

Общероссийский математический портал

А. Э. Сидорова, Н. Т. Левашова, А. А. Мельникова, А. Е. Семина, Модель структурообразования урбоэкосистем как процесс автоволновой самоорганизации в активных средах, *Матем. биология и биоинформ.*, 2017, том 12, выпуск 1, 186–197

DOI: 10.17537/2017.12.186

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.137.164.200

7 января 2025 г., 00:20:08



УДК: 577

## **Модель структурообразования урбоэкосистем как процесс автоволновой самоорганизации в активных средах**

©2017 Сидорова А.Э.<sup>\*</sup>, Левашова Н.Т.<sup>\*\*</sup>, Мельникова А.А.<sup>\*\*\*</sup>,  
Семина А.Е.<sup>\*\*\*\*</sup>

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра биофизики, кафедра математики*

**Аннотация.** Предложена модель пространственно-временной самоорганизации урбоэкосистем как суперпозиция сопряженных активных сред, учитывающая неоднородности антропогенных и природных факторов. Данный вид экосистем характеризуется высокой скоростью роста численности и плотности населения за счет концентрации жилых, промышленных, торговых и иных объектов, а также средств коммуникации. Перечисленные условия нарушают динамическое равновесие потоков энергии, вещества и информации, снижают «буферную емкость» природных подсистем и увеличивают нелинейность, а, следовательно, и неустойчивость, системных процессов. В основе модели – модифицированное авторами уравнение ФитцХью–Нагумо, учитывающее неоднородности антропогенных (активатор) и природных (ингибитор) факторов. Обоснованность применения уравнения данного типа определяется относительной простотой системного анализа двух уравнений типа «активатор – ингибитор». Получены условия формирования возбудимого/невозбудимого состояния активной среды и начального всплеска автоволны в зависимости от плотности населения и кинетических параметров системы (активатора и ингибитора), а также критерии формирования переходных зон между городами (на основании расчетов, сделанных по данным аэрофотосъемки). Полученное значение безразмерной модельной величины плотности населения в области переходного слоя (барьера на пути автоволнового фронта) и на окраинах жилых массивов позволило выявить коэффициент пропорциональности между параметрами модельной задачи и соответствующими величинами в реальной городской среде. Безразмерная модель подтверждена данными динамики численности и плотности населения и картографическими данными Москвы с 1946 по 2014 годы. Модель позволяет выявлять пороговые значения управляющих параметров и рассмотреть основные принципы развития автоволновых процессов, формирующих структуры урбоэкосистем.

**Ключевые слова:** *активные среды, автоволновая самоорганизация, урбоэкосистемы.*

---

\*sky314bone@mail.ru

\*\*natasha@npanalytica.ru

\*\*\*melnikova@physics.msu.ru

\*\*\*\*syoanya@yandex.ru

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ**

В контексте исторической динамики расселения *Homo sapiens* в антропосфере постепенно сформировались структурные пространственные неоднородности. И в значительной степени эта неоднородность объясняется формированием городов и связанными с ними социально-экономическими отношениями прилегающих территорий. Если 2009 год стал точкой бифуркации (впервые за всю историю *Homo sapiens* численность городского населения сравнялась с численностью сельского населения), то к 2050 году доля численности городского населения может увеличиться до 65–68%. Поэтому можно с уверенностью утверждать, что проблема устойчивости геобиосферы связана с организацией жизненного пространства человечества.

Особенности эволюционного развития сделали города существенно нелинейными сложными системами, с большим трудом поддающимися математическому моделированию, заведомо необходимому для выработки цивилизационно приемлемой траектории их управляемого устойчивого развития. Вместе с тем, даже упрощенные модели, базирующиеся на разумных междисциплинарных посылах, позволяют осмыслить принципиальные особенности их развития.

Вопросу морфологии распределения населения в городских условиях уделяется немало внимания в литературе. Известно, что города с единственным центром функции плотности распределения населения хорошо описываются экспоненциальным законом [1, 2]. Это упрощает аналитическую задачу, но данные модели применимы лишь для небольших одиночных городов, поскольку крупные города обладают множественными пиками плотности населения. Одним из перспективных комплексных методов исследования городской структуры является комбинация теории клеточных автоматов и цепей Маркова: правила перехода одинаковы для всех ячеек инфраструктуры, а вероятность последовательных случайных событий, связанных с городской инфраструктурой, вычисляется при фиксированном состоянии системы [3]. Применение теории фракталов для описания морфологии городских паттернов позволяет исключить представления об однородном пространстве и использовать аналогии между структурой городских паттернов и фрактальными структурами [4]. Данные методы позволяют описывать морфологию города с точки зрения пространственной и социально-экономической структуры, но не учитывают нелинейный эффект взаимодействия многочисленных антропогенных и природных факторов в границах описываемой системы, а следовательно, не рассматривают города в качестве общей экосистемы, что сводит процессы в сложных системах к линейным.

С нашей точки зрения, процесс структурообразования городов целесообразно рассматривать с позиций теории самоорганизации в активных средах, а сами города в качестве урбоэкосистем (УЭС), составленных сопряженными подсистемами – антропогенной и природной [5, 6]. Данный вид экосистем характеризуется высокой скоростью роста численности и плотности населения за счет концентрации жилых, промышленных, торговых и иных объектов, а также средств коммуникации. В результате, в границах УЭС наблюдается более активный энерго- и массообмен и высокая интенсивность процессов метаболизма. Перечисленные условия нарушают динамическое равновесие потоков энергии, вещества и информации, снижают «буферную емкость» природных подсистем и увеличивают нелинейность, а, следовательно, и неустойчивость, системных процессов.

