marhuenda F., Ortuño-Ortín I. *A Model of Endogenous Political Party Platforms* // *Economic Theory*. 2004. V. 24(2). P. 373–394.
10. Ortuño-Ortín I., Roemer J.E. *Endogenous Party Formation And The Effect Of Income Distribution On Policy*. IVIE Working Papers, 2000.
11. Savvateev A. *Achieving stability in heterogeneous societies*. Economics Education and Research Consortium Working Paper Series No 04/13, 2005.
12. Vasin A., Stepanov D. *Endogenous formation of political parties* // *Mathematical and Computer Modelling*. 2008. V. 48. P. 1519–1526.

## ON THE SECESSION-STABILITY OF NASH EQUILIBRIA IN THE MODEL OF ENDOGENOUS COALITION FORMATION

**Sergey A. Vartanov**, Moscow State University, post-graduate student (sergvart@gmail.com).

*Abstract:* We study a model of endogenous coalition formation by players (agents) from large societies. Each agent's preferences are described by his ideal point, while the agents are distributed on the ideal points set according to some rule. The coalition policy is determined as a median of its members ideal points distribution. The payoff of an agent depends on the distance between his ideal point and the policy of the coalition he joins and on the size of this coalition. We assume that the agents distribution has monotonous or unimodal density function. We examine the sufficient and necessary conditions for the Nash equilibria to be stable in regard to secession.

*Keywords:* coalition formation, Nash equilibrium, local stability.