Известно, что чем сложнее структура системы, тем сложнее и многочисленнее функциональные взаимодействия, и тем большее количество стационарных (устойчивых и неустойчивых) состояний одновременно может возникать в системе (мультистабильность). Поэтому необходимым условием самоорганизации в УЭС является синергетическое соответствие природных (биотических и абиотических) факторов масштабам антропогенного воздействия, что определяется структурно-

функциональной сложностью экосистемы, интенсивностью антропогенных процессов и потенциальной способностью природных подсистем нивелировать эти процессы («буферной емкостью»).

УЭС как сопряженные активные среды относятся к нелинейным динамическим макроструктурам, состоящим из сопряженных во времени и пространстве природных и антропогенных подсистем [6–8]. В УЭС имеется распределенный ресурс (население, промышленные и жилые объекты, транспорт, геобиоценозы). При наличии возмущения в соседних ячейках, связанного с изменением ресурса, процесс способен стать автокаталитическим. И наиболее активный «водитель ритма» способен захватить все пространство УЭС (подобный процесс протекает в химической реакции Белоусова–Жаботинского). В результате увеличения численности и плотности населения растет плотность застройки, увеличивается количество транспорта, промышленных предприятий, торговых и других сопутствующих росту населения структур, протяженность коммуникаций, расширяются границы УЭС и т.д. Более того, растущие города имеют тенденцию к слиянию в общие системы. И результатом расширения и слияния УЭС является изменение площадей геобиоценозов (как городских, так и между городами), количественного (флуктуации) и качественного (бифуркации) состава трофических сетей.

Самоорганизация проявляется в образовании автоволновых диссипативных структур [9–12], формирующих выделенные степени свободы [13], и способна поддерживать устойчивость УЭС в допороговом состоянии. Управляющими параметрами данного процесса являются природные и антропогенные факторы (возбудимые элементы), формирующие длину и форму автоволн. При этом скорости антропогенных процессов, по меньшей мере, на порядок больше скоростей природных процессов [14], поэтому антропогенные процессы в данной модели мы полагаем активаторами, а природные – ингибиторами общесистемных процессов. Данные свойства позволяют качественно оценить пороговые и подпороговые условия распространения автоволнового процесса в зависимости от интенсивности источников воздействия, расположения возбудимых, слабовозбудимых и невозбудимых зон, наличия латентных источников автоволн, численности и плотности населения, и от других факторов.

В качестве активаторов системных процессов предлагается рассматривать: загрязнение химическими веществами, техногенные электромагнитные излучения [6], коррозию подземных сооружений и коммуникаций, изменение температуры, кислотности (рН) и окислительно-восстановительного потенциала (Eh) подземных вод, акустические и вибрационные нагрузки на верхний слой литосферы, рост концентрации тяжелых металлов в биогенном веществе и т.д. В качестве ингибиторов – удельное электрическое сопротивление, возрастание/уменьшение плотности и влажности почво-грунтов, скорость течения и перемешивания подземных вод, площадь природного каркаса и т.д.

### МОДЕЛЬ СТРУКТУРООБРАЗОВАНИЯ УРБОЭКосИСТЕМ КАК ПРОЦЕСС АВТОВОЛНОВОЙ САМООРГАНИЗАЦИИ В АКТИВНЫХ СРЕДАХ

На базе уравнения ФитцХью–Нагумо [15] авторами предложена система уравнений [5–8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon D_u \Delta u &= -\frac{1}{\varepsilon} (u(u - \alpha(x, y))(u - 1) - uv), \quad -L \leq x \leq L, \quad -L \leq y \leq L, \quad t > 0; \\ \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} - \varepsilon D_v \Delta v &= -\gamma v + \beta u. \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u$  – функция интенсивности антропогенных процессов (активатор),

$v$  – функция интенсивности природных процессов (ингибитор).

Введённое авторами произведение  $uv$  расширяет возможности математического анализа перекрестных взаимодействий активатора и ингибитора. Решения уравнения относительно  $u$  и  $v$  неотрицательны.

$\alpha$  – параметр активации системы (определяется как величина, обратная плотности населения),  $\alpha < 1$ .

$\gamma$  – кинетический параметр затухания ингибитора,  $\gamma > 0$ .

$\beta$  – кинетический параметр взаимодействия активатора и ингибитора,  $\beta > 0$ .

$\varepsilon D_u, \varepsilon D_v$  – коэффициенты диффузии активатора и ингибитора.

$\varepsilon$  – параметр, отражающий значительное различие скоростей изменения функций активатора и ингибитора, ( $0 < \varepsilon < 1$ ).

Система решается численно при помощи счета на установление в пространственной области  $D$  с границей  $\partial D$ . На границе расчетной области задаются краевые условия Неймана:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=-L, x=L} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=-L, y=L} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=-L, x=L} = \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y=-L, y=L} = 0.$$

Распределение в начальный момент времени считается известным. Численное решение двумерной задачи проводится в прямоугольнике  $-L \leq x \leq L; -L \leq y \leq L$ , в котором вводится равномерная сетка. Реализация численного счета производится при помощи схемы с эволюционной факторизацией [16, 17]. Использование этой схемы позволяет провести распараллеливание численного процесса. Распределенные компьютерные вычисления были проведены с помощью графических процессоров AMD и компилятора OpenCL.

Вырожденная система уравнений для (1) записывается следующим образом:

$$u(u - \alpha(x, y))(u - 1) + uv = 0; \quad \gamma v - \beta u = 0. \quad (2)$$

В зависимости от того, сколько решений может быть у вырожденной системы уравнений, она описывает бистабильную или моностабильную среду [5]. На рисунке 1 представлена диаграмма состояния активной среды в зависимости от соотношения параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Кривая, отделяющая область моностабильности от области бистабильности, получена в результате анализа количества решений системы (2).

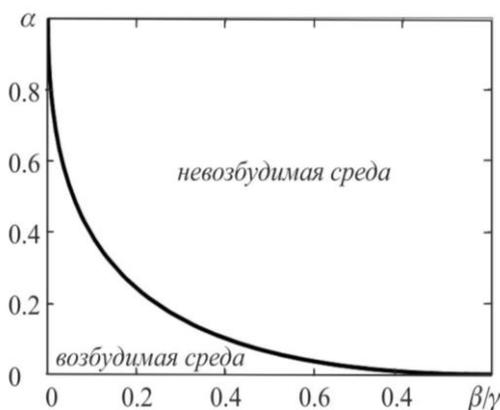


Рис. 1. Диаграмма состояния активной среды в зависимости от соотношения параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .

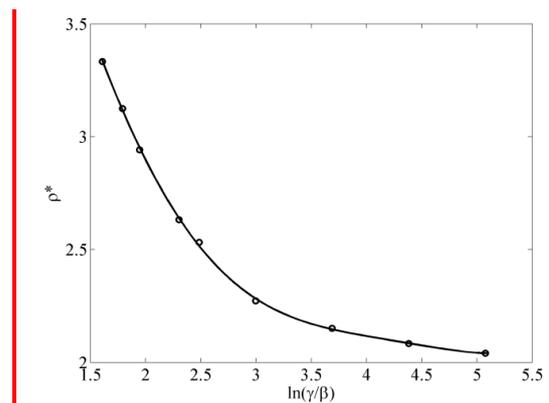


Рис. 2. График зависимости  $\rho^* = 1/\alpha^*$  от  $\ln(\gamma/\beta)$ .

Достаточным условием для формирования автоволнового фронта активатора является такое соотношение параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , которое соответствует области возбудимой среды (рис. 1): волна активатора поддерживается за счет наличия

распределенных источников энергии вещества и информации. Затухание автоволны возможно, если соотношение параметров лежит в области невозбудимой среды: единственное возможное устойчивое состояние системы (2) – нулевое, а любая начальная флуктуация затухает со временем, поскольку природные факторы способны ингибировать негативные антропогенные процессы.

Чем больше плотность населения, тем больше в системе УЭС формируется прямых и обратных связей и, следовательно, тем больше значение кинетического параметра взаимодействия потенциалов активатора и ингибитора  $\beta$ . Система становится невозбудимой, как только кинетические параметры системы (кинетический параметр затухания ингибитора –  $\gamma$  и кинетический параметр взаимодействия активатора и ингибитора –  $\beta$ ) становятся сравнимыми. При этом численность и плотность населения являются важными факторами формирования структуры УЭС и интенсивности автоволнового процесса распространения антропогенных факторов. Необходимо учитывать, что самоорганизация возможна только при условии отсутствия необратимых процессов, т.е. в подпороговой зоне устойчивости системы (имеются в виду границы УЭС, количество, направленность и взаимодействие природных и антропогенных факторов). А в случае значительного дисбаланса в сторону антропогенных воздействий доминирующий водитель ритма (активатор) постепенно захватывает все пространство (как в реакции Белоусова–Заикина–Жаботинского), что вызывает, как правило, необратимые системные процессы в УЭС. В этом случае система переходит на новый качественный уровень.

УЭС, как правило, характеризуется наличием переходной области от городской среды к пригородной. Этот переход, в основном, связан со значительным уменьшением плотности населения, и поэтому, согласно модели, в районе городской окраины происходит резкое изменение функций интенсивностей активатора и ингибитора. Существование и положение переходного слоя в рамках рассматриваемой модели определяется функцией  $\alpha(x,y)$ , обратно пропорциональной плотности населения. Из расчетов, проведенных для рассматриваемой модели (согласно работам [18, 19]), следует, что переходный слой образуется в окрестности некоторой кривой на плоскости  $(x,y)$  при таких значениях  $(x,y)$ , на которой функция  $\alpha(x,y) = \alpha^*$ . Величина  $\alpha^*$  определяется из уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{\beta} (v_3(\alpha^*))^2 - (\alpha^* + 1)(v_3(\alpha^*) - v_0(\alpha^*)) + \\ & + \frac{1}{6} \left( \left( (\alpha^* - 1)^2 - 4v_3(\alpha^*) \right)^{3/2} - \left( (\alpha^* - 1)^2 - 4v_0(\alpha^*) \right)^{3/2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{где } v^3 = 0.5 \left( \frac{\beta}{\gamma} (\alpha + 1) - \frac{\beta^2}{\gamma^2} + \sqrt{\left( \frac{\beta}{\gamma} (\alpha + 1) - \frac{\beta^2}{\gamma^2} \right)^2 - 4\alpha \frac{\beta^2}{\gamma^2}} \right), \quad v_0 = \frac{9(\alpha - 1)^2 - (\alpha + 1)^2}{36}.$$

С увеличением кинетического параметра затухания потенциала ингибитора – процессов природной подсистемы ( $\gamma$ ) относительно кинетического параметра затухания потенциала активатора – антропогенных процессов ( $\beta$ ) уменьшается критическое значение параметра активации системы ( $\alpha^*$ ) и увеличивается критическое значение параметра плотности населения  $\rho^* = (\alpha^*)^{-1}$  (рис. 2).

В рамках двумерной модели нами были рассмотрены следующие варианты образования структуры УЭС: А) два города сравнимого диаметра с одинаковыми распределениями плотности населения; В) два города с разными диаметрами и разной пиковой плотностью населения.

**А) Результаты численных экспериментов для двух городов с сопоставимыми диаметрами с одинаковым распределением плотности населения**

В формирующемся населенном пункте, если его образование не является результатом экономических предпосылок (например, возникновения промышленных центров, стимулирующих градообразование), а продиктовано ростом численности населения, исходный уровень урбанизации (наличие промышленных объектов, транспорта, средств коммуникации и т.д.) всегда низкий. Поэтому проблема образования и развития УЭС непосредственно связана не только с численностью и плотностью населения ( $\rho$ ), но и со значением критического параметра плотности населения ( $\rho^*$ ) в точке локализации переходного слоя.

На основании расчетов, сделанных по данным аэрофотосъемки городов ближнего Подмосковья, получено соответствие значения безразмерной величины плотности населения в области переходного слоя ( $\rho^*$ ), определяемого моделью, и плотности населения на окраинах реальных городских массивов. Согласно нашим расчетам, критерием образования переходного слоя является  $\rho^* = 1500\text{--}1800$  чел/км<sup>2</sup>. Мы исходили из следующих соображений. Для небольших городов, не являющихся промышленными центрами, при  $\gamma/\beta = const$  зона переходного слоя совпадает с областью наибольшего градиента функции плотности населения. В случае распределения населения по Гауссу значение плотности в области наибольшего градиента определяется как  $\rho^* = \rho_0 / \sqrt{e}$ . Для рассмотренных нами небольших городов Подмосковья характерное максимальное значение плотности равно  $\rho_0 = 2500\text{--}3000$  чел/км<sup>2</sup>. Тогда  $\rho^* = \rho_0 / \sqrt{e} = 1500\text{--}1800$  чел/км<sup>2</sup>. Используя эту величину, можно определить, какой плотности населения отвечает безразмерная единица плотности, являющейся параметром в рассматриваемой модели. В частности, при  $\gamma/\beta = 6.7$ , уравнение (3) дает  $\alpha^* \approx 0.333$ , что соответствует безразмерной величине плотности населения в зоне переходного слоя  $\rho^* \approx 3$ . Сравнивая эту величину со значением  $\rho^* = 1500\text{--}1800$  чел/км<sup>2</sup>, получаем, что единице безразмерной плотности населения соответствует величина  $500\text{--}600$  чел/км<sup>2</sup>.

Авторами проведен расчет вероятности слияния двух городов в зависимости от расстояния между их центрами ( $d$ ) и распределения плотности населения. На рисунках 3 и 4 представлены карты анализируемых объектов и графики зависимости функций  $u$ ,  $v$  и  $\rho$  от координат  $x$ ,  $y$ .

Для проведения численных экспериментов выбиралась следующая функция распределения плотности населения:

$$\rho(x, y) = \rho_0 \left( \exp\left(-\lambda((x-x_1)^2 + y^2)\right) + \exp\left(-\lambda((x-x_2)^2 + y^2)\right) \right), \quad \lambda = \frac{1}{d^2} \ln \frac{\rho_0}{\rho_d}, \quad (4)$$

где  $(x_1, 0)$  и  $(x_2, 0)$  – координаты центров городов; центр каждого из городов лежит на оси ОУ;  $\rho_0$  и  $\rho_d$  – значения плотности в центре и на расстоянии  $d$  от центра.

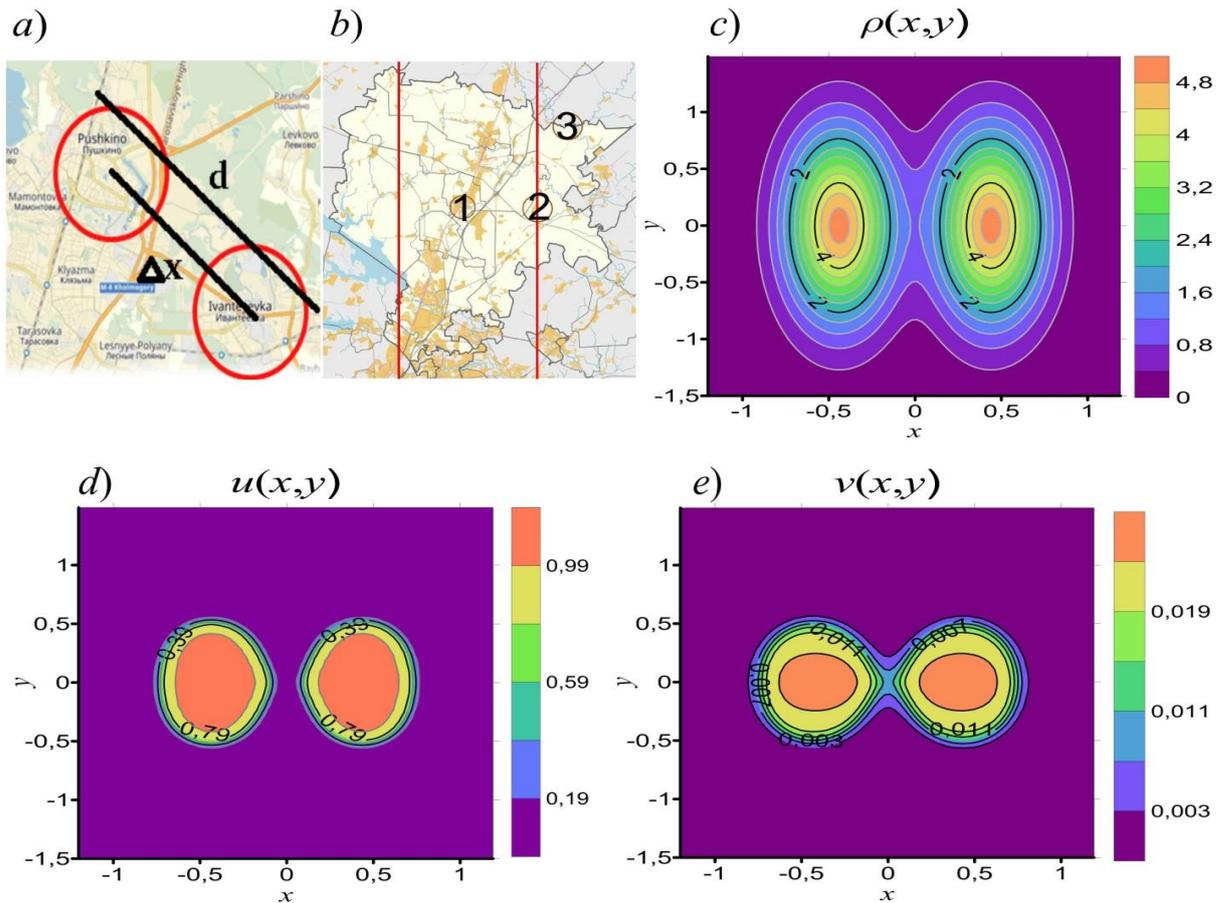
Начальное приближение:

$$u_0(x, y) = \exp\left(-15((x-x_1)^2 + y^2)\right) + \exp\left(-15((x-x_2)^2 + y^2)\right), \quad v_0(x, y) = 0.$$

Параметры уравнения (1), а также функций  $\rho(x, y)$  и  $u_0(x, y)$  указаны в таблице 1.

**Таблица 1.** Параметры системы для двух городов с сопоставимыми диаметрами и одинаковым распределением плотности населения

$\varepsilon$	$D_u$	$D_v$	$\gamma$	$\beta$	$\rho_0$	$\rho_d$	$\rho^*$	$d$	$x_1$	$x_2$
0.007	5	1	20	1	5	1.1	2.3	0.3	-0.4	0.4

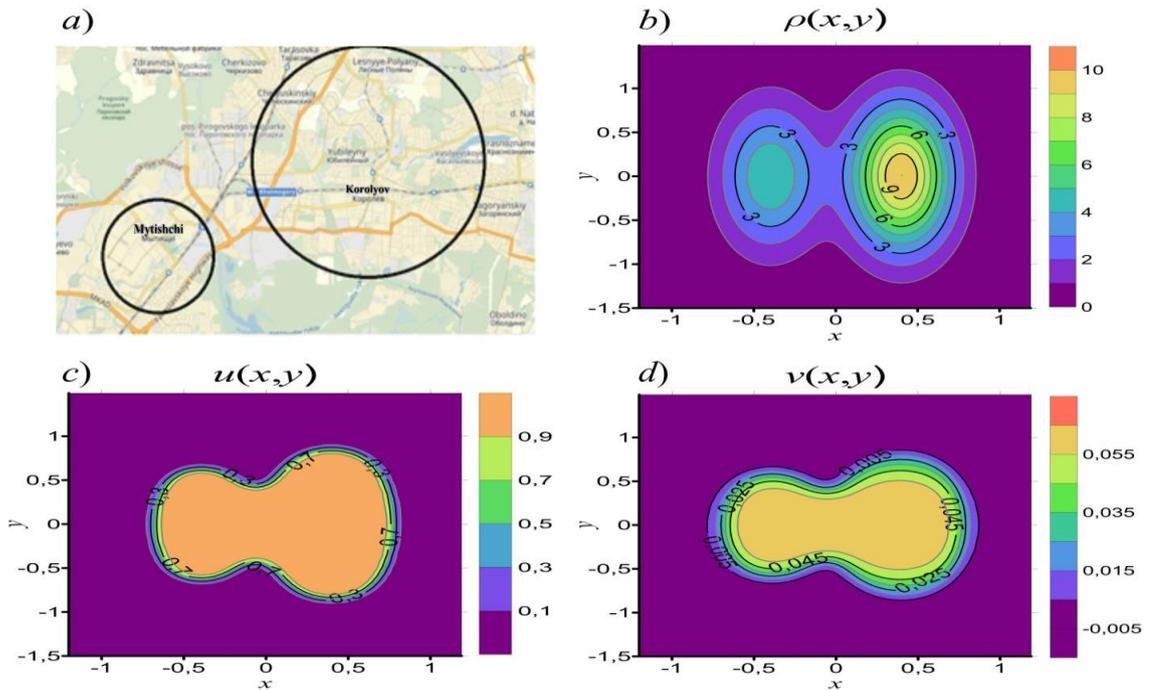


**Рис. 3.** Объект исследования – Пушкино и Ивантеевка (УЭС с одинаковыми пиками распределения плотности населения и площадями территорий): **а)** карта расположения двух городов [20]; **б)** рассматриваемые области Пушкино: 1 – в центре, 2 – в переходной области, 3 – на окраине; **в)** график пространственного распределения функции плотности населения; **д)** график пространственного распределения функции интенсивности антропогенных процессов; **е)** график пространственного распределения функции интенсивности природных процессов.

Если границы городов разделяет достаточно большая площадь лесного массива, автоволна антропогенных воздействий гасится при переходе в зону природной экосистемы. В данном случае два города расположены на достаточном удалении друг от друга, и значение плотности населения между городами меньше критического ( $\rho^*$ ), что приводит к формированию достаточно устойчивой промежуточной зоны между двумя УЭС с постоянными границами. Поэтому при данных значениях функций  $u$ ,  $v$  и  $\rho$  общий автоволновой фронт не формируется.

### **В) Результаты численных экспериментов для двух городов разного диаметра с различными распределениями плотности населения**

В случае активного роста плотности населения расширение границ города происходит за счет территории природной экосистемы, что снижает ее потенциальные возможности как ингибитора антропогенных процессов. В результате возможно образование экосистемы с общим автоволновым фронтом. В качестве примера нами был проведен анализ для близко расположенных городов Мытищи и Королев. Данные аэрофотосъемки и расчеты математического моделирования подтвердили значительную вероятность слияния двух городов в общую УЭС (рис. 4).



**Рис. 4.** Объект исследования – города: Королев и Мытищи (УЭС разного диаметра с различными распределениями плотности населения): **а)** карта расположения; **б)** график пространственного распределения функции плотности населения; **в)** график пространственного распределения функции интенсивности антропогенных процессов; **д)** график пространственного распределения функции интенсивности природных процессов.

Представленные графики показывают, что для двух городов разного диаметра с различными распределениями плотности населения формирование автоволнового фронта и переходных зон также, как и для предыдущего случая (равные диаметры и одинаковые распределения плотности населения) определяется значением  $\rho(x,y)$ ,  $\rho^*(x,y)$  и соотношением  $\gamma/\beta$ . Таким же образом, за счет присоединения близлежащих территорий с меньшей плотностью населения к основной территории УЭС, происходит формирование мегаполисов.

Распределение плотности населения в области  $(x,y) \in \left\{ \left[ -\frac{L}{2}; \frac{L}{2} \right] \times \left[ -\frac{L}{2}; \frac{L}{2} \right] \right\}$  задается формулой:

$$\rho(x,y) = \rho_{01} \exp\left(-\frac{(x-x_1)^2}{d_{x1}^2} - \frac{(y-y_1)^2}{d_{y1}^2}\right) + \rho_{02} \exp\left(-\frac{(x-x_2)^2}{d_{x2}^2} - \frac{(y-y_2)^2}{d_{y2}^2}\right). \quad (5)$$

Параметры функции  $\rho(x,y)$  и системы (1), при которых проводились расчеты, представлены в таблице 2. Результаты численного эксперимента и данные аэрофотосъемки представлены на рисунке 4.

**Таблица 2.** Параметры системы для двух городов с разными  $\rho$  и площадями территорий

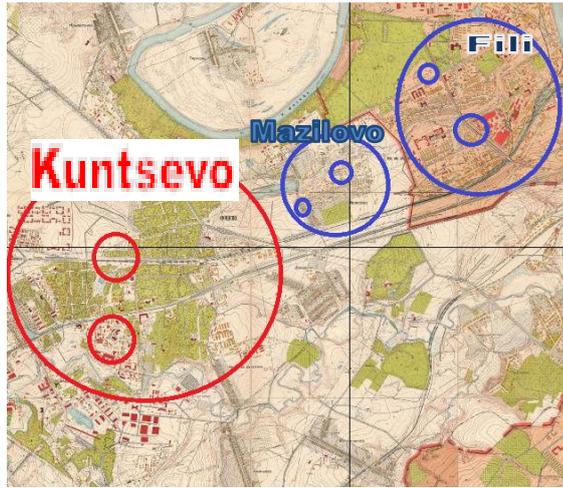
$\varepsilon$	$D_u$	$D_v$	$\gamma/\beta$	$\rho_{01}$	$\rho_{02}$	$\rho^*$	$d_{x1}$	$d_{x2}$	$x_1$	$x_2$	$\Delta x$	$d_{y1}$	$d_{y2}$	$y_1$	$y_2$	$L$
0.007	5	1	20	10	5	2.3	0.3	0.3	-0.4	0.4	0.8	0.8	0.8	0	0	2

### Модель присоединения населенных пунктов Фили, Мазилово и Кунцево к Москве (1946–1968 гг.) как процесс автоволновой самоорганизации

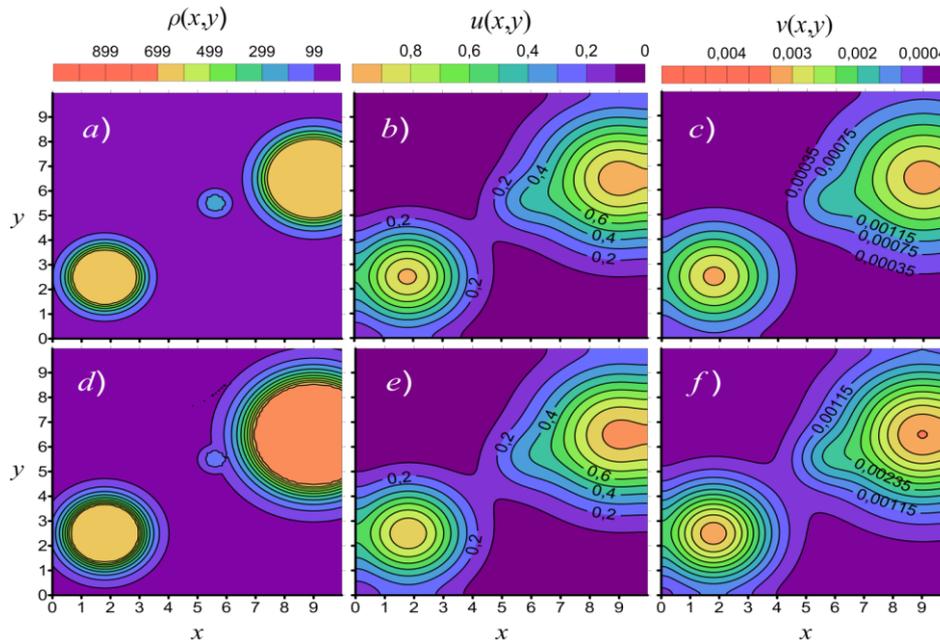
Присоединение происходило поэтапно: в 1952 г. – Фили и Мазилово (небольшой коттеджный поселок), в 1968 г. – Кунцево (табл. 3, рис. 5–7).

**Таблица 3.** Параметры динамики развития населенных пунктов Фи́ли, Мазилово, Кунцево

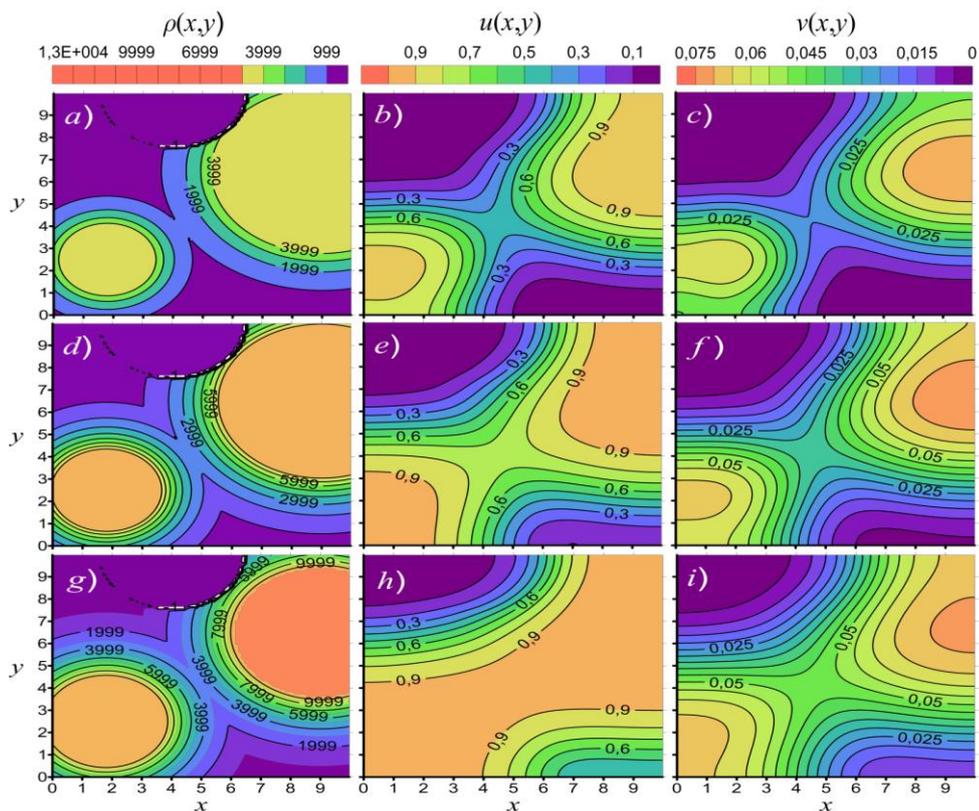
Населенные пункты Подмосковья	год	$\rho_{\text{центр, чел/км}^2}$	$\rho_{\text{окраина, чел/км}^2}$
Кунцево	1946 [22]	200	80
Фи́ли	1946 [22]	200	30
Кунцево	1952 [22]	280	60
Фи́ли	1952 [23]	2160	360
Мазилово	1952 [23]	200	30
Кунцево	1968 [24]	12960	504
Фи́ли	1968 [24]	13000	13000



**Рис. 5.** 1952 год: Фи́ли, Кунцево и Мазилово представляют собой отдельные поселения, разделенные природными биоценозами. На рисунке кружочками показаны области расчёта плотности населения в центре городов и на окраине [22].



**Рис. 6.** Присоединение Мазилово к Фи́ли в случае линейного роста плотности населения и радиуса Фи́ли. 1947 год: **a)** плотность населения ( $\rho$ ), **b)** функция интенсивности активатора ( $u$ ), **c)** функция интенсивности ингибитора ( $v$ ); 1949 год: **d)** плотность населения ( $\rho$ ), **e)** функция интенсивности активатора ( $u$ ), **f)** функция интенсивности ингибитора ( $v$ ).



**Рис. 7.** Присоединение Кунцево к Москве в случае линейного роста плотности населения и радиуса Фили и Кунцево. 1956 год: **а)** функция плотности населения ( $\rho$ ), **б)** функция интенсивности активатора ( $u$ ), **с)** функция интенсивности ингибитора ( $v$ ); 1962 год: **д)** плотность населения ( $\rho$ ), **е)** функция интенсивности активатора ( $u$ ), **ф)** функция интенсивности ингибитора ( $v$ ); 1968 год: **г)** плотность населения ( $\rho$ ), **h)** функция интенсивности активатора ( $u$ ), **и)** функция интенсивности ингибитора ( $v$ ).

Плотность населения, проживающего на площади  $S$ , рассчитывается как  $\rho = (n_{\text{домов}} \cdot m_{\text{человек}}) / S$ , где  $n$  – число домов на этом участке (картографические данные),  $m$  – число человек в каждом доме (усредненные данные). Расчеты динамики поэтапного присоединения поселков Фили, Мазилово и Кунцево представлены на рисунках 6 и 7.

Использование допущения о линейном росте плотности населения и радиусов присоединяемых населенных пунктов позволило провести анализ для промежуточных временных интервалов процесса урбанизации – образования Москвы. Данные модельного расчета посредством безразмерной модели в полной мере согласуются с динамикой развития реальных экосистем.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использованный нами подход основан на представлениях об автоволновой самоорганизации в активных средах. В настоящей работе в качестве антропогенных факторов, контролирующих пространственно-временную структуру развития урбэкоцистем, рассмотрены факторы социально-экономического и физико-химического характера. Установлено, что при переходе из одной УЭС в другую плотность населения и соотношение  $\gamma/\beta$  изменяется скачкообразно. Этот вывод соответствует теории самоорганизации: при переходе на новый уровень происходит качественный скачок в структуре и функциях системы. Особенно это характерно для развития мегаполисов за счет прилегающих территорий – небольших городов, которые в результате присоединения попадают на новый иерархический уровень эволюции УЭС – мегаполисов. Предложенная модель позволяет описывать характерные свойства УЭС, а обоснованность ее применения подтверждается аналитическими и численными

методами. Моделирование режимов срыва подобных систем в хаотические режимы требует дополнительного рассмотрения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Helbich M., Leitner M. Posturban spatial evolution of Vienna's Urban Fringe: evidence from point process modeling. *Urban Geography*. 2010. V. 31. No. 8. P. 1100–1117.
2. Yorgos Y. Papageorgiou. Population density in a central-place system. *Journal of Regional Science*. 2014. V. 54. Iss. 3. P. 450–461.
3. Vaz E., Arsanjani J.J. Predicting urban growth of the Greater Toronto Area – coupling a markov cellular automata with document meta-analysis. *Journal of Environmental Informatics*. 2015. V. 25. No. 2. P. 71–80.
4. Frankhauser P. Fractal geometry of urban patterns and their morphogenesis. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 1998. V. 2. Iss. 2. P. 127–145.
5. Сидорова А.Э., Левашова Н.Т., Мельникова А.А., Яковенко Л.В. Популяционная модель урбоэкосистем в представлениях активных сред. *Биофизика*. 2015. Т. 60. № 3. С. 574–582.
6. Сидорова А.Э., Мухартова Ю.В., Яковенко Л.В. Урбоэкосистемы как суперпозиция сопряженных активных сред. *Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия*. 2014. № 5. С. 29–35.
7. Сидорова А.Э., Левашова Н.Т., Мельникова А.А., Дерюгина Н.Н., Семина А.Е. Автоволновая самоорганизация в неоднородных природно-антропогенных экосистемах. *Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия*. 2016. № 6. С. 39–45.
8. Levashova N., Melnikova A., Semina A., Sidorova A. Autowave mechanisms of structure formation in urban ecosystems as the process of self-organization in active media. *Communication on Applied Mathematics and Computation*. 2017. V. 31. № 1. P. 32–42.
9. Murray J.D. *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. 811 p.
10. Елькин Ю.В. Автоволновые процессы (краткий обзор). *Математическая биология и биоинформатика*. 2006. Т. 1. № 1. С. 27–40.
11. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. *Автоволновые процессы*. М.: Наука, 1987. 240 с.
12. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. *Математическая биофизика*. М.: Наука, 1984. 304 с.
13. Твердислов В.А., Малышко Е.В., Ильченко С.А. От автоволновых механизмов самоорганизации к молекулярным машинам. *Известия РАН. Серия физическая*. 2015. Т. 79. № 12. С. 1728–1732.
14. Савенко В.С. *Геохимические аспекты устойчивого развития*. М.: ГЕОС, 2003. 180 с.
15. FitzHugh R.A. Impulses and physiological states in theoretical model of nerve membrane. *Biophys. J*. 1961. P. 445–466.
16. Калиткин Н.Н., Корякин П.В. *Численные методы: в 2 кн. Кн 2. Методы математической физики*. М: Издательский центр «Академия», 2013. 303 с.
17. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы математической физики*. М.: Научный мир, 2003. 316 с.
18. Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А. Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2012. Т. 52. № 11. С. 1983–2003.

19. Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А. Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2013. Т. 53. № 9. С. 9–29.
20. *Retromap*: карта Московской области. URL: <http://www.retromap.ru/m.php#l=0120090&z=12&y=55.990636&x=37.886282> (дата обращения: 20.04.2017)
21. *Retromap*: карта г. Королев Московской области. URL: <http://www.retromap.ru/m.php#l=0120090&z=13&y=55.921404&x=37.825514> (дата обращения: 20.04.2017).
22. *Retromap*: карта г. Москва, район Филевский парк. URL: <http://www.retromap.ru/m.php#l=051946&z=14&y=55.743646&x=37.478585> (дата обращения: 20.04.2017).
23. *Retromap*: карта г. Москва, район Фили-Давыдково. URL: <http://www.retromap.ru/m.php#l=051952&z=15&y=55.737463&x=37.475325> (дата обращения: 20.04.2017).
24. *Retromap*: карта г. Москва, префектура Западного округа. URL: <http://www.retromap.ru/m.php#l=051968&z=16&y=55.727146&x=37.443439> (дата обращения: 20.04.2017).

Рукопись поступила в редакцию 04.05.2017.

Дата опубликования 15.05.2017.